

**ESTUDIO TEORICO-EXPERIMENTAL DE FLUJO PERMANENTE
CON ARRASTRE DE FONDO EN MEANDROS FLUVIALES INCIPIENTES**

por

MARCO FALCON ASCANIO

Febrero, 1997

ACADEMIA DE CIENCIAS FISICAS, MATEMATICAS Y NATURALES

PALACIO DE LAS ACADEMIAS

CARACAS, VENEZUELA

AGRADECIMIENTO

A la Universidad Central de Venezuela, institución que me permitió continuar mi formación para llevar a cabo el presente trabajo.

**ESTUDIO TEORICO-EXPERIMENTAL DE FLUJO PERMANENTE
CON ARRASTRE DE FONDO EN MEANDROS FLUVIALES INCIPIENTES**

Indice

| | |
|---|----|
| I) Introducción | 1 |
| II) Revisión Bibliográfica | 4 |
| III) El Principio del Momentum Angular aplicado a Flujos con Superficie Libre y Cauces con Curvatura en Planta | 18 |
| IV) Descripción Física del Flujo en Meandros | 22 |
| V) Análisis del Flujo en Meandros Incipientes | 25 |
| V.1) Ecuaciones Dinámica Transversa y de Cantidad de Movimiento Angular | 27 |
| V.2) Componente Rotacional de la Velocidad Transversa | 30 |
| V.3) Ecuación Dinámica Longitudinal | 38 |
| V.4) Ecuación de Continuidad del Sedimento | 42 |
| V.5) Ecuación de Continuidad del Fluido | 47 |
| VI) Verificación del Modelo Analítico | 48 |
| VI.1) Experimentos de Gottlieb (1976) | 48 |
| VI.1.1) Experimentos con Fondo Móvil | 49 |
| VI.1.1.1) Discusión de Resultados con Experimentos de Fondo Móvil | 50 |
| VI.1.2) Experimentos con Fondo Rígido | 53 |

| | |
|--|-----------|
| VI.1.2.1) Discusión de Resultados con Fondo Rígido | 54 |
| VI.2) Experimento de Ikeda y Nishimura | 54 |
| VII) Diseño y Construcción de un Canal Débilmente Meandroso | 55 |
| VII.1) Características del Canal | 55 |
| VII.2) Medición de Pendientes del Canal y del Flujo | 56 |
| VII.3) Equipo de Medición | 57 |
| VII.4) Discusión de Resultados | 59 |
| VIII) Aplicación al Río Missouri | 61 |
| IX) Conclusiones y Recomendaciones | 64 |
| Bibliografía | 65 |
| Anexo I: Resultados Experimentales del Canal de la UCV | |
| Anexo II: Listado del Programa Computacional correspondiente al Flujo en Meandros Incipientes | |

ESTUDIO TEORICO-EXPERIMENTAL DE FLUJO PERMANENTE CON ARRASTRE DE FONDO EN MEANDROS FLUVIALES INCIPIENTES

I) Introducción

La existencia de tramos rectos fluviales con longitudes mayores que un pequeño número de veces su anchura típica es poco frecuente en la naturaleza. De allí que un entendimiento fundamental de la dinámica del flujo sobre lechos erosionables en cauces con curvatura en planta sea importante para la hidráulica fluvial. La determinación de la topografía del lecho y de la distribución de velocidad del flujo en cauces naturales es de interés para fluviomorfólogos e ingenieros de rios, y es importante para la planificación de puertos fluviales, diseño de canales de navegación, análisis de contaminación, y selección de sitios de puente, estructuras de toma, proyectos de protección de márgenes, etc. Como los meandros de un cauce se comportan como una onda que progresa hacia aguas abajo con una amplitud que puede aumentar es obvio que esto incide sobre la posesión legal de tierras ribereñas y puede suscitar problemas delicados si el rio meandroso es limítrofe entre dos estados soberanos. En la ejecución de estudios en modelos físicos de flujos en rios la estimación de los efectos de la distorsión entre las escalas vertical y las del plano horizontal también depende de la comprensión del flujo en cauces con curvatura en planta.

Uno de los distintivos de flujos en cauces curvos con superficie libre es la existencia del tal llamado flujo secundario en planos transversos a la dirección primaria del movimiento (es decir, al eje longitudinal del cauce). El famoso Albert Einstein (1954) explicó en términos muy sencillos el origen de las corrientes secundarias en cauces curvos y de allí procedió a explicar su influencia en la formación de meandros. Esta circulación transversa es el agente primordial responsable del relieve del lecho en meandros fluviales. Además, el flujo secundario interacciona dinámicamente con el movimiento primario, y produce efectos que pueden ser bastante diferentes dependiendo de que el flujo sea "uniforme" o no, y, en este último caso, del grado de no uniformidad. Aquí se entiende por flujo "uniforme" el que

ocurriría en un canal infinitamente largo, de sección y pendiente constantes, y, de radio de curvatura en planta constante (el eje longitudinal, central del canal describiría una hélice en el espacio). El análisis de los flujos no uniformes (el caso correspondiente a meandros) es más complicado que el de los uniformes porque, adicionalmente, la tasa longitudinal de cambio de la circulación transversa, y su interacción con el flujo primario, juega un papel determinante.

Para tratar de comprender los procesos físicos que causan la sinuosidad típica de los cauces fluviales, el origen de meandros a partir de un cauce inicialmente recto se ha tratado de explicar mediante análisis de estabilidad partiendo de dos tipos de perturbaciones iniciales diferentes. Un primer enfoque postula la existencia de un tren migratorio de barras alternadas (**bar theory**) sobre el lecho de un cauce con márgenes rectas. Al imponer las ecuaciones gobernantes se determinan la celeridad del sistema de barras y la tasa de crecimiento inicial de su amplitud (es decir, cuando la amplitud es muy pequeña, tal que vale un análisis linealizado de las ecuaciones pertinentes). Luego se supone que la longitud resultante de las barras es la que maximiza la tasa de crecimiento de la amplitud, y, que esa longitud, luego de un proceso de erosión del thalweg, deviene en la longitud de onda de los meandros. Callander (1969), Falcón (1970), Sukegawa (1970), Engelund y Skovgaard (1973), Hayashi (1974) y Parker (1976) aplicaron el enfoque arriba mencionado. Los modelos difieren en cuanto al tipo de flujo: ideal o real; al arrastre de sedimento: de fondo o suspendido; y en lo que a las ecuaciones gobernantes se refiere: verticalmente integradas o tridimensionales. Sin embargo, Schumm y Khan (1972) no observaron la formación de meandros en sus experimentos en cauces rectos y en los que si se formaban barras alternadas. Pero, al agregar una suspensión de kaolinita (la cual fijó las barras) y reducir la carga sólida de fondo, el thalweg delineado por las barras alternadas inmovilizadas fue originando la sinuosidad en planta de las márgenes correspondiente a un meandro. Debido a que el cambio de arrastre en el modelo tenía su contraparte en prototipo, durante tiempos geológicos recientes, se atribuyó la formación de meandros al tipo de secuencia

modelada. Callander (1978) resume el trabajo de otros autores relacionados a este tema y sugiere estudiar el efecto de la tasa de erosión de las márgenes.

El segundo enfoque parte de una perturbación de la proyección en planta de las márgenes verticales (**bend theory**) de un canal inicialmente recto. Ikeda, Parker y Sawai (1981) mencionan el trabajo de Ikeda, Hino & Kikkawa (1967) donde por primera vez se permite erosión de, y deposición sobre, las márgenes y, presentan modificaciones para mejorar el modelo linealizado. Kitanidis y Kennedy (1984) calculan la longitud de onda de meandro, L , cuya tasa de erosión lateral es máxima y obtienen

$$L = K \left(\frac{Rb}{f} \right)^{1/2},$$

resultado que coincide, en forma, con los de diversos investigadores anteriores y donde R es el radio hidráulico, b es el ancho y f es el factor de fricción de Darcy-Weisbach. En el modelo no se consideraron los efectos de la macrotopografía del fondo (la cual es fija respecto a la onda del meandro) ni el hecho de que la distribución vertical de la componente transversa de velocidad no sea lineal. Falcón (1984) indica que estos factores influyen en la magnitud de los desfases espaciales de diversas variables que caracterizan el flujo en meandros cuasirectos. Los autores presentan información sobre la tasa de erosión lateral de los meandros. Hasegawa (1989) también ha investigado la migración transversa de ellos y presenta correlaciones empíricas, que permiten una primera estimación de su movimiento, lo cual es de sumo interés para las obras de ingeniería ubicadas en la vecindad de ríos meandrosos.

El objeto del presente trabajo es verificar un análisis lineal desarrollado por Falcón (1979, 1984) del flujo y macrotopografía permanentes en cauces fluviales de fondo móvil debilmente meandrosos, utilizando el principio de la cantidad de movimiento angular sugerido por el Profesor John F. Kennedy (ver Zimmermann y Kennedy, 1978), y utilizado por Falcón y Kennedy (1983) para el caso de curvas fluviales con radio de curvatura constante. El análisis se verifica con datos de Gottlieb (1976) en canales ligeramente meandrosos de

fondo móvil y algunos escasos datos de fondo fijo. Para mayor corroboración se construyó en el Instituto de Mecánica de Fluidos de la Universidad Central de Venezuela un canal meandroso cuyo fondo, fijo, tenía pendiente transversal nula (Haddad y Mattiuzzo, 1985), y en el cual se llevaron a cabo experimentos para medir la distribución vertical de la componente transversa de velocidad, sobre varias estaciones a lo largo del eje longitudinal central del canal (Nori y Sucre, 1988).

II) Revisión Bibliográfica

En esta sección se revisan y/o critican algunos trabajos recientes relativos al flujo en meandros. Se mencionarán aspectos tales como la explicación teórica de la formación de los meandros y de su longitud de onda predominante; la solución que se propone para la distribución de velocidad secundaria; la macrobatimetría resultante del lecho; el efecto del sedimento suspendido y la estructura turbulenta del flujo.

Langbein y Leopold (1966) llevaron a cabo un programa de mediciones correspondientes a caudales que llenaban desde un 75% hasta 100% de la sección plena, en tramos meandrosos y rectos, cercanos entre si, y compararon la varianza de diversas variables. Llegaron a la conclusión de que la curva seno-generada (en la que el cambio de dirección del eje longitudinal del cauce varía sinusoidalmente con la longitud de arco recorrida, ver definición matemática en el capítulo V), es la forma preferida de la naturaleza y la que minimiza la varianza de, por ejemplo, el esfuerzo cortante sobre el lecho y el factor de fricción de Darcy-Weisbach, por lo cual postulan que esta curva es más estable que los tramos rectos en que se forman rápidos y pozos. Langbein y Leopold llegan a estas conclusiones en base a sus observaciones pero no discurren sobre los procesos que determinan la longitud de onda de los meandros.

Shen y Komura (1968) analizan la ecuación dinámica longitudinal, luego de transformarla a coordenadas sobre las isotacas y las perpendiculares respectivas. De ahí estudian las condiciones para que, cerca de la intersección del lecho con el talud de la margen, se

generen corrientes secundarias en el plano de la sección transversal de flujo. Concluyen que el flujo debe ser no permanente y no uniforme para que aparezcan las barras alternadas en un canal recto (los autores las llaman meandros). Encuentran que un talud muy rugoso facilita la formación de las barras alternadas. Los experimentos se llevaron a cabo en un canal de 2,5 pies de ancho y el sedimento fué un material plástico cuya gravedad específica fué de 1,054 con velocidad de caída de 0,108 ft/seg. No se presenta un análisis de estabilidad u otro enfoque para determinar la longitud de onda de las barras. Se tabulan datos que pueden ser útiles para futuras verificaciones.

Engelund y Skovgaard (1973) presentan un modelo analítico de flujo sobre un sistema de barras tridimensionales con paredes verticales: las barras se representan como el producto de una amplitud multiplicada por una variación sinusoidal longitudinal y por otra transversa. Indican que el modelo explica el origen de los meandros y de los casos de trenzamiento con dos o más subcauces presentes en el lecho. Su trabajo cae en el grupo de los enfoques del tipo **bar theory**. Se lleva a cabo un tratamiento tridimensional del flujo pero las soluciones propuestas para la distribución vertical de las tres componentes de velocidad son del tipo similar, lo cual le resta generalidad a los resultados, y además, las soluciones están en fase con la distribución de presión, vale decir, con la profundidad local, lo cual, como se verá en el desarrollo analítico subsecuente presentado aquí, no es correcto. La condición de contorno inferior para la velocidad utiliza el criterio de la velocidad de deslizamiento, introducido por Engelund (1974) para poder trabajar con un coeficiente de viscosidad de remolino constante. Esto no es realista, ya que la velocidad en dicho contorno debe ser nula. El trabajo presenta una explicación de sumo interés acerca del número de trenzas (subcanales) que se presentan en los cauces naturales: a cada longitud de onda transversa le corresponde una tasa de crecimiento de su amplitud (MaxA en la figura correspondiente); la que crece más rápidamente se supone predomina sobre las demás. La longitud de onda transversa, $\lambda_{tr} = 2\pi/k_2$. Considérese el valor k_*D tal que la ordenada tiene el mismo valor correspondiente a $2k_*D$, donde D es la profundidad del

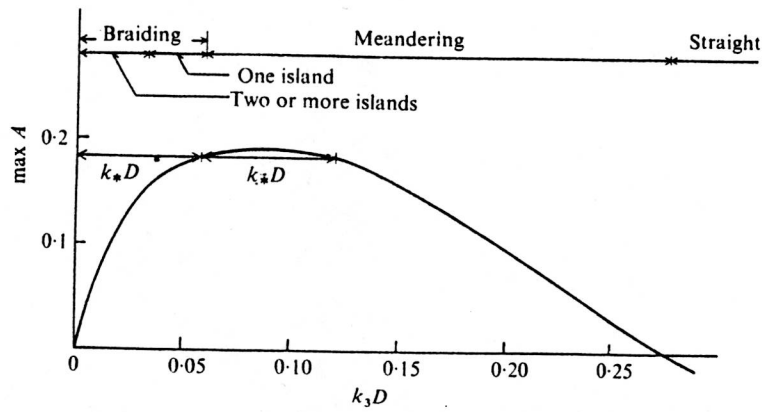


FIGURE 3. Variation in the maximum amplification factor with $k_3 D$. Parameter values as in figure 2.

flujo. En este caso la onda transversa cuya longitud es igual a dos veces el ancho del cauce (meandros incipientes del tipo barra alternada) o igual al ancho (sistema trenzado de islas centrales con dos subcauces laterales) crecen ambas a la misma tasa temporal. Ahora bien, si $k_2 > .k_*$ entonces siempre dominará la barra alternada. En cambio si $k_2 < .k_*$ entonces predomina el cauce trenzado porque tendría mayor tasa de crecimiento de su amplitud. Para valores de k_2 aún menores la máxima tasa de crecimiento corresponderá a cauces trezados de órdenes superiores (dos o más islas centrales y correspondientes subcauces). Dicho en otras palabras el río meandrará si su ancho es menor que un valor crítico B_* , mientras que un río más ancho tenderá a presentar mayor número de subcauces a medida que su ancho sea mayor.

Engelund (1974) presentó un análisis del flujo en meandros fuertes (aquellos en que la razón entre la amplitud en planta del cauce y la longitud de onda del meandro **no** es mucho menor que la unidad) y lo verificó con dos de cuatro experimentos de Hooke (1974). Una primera aproximación al perfil transverso del lecho fué obtenida a partir de la fórmula de Engelund para flujos en cauces curvos con radio de curvatura constante, la cual da una variación longitudinal del perfil transverso que está en fase con la curvatura en planta del cauce meandroso. Luego, una segunda aproximación al perfil transverso fué obtenida mediante perturbación linealizada de las ecuaciones dinámica longitudinal y de continuidad junto con un cálculo numérico de la ecuación de continuidad de sedimento. La solución, aunque aparentemente arrojó batimetrías muy concordantes con los experimentos, se considera deficiente: como se mostrará subsecuentemente, el análisis linealizado no es aplicable a los experimentos de Hooke porque los efectos dinámicos del flujo secundario (transverso) no son despreciables, y ellos introducen armónicos superiores no contemplados en el análisis de Engelund.

Gottlieb (1976), apoyándose en las ideas de Engelund, presentó un análisis para flujo sobre lechos rígidos o móviles en canales débilmente meandrosos y para el caso de arrastre de fondo predominante (ausencia de suspensión). Gottlieb verificó su análisis con dos

experimentos de fondo rígido y cuatro de fondo móvil. El grado de aproximación con que algunos resultados son reproducidos por la teoría es impresionante. Sin embargo, Engelund (1974) y Gottlieb utilizan una expresión potencial para el arrastre de fondo, que varía con una potencia p de la velocidad media longitudinal. Si los valores de arrastre medidos se grafican sobre papel log-log contra las velocidades medias correspondientes, para las corridas con fondo móvil de Hooke y Gottlieb, se encuentra que efectivamente la relación potencial propuesta es bastante realista. Ajustes por mínimos cuadrados dan $p = 6.15$ para los resultados de Hooke y $p = 6.02$ para los de Gottlieb (ver figura VI-2). A la luz de esto es cuestionable que Engelund usa un valor de $p = 4$ al aplicar su aproximación de segundo orden a los resultados de Hooke y Gottlieb utiliza un valor de $p = 5$ en sus cálculos. Otra objeción se refiere a la determinación de la velocidad longitudinal de resbalamiento (es una velocidad ficticia a nivel del lecho, diferente de cero, a objeto de trabajar con un coeficiente de viscosidad de remolino constante, lo cual implica que la distribución vertical de velocidad del flujo es parabólica). Esto requiere una estimación de la rugosidad de arena equivalente, k_e , como se indica en la ecuación 4.7 de Gottlieb. El autor indica que dicha rugosidad se calcula como 2.5 veces el diámetro de caída de las partículas de arena. Sin embargo, al calcular con los valores reportados de D_{50} como diámetros de caída, resultan valores de velocidad de resbalamiento que son considerablemente mayores que las velocidades medias de los cuatro experimentos de Gottlieb. Estas consideraciones sugieren que el modelo de Gottlieb requiere ser calibrado, ajustando algunas variables, y su carácter es menos predictivo de lo que pareciera ser.

Ikeda (1978) presenta una solución sobresimplificada perturbada para flujo en rios meandrosos. No toma en cuenta la variación longitudinal, periódica, de la pendiente transversa del lecho, lo cual se verá posteriormente que tiene influencia importante. Tampoco considera los efectos del transporte de sedimento ni la dinámica individual de las partículas sólidas en movimiento sobre el lecho.

Fredsoe (1978) resuelve las ecuaciones verticalmente integradas, aunque su ecuación

dinámica longitudinal es incompleta. Considera el efecto de la pendiente transversal del lecho lo cual permite determinar si hay meandros simples, trenzamiento, o si persiste un cauce recto. Otro punto importante es que considera el efecto por separado del arrastre de fondo y arrastre suspendido. Aún cuando plantea una ecuación tridimensional para calcular la distribución de concentración de sedimento suspendido, introduce un valor verticalmente integrado para el coeficiente de viscosidad de remolino, lo cual es inconsistente. Por otra parte la solución carece de desfase respecto a la deformación del fondo y además es impuesta como una solución similar en cuanto a su variación sobre la vertical se refiere. Se supone que un modelo para flujo sobre barras alternadas sirve para explicar el origen de los meandros, aunque en el modelo las márgenes son fijas e impermeables. Otros autores recientes que se comentan más adelante han modificado la perturbación inicial, en el sentido de dejar el fondo inicial plano (ausencia de barras alternadas), y suponer una perturbación sinusoidal de la proyección en planta de las márgenes.

Fredsoe no considera los desfases espaciales que deben existir entre la perturbación del fondo y las demás: las de la profundidad del flujo, las de las dos componentes horizontales de velocidad, y la del esfuerzo cortante transversal sobre el lecho. Señala los siguientes rangos de valores para la longitud de meandros: $L/B = 5$ (rios anchos) $D/B = O(0.01)$; $L/B=14$ (rios angostos) $D/B = O(0.05)$, donde L es la longitud de onda del meandro, B es el ancho del cauce y D es la profundidad media del cauce.

Hay que tener presente que se calibra un modelo de barras alternadas con datos de meandros reales, los cuales dependen (posteriormente se ha investigado) de la erodibilidad de las márgenes y de la variación radial de la velocidad media longitudinal (dV/dr), esta última no considerada en el modelo de Fredsoe.

Ikeda, Parker y Sawai (1981) tratan de explicar por primera vez la formación de meandros a partir de una perturbación de la proyección en planta de las márgenes, permitiendo que éstas sean erosionables. Sin embargo es justo reconocer que la idea proviene de Ikeda, Hino y Kikkawa (1976). Anteriormente se intentaba explicar la aparición de meandros con

un modelo de barras alternadas en un cauce con márgenes rectas y no erosionables. En su trabajo Ikeda, Parker y Sawai expresan el esfuerzo cortante transverso a nivel del lecho como $\tau_n = \rho C_f \bar{U} \bar{V}$, donde ρ es la densidad del fluido, C_f es un factor de fricción, \bar{U} es la componente longitudinal media y \bar{V} es la componente transversa media. Este tipo de relación para τ_n es cuestionable teóricamente y solo ha sido verificada para flujos unidireccionales (Falcón, 1983,1984). Suponen, como ocurre para el caso de curvatura constante y flujo completamente desarrollado, siguiendo a Engelund (1974), que hasta $O(\nu)$, donde ν es un parámetro de perturbación igual a b/r_o , (b es el ancho del canal y r_o es el radio de curvatura del canal), que el perfil transversal del lecho está en fase con la curvatura. Esto es cuestionable como lo demuestran los desfases grandes, entre curvatura y batimetría del lecho, para los experimentos de Gottlieb (1976) e Ikeda y Nishimura (1985), y es dudoso que el error se pueda corregir con los términos siguientes de orden superior de un análisis de perturbaciones. Sin embargo, Falcón (1979, 1984) demuestra que en flujos de tamaño natural la batimetría y la curvatura en planta del cauce si tienden a estar en fase, mientras que en flujos de menor tamaño (típicos de laboratorio) los desfases son muy apreciables. Esto se debe a que las relaciones de profundidad a longitud de meandro y de profundidad a radio de curvatura en planta, en modelos de laboratorio, son mucho mayores que en prototipos, exagerándose así la influencia del flujo secundario y de las tasas de cambio longitudinales en los experimentos de pequeño tamaño, por lo cual, en ellos se exageran los desfases antes mencionados. Estas consideraciones son importantes al diseñar estudios en modelos hidráulicos.

En el resultado obtenido por diversos autores

$$\frac{d}{d_c} = \left(\frac{r}{r_c} \right)^A,$$

la magnitud de A es tomada en promedio como 2.89, lo cual parece muy bajo. Falcón (1979) encontró valores de campo del orden de 30 para el caso de cauce ancho con radio de curvatura constante.

El meandro incipiente de máxima inestabilidad lateral (el que se desarrolla más rápidamente y domina sobre los demás) se obtiene maximizando la tasa de crecimiento de la amplitud en planta (por erosión de las márgenes) respecto a la longitud de onda. El modelo se basa en que la tasa de erosión de las márgenes es proporcional a la velocidad longitudinal cerca de la margen. Esta cantidad está ligada al desfase del perfil transversal del lecho respecto a la curvatura, la cual, por estar ignorada, podría introducir errores en los resultados. Da la impresión que hubiera compensación de errores al calibrar constantes y usar el concepto de descarga dominante, o, de sección plena.

Finalmente, Ikeda, Parker y Sawai sugieren que ambas teorías, de barras y de curvatura de las márgenes conllevan aproximadamente a la misma longitud de onda.

Kitanidis y Kennedy (1984) calculan la variación de la velocidad secundaria (distribución lineal con valor medio nulo) a lo largo de un flujo sinuoso, utilizando la ecuación de cantidad de movimiento angular para un volumen de control a todo lo ancho del cauce. El tratamiento es sencillo y es un paso previo para luego conectar el resultado con un modelo de amplificación y migración de meandros a objeto de predecir su longitud de onda inicial. No se considera el efecto de la pendiente transversal del lecho y no se calcula la pendiente transversal de la componente longitudinal de velocidad. Tampoco se considera la existencia de la velocidad media transversa. Por ser un análisis muy simplificado y muy orientado al cálculo de la geometría del meandro no incide mucho en la verificación objeto del presente trabajo.

Tamai e Ikeuchi (1985) enfatizan el estudio de la distribución tridimensional de la componente longitudinal de la velocidad en un canal sinuoso y le dan poca importancia al flujo secundario. Destacan el efecto de la pendiente transversal del lecho sobre la velocidad calculada. Suponen que la dirección del esfuerzo cortante transversal a nivel del lecho es la misma que la de la velocidad transversa media (verticalmente integrada), y estiman, en base a un análisis de orden de magnitud, que el término de esfuerzo cortante transversal a nivel del lecho es despreciable hasta la perturbación de segundo orden inclusive.

Concluyen que para pendiente transversa nula del lecho la máxima velocidad ocurre cerca de la margen interna, mientras que si hay fondo móvil, con la consecuente erosión y profundización del lecho cerca de la margen externa, entonces la máxima velocidad ocurre cerca de dicha margen exterior.

La crítica principal es que al despreciar el flujo secundario, particularmente el que ocurre en ascenso (descenso) cerca de la margen interna (externa), están despreciando el mecanismo físico que hace que la velocidad máxima cambie de la vecindad de la margen interna hacia la de la margen externa. El flujo ascendente secundario actúa como un freno al transportar momentum longitudinal bajo hacia las capas superiores del flujo, mientras que el flujo descendente secundario hace lo contrario cerca de la margen externa.

Tamai e Ikeuchi (1985) resuelven las ecuaciones clásicas tridimensionales para flujo en un meandro seno-generado incluyendo un modelo modificado de Boussinesq para la turbulencia (el coeficiente de viscosidad de remolino es parabólico en la mitad inferior del flujo y constante en la porción superior). Utilizan el método de residuos ponderados con funciones trigonométricas y polinomios de Legendre para resolver las ecuaciones perturbadas y linealizadas. Al aplicar la teoría a los experimentos de Yen (1965) y a los suyos se observan discrepancias importantes, especialmente en el cálculo de las velocidades transversas si el canal es relativamente estrecho.

Tamai y Mohamed (1985) se basan en el trabajo anterior de Tamai e Ikeuchi y aplican los resultados a un experimento de Hooke (1974, run 35), para reproducir batimetría y esfuerzo cortante, comparando con sus resultados teóricos de primer y segundo orden. La predicción batimétrica es de orden de magnitud correcta, pero se observa que está casi en fase con la curvatura del canal. Esto se debe a que utiliza la solución cuasi-uniforme como primera aproximación para la batimetría. Destaca que la perturbación de segundo orden no parece ser muy importante. Esta teoría no sería aplicable a los experimentos de Gottlieb (1976) porque no contempla mayor desfase entre curvatura del cauce y batimetría. Los experimentos de Hooke se adaptan a la teoría presentada porque son meandros fuertes y

el desfase arriba mencionado es pequeño.

Ikeda y Nishimura (1985) aplican la solución para curvatura constante con flujo completamente desarrollado (en lo que se refiere a las ecuaciones verticalmente integradas) al caso de flujo sinuoso. Imponen una solución similar para la parte rotacional de la componente de velocidad secundaria (la diferencia entre su magnitud total y su valor medio verticalmente integrado). La solución batimétrica para flujo desarrollado es impuesta al caso sinuoso como una primera aproximación. La ecuación (51) de conservación de volumen de sedimento depositado es incorrecta, sobre todo si B/R no es despreciable. Según los resultados de un ensayo con fondo móvil mostrado en esquemas, concluyen que la influencia del sedimento suspendido no es muy grande.

Blondeaux y Seminara (1985) presentan un estudio comparativo entre la longitud de onda de barras alternadas (sobre el lecho de una canal de márgenes rectas) cuya amplitud crece a la máxima tasa respecto al tiempo, y la longitud de onda de un canal cuya proyección en planta es inicialmente sinuosa, tal que su tasa de erosión lateral es también máxima respecto al tiempo. Concluyen que el mecanismo que produce los meandros es el segundo, es decir, el de erosión de márgenes y las longitudes de onda correspondientes son mayores que las generadas por la aparición de barras alternadas. Además, encuentran que pueden existir barras alternadas estacionarias (no se propagan longitudinalmente) que no crecen cuyas longitudes coinciden con las barras fijas (ancladas) correspondiente a los meandros de pequeña amplitud lateral. Blondeaux y Seminara corroboran su teoría con numerosa evidencia experimental a nivel de laboratorio. La evidencia de campo es más difícil para una verificación debido a la variabilidad del flujo en el tiempo, lo que no se contempla en los modelos pseudopermanentes del fenómeno. El modelo no contempla los diversos desfases existentes entre las diversas variables hidráulicas, tales como la pendiente transversa de la superficie libre y del fondo del lecho, la intensidad de la corriente transversa, la variación transversa de la componente longitudinal media de la velocidad, los cuales se comentarán en el desarrollo teórico del presente trabajo.

Tamai e Ikeya(1986) hacen experimentos en un canal meandroso con las siguientes condiciones: $w=20^\circ$, $M=160$ cms., $d=5.2$ cms., $S_o = 10^{-3}$, y $Q = 3$ lts/seg. con barras alternadas fijas y miden las tres componentes de velocidad y los esfuerzos de Reynolds. Reproducen los resultados aceptablemente con un modelo $k-\epsilon$ de turbulencia. Indican limitaciones si el ancho es del orden de la profundidad del flujo.

Odgaard (1986) presenta un trabajo en dos partes (análisis y verificación) para predecir las características del flujo y del lecho en un cauce meandroso. Al proponer que el modelo es para sedimento uniforme no especifica cual diámetro de la granulometría (en casos reales) debe usarse. Considera que la turbulencia es isotrópica, lo cual es incierto, especialmente cerca del lecho, donde precisamente ocurren los fenómenos físicos que determinan la pendiente transversal del lecho. Supone que la distribución vertical de la componente transversa de velocidad es lineal (ver su ecuación 4). Falcón (1979) no pudo explicar los grandes desfases entre profundidad y curvatura del cauce, de los experimentos de Gottlieb imponiendo una distribución de velocidad lineal; tuvo que calcularla. Posiblemente para casos reales (condiciones de campo) en que el desfase arriba mencionado es pequeño, la distribución lineal de velocidades sea útil. El uso de la ley de la potencia (ecuación 3) junto con una distribución parabólica para E , el coeficiente de viscosidad de remolino, es obviamente inconsistente. Pareciera aún más inconsistente obtener la ecuación 6, evaluando la ecuación dinámica radial (ecuación 2) en un punto sobre la superficie libre, haciendo que la ecuación diferencial obtenida para la velocidad superficial transversa, v'_s , dependa de la imposición de que la pendiente dV/dz en la superficie libre sea igual a la de cualquier punto a lo largo de la profundidad. Esta hipótesis tan cuestionable mezclada con la inconsistencia entre las leyes logarítmica y de la potencia engendran dudas acerca de la certeza de los cálculos. La forma verticalmente integrada del principio de la conservación del sedimento tiene que cumplirse para el caso tratado y no es aplicada, como debería ser para el caso de flujo no uniforme presentado. Si el flujo tiende a ser completamente desarrollado (caso de una curva muy larga con curvatura constante) la expresión para la

conservación de sedimento se reduce al balance de fuerzas en el plano transversal, sobre una partícula de sedimento, paralelas al lecho, presentadas por Odgaard en su ecuación 18. Esto le da a su solución un carácter cuasi-completamente desarrollada, que no se puede garantizar sea adecuada. La teoría presentada por Odgaard no es aplicable a los experimentos de Gottlieb (1976) porque en ellos, y debido a las aceleraciones convectivas del flujo, se presentan grandes desfases entre el perfil transversal del fondo y la curvatura en planta del cauce meandroso. Por otra parte tampoco es aplicable a los experimentos de Hooke (1974) porque en estos la resistencia inercial contra el flujo primario, debida al flujo secundario, es muy grande y no fué tomada en cuenta por Odgaard. Por estas razones, presumiblemente, su teoría no fué verificada con los experimentos arriba mencionados.

Dado que según Nunner $n=1/\sqrt{f}$ (para $f<0.1$) y en su trabajo se utiliza un $f=0.19>0.1$, la sensibilidad de los resultados al valor de n debería ser investigada.

El balance de fuerzas sobre una partícula del lecho, presentada por Odgaard merece especial atención. Parecería cuestionable la hipótesis (y por lo tanto su uso) de Engelund y Fredsoe (1976), en la cual sin considerarse el carácter probabilístico del esfuerzo cortante sobre el lecho, se supone que el esfuerzo sobre las partículas inmóviles del lecho es el crítico (movimiento incipiente), τ_{cr} , mientras que la diferencia con el esfuerzo cortante total, $\tau - \tau_{cr}$, lo absorben las partículas en movimiento. Observando su figura 4(a) esto parecería cuestionable porque en el plano promedio que pasa por las partículas inmóviles, sobre el cual actúa τ_{cr} , no puede equilibrarse la componente longitudinal de peso de fluido correspondiente. El concepto de fondo inmóvil de Odgaard parecería incorrecto: el fondo se mantiene cuando la erosión de partículas es igual a la deposición.

Si en su ecuación 19 supone que τ_{cr} actúa en la dirección longitudinal, cómo puede tener una componente radial, $\tau_{cr,r}$? La ecuación 18 es inconsistente con lo expresado: "la componente transversa de peso sumergido, de una partícula de sedimento, tangencial al lecho, es balanceada por el arrastre del fluido", porque $\tau_{cr,r}$ no representa el arrastre del fluido. La misma ecuación al ser aplicada a partículas inmóviles está incompleta ya que

no incluye la componente de peso sumergido normal al talud ni el ángulo de fricción de la arena. La forma de la ecuación está, más bien, tomada de los análisis para partículas en movimiento (que para el caso de flujo completamente desarrollado se supone que, en promedio, describen un arco de círculo de radio constante).

De ser más extensamente validada, la solución sería valiosa porque es sencilla y puede ser aplicada a lo largo de tramos sucesivos.

Colombini, Seminara y Tubino (1987) llevan a cabo un estudio teórico no lineal para predecir la altura de equilibrio de barras alternadas. Para ello aplican la técnica de múltiples escalas. Concluyen que el efecto no lineal no altera significativamente la longitud de onda obtenida por Blondeaux y Seminara mediante un análisis lineal y deducen expresiones separadas para la máxima socavación y deposición de las barras, cuya suma es la altura total de las barras. Recomiendan mejorar el modelo de flujo ya que no puede representar el fenómeno de separación del flujo sobre las crestas empinadas de las barras. También sugieren indagar acerca del efecto de la variabilidad granulométrica, del efecto de la suspensión del sedimento y de la fricción variable al coexistir dunas sobre las barras.

Johannesson y Parker (1989) formulan un modelo de flujo de superficie libre en curvas de curvatura constante o sinusoidalmente variable, pero del tipo cuasi-recto para el que un análisis linealizado del flujo es válido. El fondo del canal se considera fijo. Enfatizan sobre la existencia del desfase entre la curvatura del canal y la velocidad secundaria y logran calcularlo analíticamente, encontrando que varía con la altura sobre el lecho. La solución analítica es posible porque se ha supuesto que el coeficiente de viscosidad de remolino es constante sobre la vertical y, como consecuencia, se requiere una componente de velocidad longitudinal finita (slip velocity introducida por Engelund) al nivel del lecho. Subsecuente-mente en los comentarios a la verificación con los experimentos de Gottlieb, se expondrán algunas críticas al uso del criterio de la velocidad de deslizamiento de Engelund. Estos autores encuentran que el desfase arriba citado puede ser significativo en algunos modelos de laboratorio, pero que a medida que crece el sistema aproximándose a cauces naturales el

desfasaje tiende a desaparecer, es decir que la componente de velocidad transversa tiende a estar en fase con la curvatura local del canal. Este resultado fué también encontrado por Falcón (1979).

Ikeda y Parker (1989) coordinaron un esfuerzo norteamericano-japonés con participación europea cuyo resultado fué una publicación fundamental titulada "River Meandering". Incluye resultados de investigaciones de campo y analíticas. Se describen las mediciones en sitio para evaluar la importancia de los términos inerciales y los efectos granulométricos; se presentan modelos numéricos para calcular los flujos en cauces curvos naturales; estudios de la tasa de erosión lateral y de migración longitudinal del patrón de meandros; se comentan los más recientes desarrollos analíticos, no lineales, sobre estudios de estabilidad y resonancia en la formación de barras alternadas y meandros incipientes y su inter-relación.

Tubino y Seminara (1990) estudian la coexistencia de barras alternadas libres (en el sentido de que pueden propagarse irrestrictamente) junto con las barras fijas inducidas por la sinuosidad en planta de un canal. Se trata de un análisis de perturbaciones, no lineal, en el que se aplica el método de escalas múltiples, lo cual permite calcular la amplitud final de las barras. Adicionalmente se encuentra el grado de curvatura del cauce necesario para que las barras libres sean suprimidas, pudiendo éstas reaparecer cuando la curvatura aumenta aún más. Sugieren la conveniencia de poder diseñar canales meandrosos en el régimen en el cual las barras alternadas libres son suprimidas, ya que son más estables y se pueden diseñar protecciones locales fijas.

García y Niño (1993) llevaron a cabo un programa experimental para verificar los resultados teóricos recientes en cuanto a barras alternadas (canales rectos) y barras forzadas (canales meandrosos) se refiere, particularmente sobre predicciones de altura, longitud de onda y celeridad de las barras. En general encuentran buena concordancia con los trabajos de Seminara, Colombini y Tubino, aunque hay algunas discrepancias: la longitud de onda real crece algo más cuando la altura de las barras alternadas deja de ser tratable

como de pequeña amplitud y, por lo tanto se extiende el análisis con los términos no lineales. Practican un análisis de Fourier bidimensional a la batimetría del lecho, luego de formadas las barras alternadas, y encuentran que las componentes preponderantes son las que corresponden a una longitud de onda en el sentido longitudinal y media longitud de onda en el sentido transversal (la deformación clásica que se introduce para efectuar el análisis de perturbación lineal) y también una componente longitudinalmente plana con una longitud de onda transversa igual al ancho del canal. En cuanto a la supresión de las barras alternadas en canales sinuosos se encontró que esto ocurre para curvaturas menores a la teórica, pero que se podía corregir el resultado teórico razonablemente. Se comenta que Tubino y Seminara (1990) no consideran el efecto que tiene la curvatura de un canal meandroso sobre la longitud que adoptan las barras alternadas, es decir, que en su estudio de la interacción entre ambos tipos de barras, se tomaron resultados del estudio de barras alternadas (libres) en canales rectos sin investigar analíticamente el efecto de la curvatura. Finalmente indican que las formulaciones de cierre del sistema de ecuaciones: ley de fricción (fondo plano o dunas) y la certeza de la ley de transporte sólido influyen significativamente en la certitud de los resultados.

Schielen, Doelman and Swart (1993) efectúan un análisis no lineal de la dinámica de barras alternadas, denominado "débil", en el sentido que se apartan poco de la condición crítica arrojada por el análisis previo de tipo lineal. Aquí crítico se refiere a la condición de máxima tasa de crecimiento de la amplitud dada por el análisis lineal. El trabajo explica la evolución espacio-temporal de la envolvente de amplitudes de las barras e incluye el análisis de Colombini et al (1987) como un caso particular. Además supone un lecho cubierto de dunas y encuentra su efecto desestabilizador en contraposición al estudio de Colombini. Se indica que un canal de laboratorio debe tener una longitud de más de 65 veces el ancho para que se observe la envolvente de amplitudes en su mínima extensión.

Yeh y Kennedy (1993) desarrollan un modelo matemático en el cual incorporan, adicionalmente a los tratamientos usuales, las ecuaciones correspondientes a dos de las com-

ponentes del principio de la cantidad angular de movimiento: las componentes alrededor de los ejes radial y longitudinal, respectivamente. Esto permite calcular la variación tridimensional de la componente longitudinal de velocidad y la variación longitudinal de la componente transversa media del flujo. El modelo es verificado con flujos experimentales en canales de superficie libre que entran desde un tramo recto a uno de curvatura constante (circular), y vuelven a salir a otro tramo recto, para casos de fondo fijo y móvil. El uso de las ecuaciones de momentum angular permite una descripción física sencilla e ilustrativa, y también descarta, hasta cierto punto, la dependencia de los resultados sobre la bondad de algún modelo turbulento, los cuales requieren calibraciones particulares para cada caso, sobre todo en presencia de sedimento. Presuponiendo la forma de las distribuciones verticales de la componente rotacional transversa, y, de la componente vertical de velocidad, el modelo, calibrado, arroja comparaciones teórico-experimentales muy adecuadas.

A continuación se desarrolla la formulación de la ecuación de la cantidad angular de movimiento, tal como se usará en el presente trabajo aplicado a flujo en meandros incipientes de fondo fijo o móvil.

III) El Principio del Momentum Angular (Cantidad Angular de Movimiento) aplicado a Flujos con Superficie Libre y Cauces con Curvatura en Planta.

La forma permanente de la ecuación del momento del momentum, para un sistema fluido contenido en un volumen de control fijo, en un sistema de referencia inercial es

$$\bar{T} = \int_{S.C.} (\bar{r}x\bar{V})\rho(\bar{V}.d\bar{A}),$$

donde el vector \bar{T} es el torque de las fuerzas que actúan sobre el fluido coincidente con la superficie de control (S.C.) y de las fuerzas másicas contenidas en dicho volumen de control, y se calcula alrededor del origen del vector de posición \bar{r} . El vector velocidad es \bar{V} , y $d\bar{A}$ es un vector con magnitud igual al área de un elemento diferencial de la superficie

de control y se orienta en el mismo sentido de la normal exterior local. La cantidad $\rho(\bar{V} \cdot d\bar{A})$ representa flujo de masa a través del área diferencial superficial de magnitud dA , y $\bar{r}x\bar{V}$ es el correspondiente momento del momentum por unidad de masa. Por lo tanto, la integración indicada sobre la superficie de control representa el momento del flujo neto de momentum a través de la superficie del volumen de control y es igual al torque antes mencionado. La derivación de esta ecuación se presenta en Shames (1962) y el caso general para volúmenes de control deformables en sistemas de referencia no inerciales es presentado por Hansen (1967).

Considérese el volumen de control indicado en la figura III.1. El sistema de coordenadas correspondiente es curvilíneo, pero tal que localmente sea similar a un sistema cilíndrico. La altura del volumen de control es d y su base mide Δr y $r\Delta\theta$. A continuación se aplica la componente longitudinal de la ecuación del momento del momentum alrededor de la tangente al elemento curvilíneo I'H', con la dirección de las agujas del reloj considerada positiva. Para el tipo de flujos considerados aquí y de acuerdo con el análisis de orden de magnitud de las ecuaciones dinámicas solo los momentos debidos a los flujos de momentum, gradientes radiales de presión, fuerza centrífuga, y esfuerzos cortantes verticales, τ_{rz} actuantes sobre las caras laterales ($r = \text{constante}$) del elemento de fluido serán incluidas. Los momentos de las fuerzas de presión son:

a) cara ABB'A':

$$\int_h^{H + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\Delta r}{2}} \left(p + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\Delta r}{2} \right) \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) d\theta (z - h) dz,$$

b) cara DCC'D':

$$- \int_h^{H - \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\Delta r}{2}} \left(p - \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\Delta r}{2} \right) \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) d\theta (z - h) dz,$$

c) cara ADD'A':

$$-\frac{d\theta}{2} \int_h^{H + \frac{\partial H}{\partial s} \frac{\Delta s}{2}} (p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\Delta s}{2}) dr (z - h) dz,$$

y

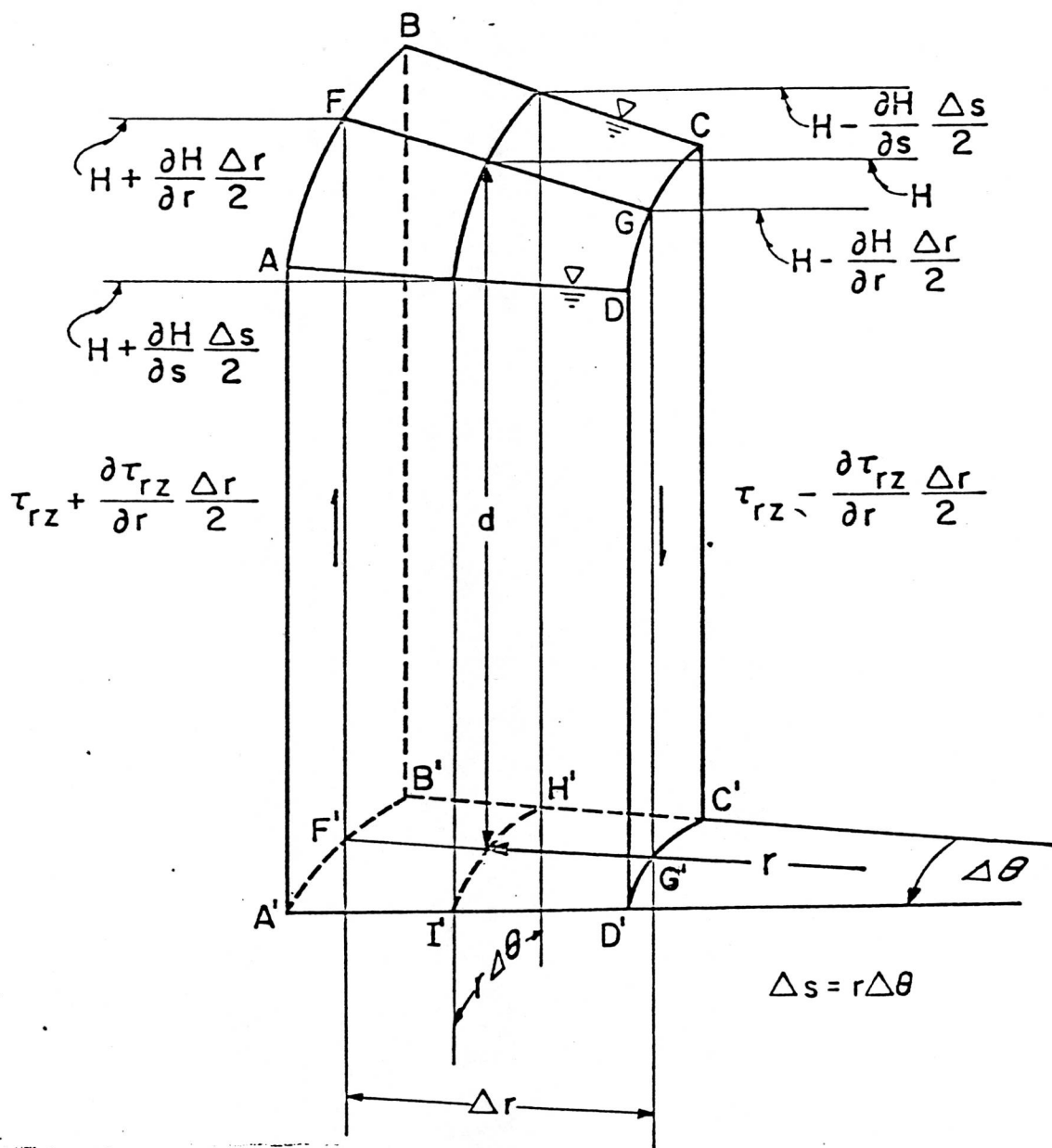


FIGURA III-1

d) cara BCC'B':

$$-\frac{d\theta}{2} \int_h^{H - \frac{\partial H}{\partial s} \frac{\Delta s}{2}} \left(p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\Delta s}{2} \right) dr (z - h) dz.$$

Al sumar las cuatro cantidades arriba indicadas y luego de alguna simplificación se obtiene el momento neto de las fuerzas de presión:

$$M_p = r \Delta \theta \Delta r \int_h^H \frac{\partial p}{\partial r} (z - h) dz.$$

Los momentos generados por las presiones sobre la base A'B'C'D' del volumen de control son de orden superior por lo cual no intervienen en el resultado.

Hasta $O(r \Delta \theta \Delta r)$ el momento de las fuerzas centrífugas es

$$M_c = -\rho \int_h^H \frac{v^2}{r} (r \Delta \theta \Delta r) (z - h) dz,$$

y el momento de los esfuerzos de corte verticales sobre las caras ABB'A' y DCC'D' es

$$M_{corte} = \int_h^H \tau_{rz} r \Delta \theta \Delta r dz.$$

El momento del flujo de momentum radial neto a través de las caras BCC'B' y ADD'A' es

$$\frac{-\partial}{\partial s} \left[\int_h^H \rho u v (z - h) dz \right] r \Delta \theta \Delta r$$

y a través de las caras ABB'A' y DCC'D' es

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \int_h^H \rho u^2 (z - h) dz \right] r \Delta \theta \Delta r.$$

El momento del flujo neto de momentum vertical a través de las caras ABB'A' y DCC'D' es

$$\int_h^H \rho u w dz r \Delta \theta \Delta r.$$

Al igualar la suma de los torques de las fuerzas de presión, de la fuerza centrífuga y de los esfuerzos de corte verticales al flujo neto del momento de la cantidad de movimiento que sale del volumen de control, y al expresar el resultado en términos de η junto con alguna simplificación, resulta

$$d^2 \int_0^1 \frac{\partial p}{\partial r} \eta d\eta - d^2 \int_0^1 \rho \frac{v^2}{r} \eta d\eta + d \int_0^1 \tau_{rz} d\eta = -\frac{\partial}{\partial s} \left[d^2 \int_0^1 \rho u v \eta d\eta \right] -$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r d^2 \int_0^1 \rho u^2 \eta d\eta \right] + d \int_0^1 \rho u w d\eta.$$

En base al análisis de orden de magnitud de Yen (1965), apoyado sobre sus resultados experimentales, Falcón & Kennedy (1983) encuentran que solo son significativos los primeros dos términos del miembro izquierdo de la ecuación de momentos arriba expresada, y del miembro derecho solo el primer término es importante en cauces meandrosos con flujos subcríticos en los que se puede suponer una distribución de presión hidrostática sobre la vertical. Para el caso de flujo "uniforme", completamente desarrollado, en cauces con radio de curvatura en planta constante, el término del miembro derecho es nulo y la pendiente transversa de la superficie libre se deduce de un balance entre el momento centrífugo y el momento de las fuerzas de presión hidrostáticas. Cabe destacar que la ecuación de momentum angular aquí derivada y simplificada corresponde a una sola de sus tres componentes ortogonales y se restringe a su forma permanente respecto al tiempo.

IV) Descripción Física del Flujo en Meandros

A objeto de facilitar la interpretación de los resultados subsiguientes es conveniente presentar una descripción de la estructura del flujo permanente en canales meandrosos. El

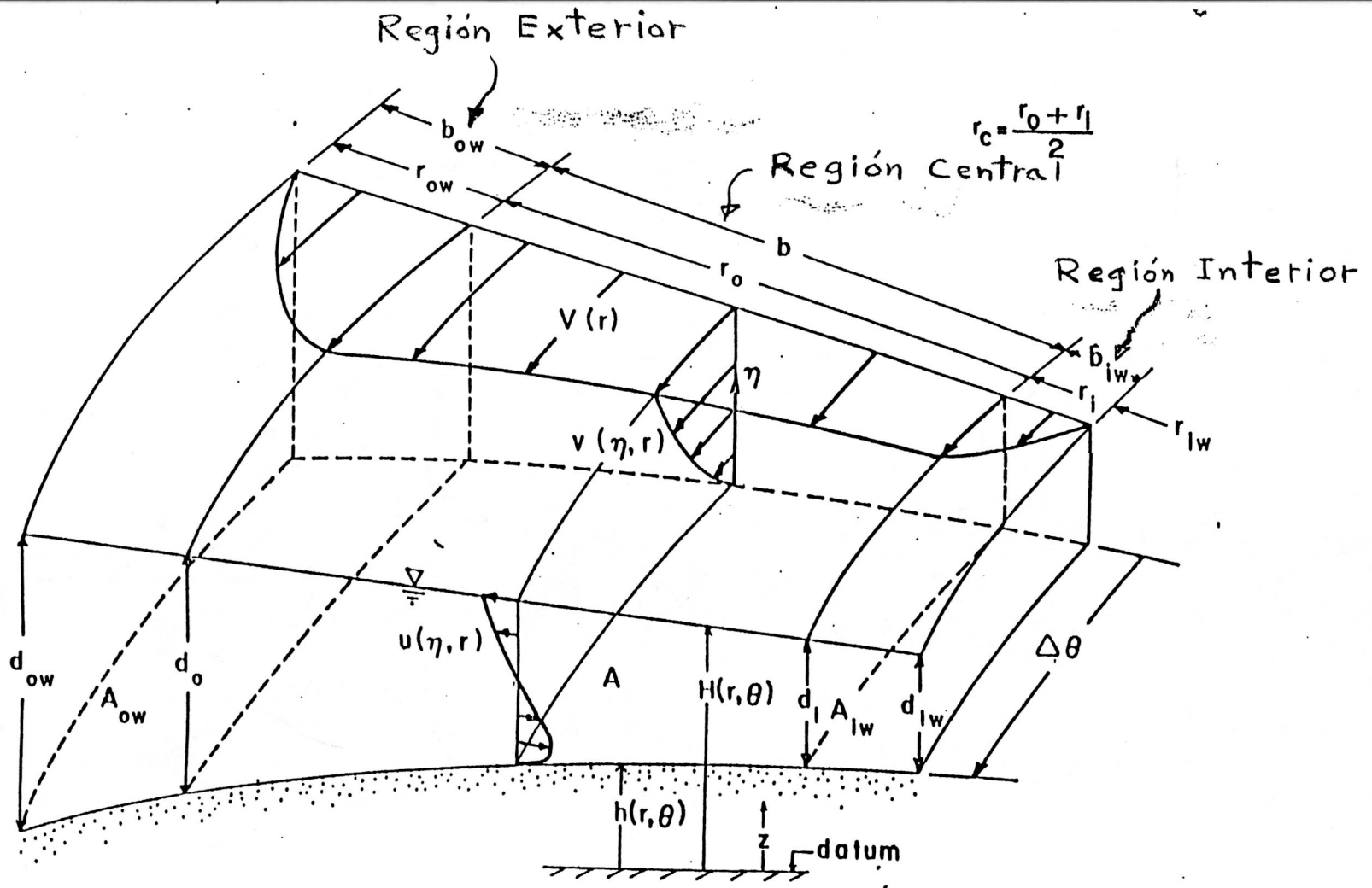


FIGURA IV-1

Además, debido a que el esfuerzo cortante radial sobre el lecho y las tasas de transporte de sedimento radial y longitudinal varían periódicamente a lo largo del cauce, la pendiente transversal del lecho también varía periódicamente.

Por causa de la inercia del fluido, representada primordialmente por el término $\rho v \delta u / \delta s$, la distribución de la componente de velocidad u no responde instantáneamente a las variaciones de la fuerza centrífuga, sino que existen desfasajes espaciales (longitudinales) entre el eje curvilíneo del canal meandroso y la distribuciones longitudinales de la componente u , del esfuerzo cortante transverso sobre el lecho y de las pendientes radiales de la superficie libre y del lecho. Estos desfasajes aumentan a medida que la magnitud del término inercial, $\rho v \delta u / \delta s$, aumenta en relación al término de fricción $\delta \tau_{zr} / \delta z$.

Se puede visualizar el flujo en meandros, adicionalmente, al examinarlo en términos de los momentos que actúan sobre el volumen de control de fluido ilustrado en la figura IV-1, siguiendo el análisis de Zimmermann & Kennedy (1978). El gradiente vertical de v y la curvatura del flujo y del canal producen un torque centrífugo alrededor de un eje longitudinal situado, digamos, al centro de gravedad del fluido dentro del volumen de control. Esto conlleva a un balance del torque centrífugo arriba mencionado, del torque del esfuerzo cortante radial del lecho y del momento del eflujo neto de cantidad de movimiento desde el volumen de control (el cual está relacionado al término $\rho v \delta u / \delta s$ en la ecuación dinámica). Estos se designarán como torques actuante, de fricción, e inercial, respectivamente y todos tienen que variar periódicamente a lo largo del canal. En términos de la ecuación de momento angular, el flujo en un canal meandroso es análogo, aproximadamente, a un sistema lineal vibrante: masa forzada con fricción. Mediante esta analogía de nuevo se concluye que si el torque de fricción constituye el balance principal al torque actuante (centrífugo), el desfasaje de la componente de velocidad u será pequeño, mientras que si el balance principal es entre los torques actuante e inercial, los diversos desfasajes podrían ser grandes. Este razonamiento conlleva a la existencia de desfasajes espaciales para las diversas variables geométricas, cinemáticas y dinámicas que caracterizan el flujo

en meandros, y que serán calculados subsecuentemente.

V) ANALISIS DEL FLUJO EN MEANDROS INCIPIENTES

Los **cauces** débilmente meandrosos fueron definidos en la INTRODUCCION desde un punto de vista geométrico, tales que su eje longitudinal central (ver figura V.1) puede ser descrito mediante una curva seno-generada con $w \ll 1$. Un **flujo** débilmente meandroso es aquel que exhibe desfases significativos entre la onda del eje del canal y las variables del flujo secundario, como fué discutido en el capítulo anterior. Este flujo no necesariamente tiene que ocurrir en un cauce débilmente meandroso porque los desfases dependen de ambas características: del flujo y de la geometría del cauce. Similarmente, pueden ocurrir **flujos** fuertemente meandrosos (caracterizados por pequeños desfases) en **cauces** débilmente meandrosos.

En este capítulo la ecuación de Cantidad de Movimiento Angular será utilizada para la derivación de un modelo analítico linealizado, aplicable a lo largo del eje central longitudinal del cauce, para flujos débilmente meandrosos. La linealización de las ecuaciones que rigen requiere que la razón ancho del canal, B , al radio mínimo de curvatura en planta del cauce, r_{min} , sea mucho menor que la unidad. Debido a la tipicidad de valores, esto generalmente solo se cumple para cauces débilmente meandrosos. Por otra parte, la linealización de la ecuación dinámica longitudinal exige que la resistencia inercial, debida al flujo transversal, sea despreciable en comparación con las fuerzas desviatorias respecto al balance principal (ver Falcón, 1979), las cuales surgen de la no uniformidad longitudinal del flujo.

En la figura V.1 se presenta un esquema en planta de un canal meandroso con paredes verticales rígidas. El ancho del canal es constante y la mayor parte de la notación utilizada ha sido definida en el capítulo I. Las coordenadas curvilíneas m y $s=s_c$ están en un plano horizontal (perpendicular a la dirección de la gravedad) y el eje z es positivo en el sentido contrario a la gravedad. Los sentidos positivos de m y $s = s_c$ se muestran sobre la figura

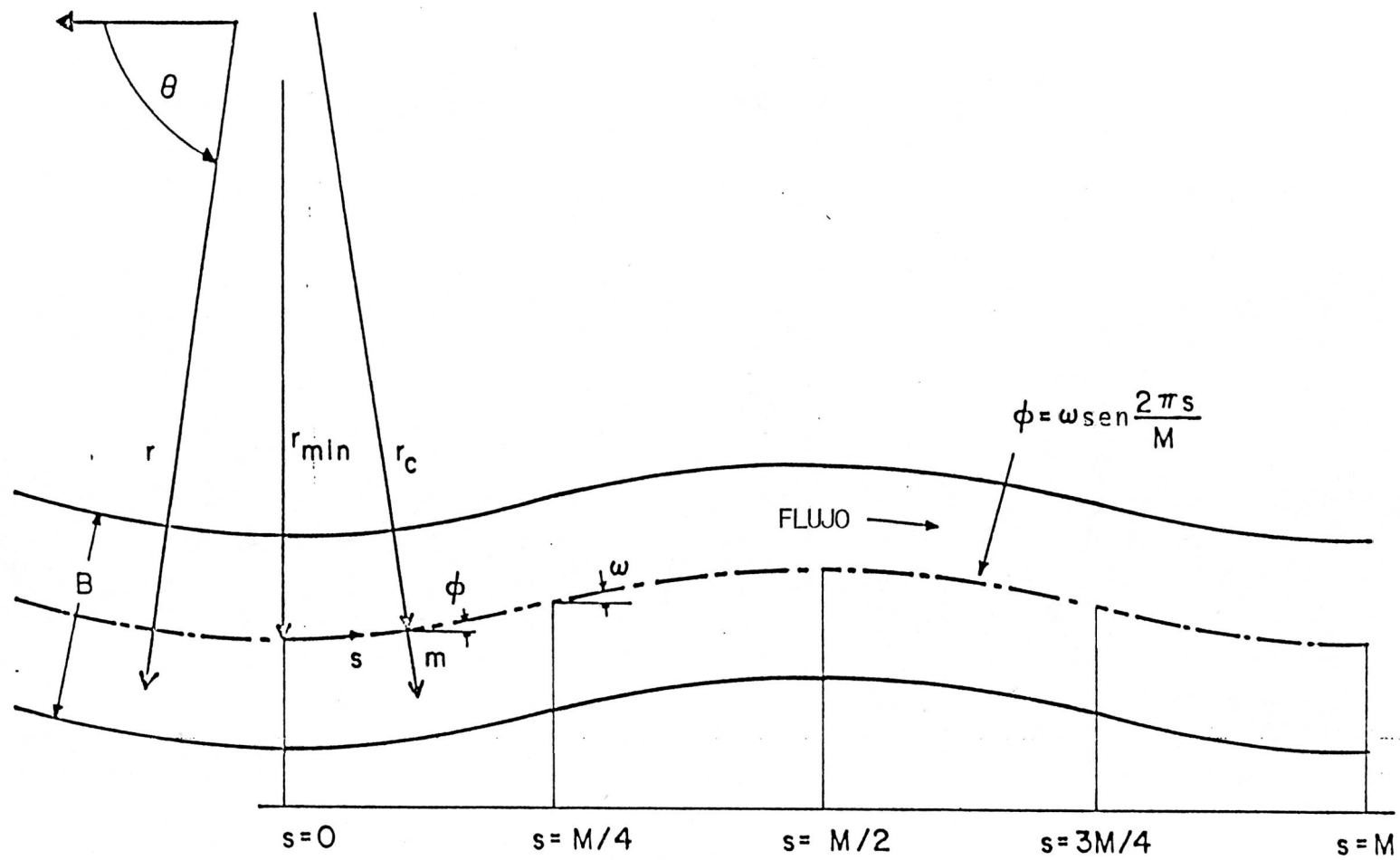


FIGURA V-I, ESQUEMA QUE DEFINE UN CANAL MEANDROSO

y fueron escogidos para que el sistema de coordenadas curvilíneas m, s y z cumpla con la ley de la mano derecha. El radio de curvatura del eje central del canal está dado por

$$\frac{1}{r_c} = \frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{r_{min}} \cos\left(\frac{2\pi s_c}{M}\right), \quad (V-1)$$

donde $r_{min} = \frac{M}{2\pi w}$ es definido como el radio de curvatura correspondiente al ápice de la curva, donde

$$s_c = n \frac{M}{2}$$

para $n = (0, 1, 2, 3, \dots)$.

La pendiente del lecho a lo largo del eje central longitudinal del canal se tomará como una constante e igual a S_o , la cual también será igual a la pendiente de la línea de energía. Se supone que el flujo primario es uniforme y no perturbado, y que la pequeña no uniformidad del eje del canal da origen a la correspondiente pequeña no uniformidad del flujo longitudinal.

A continuación se deduce una solución para flujo meandroso a partir de la forma verticalmente integrada de las ecuaciones gobernantes. La técnica de solución procede en forma sencilla y la aplicabilidad de los resultados es bastante general. La única variable que requiere una distribución vertical es la parte rotacional, $\mu(\eta, s)$, de la componente transversa de velocidad a lo largo del eje central longitudinal del canal. La forma de las soluciones es inferida de, e introducida en, las diversas ecuaciones gobernantes para determinar la amplitud y el desfase de las incógnitas. Las condiciones de borde son impuestas tan pronto sean aplicables, ilustrando así su sentido físico.

Se supone que la distribución vertical de la componente longitudinal de velocidad viene dada por la ley de Nunner (1956), la cual sobre el eje central del canal se expresa como

$$v_c(\eta) = \bar{V}_c \frac{n+1}{n} \eta^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{V-2})$$

donde \bar{V}_c es la velocidad media verticalmente integrada, $n = 1/\sqrt{f}$, donde f es el factor de fricción de Darcy-Weisbach del flujo y η es la cota sobre el lecho adimensionalizada por la profundidad local.

V.1) Ecuaciones Dinámica Transversa y de Cantidad de Movimiento Angular.

A objeto de tratar flujos meandrosos, los términos que representan la no uniformidad del flujo en las ecuaciones dinámicas verticalmente integradas deben ser retenidos. Las ecuaciones dinámica transversa y longitudinal han sido derivadas por Falcón (1979). Al suponer que la profundidad, d_c , y la velocidad media, \bar{V}_c , a lo largo del eje central del canal, son constantes, desarrollando los términos remanentes en serie respecto al eje central, y conservando solo los de primer orden, se encuentra que la ecuación dinámica transversa, verticalmente integrada, y la componente longitudinal de la ecuación de cantidad angular de movimiento, se reducen a las siguientes expresiones, respectivamente:

$$H'_c + \frac{\tau_{orc}}{\gamma d_c} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_0^1 u_c v_c d\eta \right] = \frac{\bar{V}_c^2}{g r_c} \frac{n}{n+2}, \quad (\text{V-3})$$

y

$$H'_c + \frac{2}{g} \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_0^1 u_c v_c \eta d\eta \right] = \frac{\bar{V}_c^2}{g r_c} \frac{n+1}{n}. \quad (\text{V-4})$$

Para un flujo espacialmente periódico la estructura de las soluciones debe corresponder a las siguientes expresiones, a lo largo del eje central longitudinal:

$$H'_c(s) = H'_A \cos \frac{2\pi}{M}(s - \delta),$$
(V-5)

$$\tau_{or_c} = \tau_A \cos \frac{2\pi}{M}(s - \delta_\tau),$$
(V-6)

y

$$u_c(\eta, s) = u_A \cos \frac{2\pi}{M}(s - \delta_u) + \mu(\eta, s).$$
(V-7)

Los desfases δ , δ_τ , y δ_u son incluidos para permitir los efectos de la no uniformidad del flujo. La componente radial de la velocidad se descompone en dos partes: su valor medio transversal, verticalmente integrado, y la desviación de la componente transversal total respecto al valor medio, $\mu(\eta, s)$, la cual debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\int_0^1 \mu(\eta, s) d\eta = 0$$
(V-8a)

y

$$u_c(\eta = 0, s) = 0.$$
(V-8b)

La velocidad media transversal no contribuye al esfuerzo cortante τ_{zr} debido a que esta componente es constante sobre la vertical y no posee gradiente vertical. Por otra parte, $\mu(\eta, s)$ no aparece en la ecuación de conservación del fluido, verticalmente integrada, en virtud de (V-8b).

Introduciendo (V-5), (V-6) y (V-7) en (V-3) y (V-4) resultan

$$H'_A \cos \frac{2\pi}{M} (s - \delta) + \frac{\tau_A}{\gamma d_c} \cos \frac{2\pi}{M} (s - \delta_\tau) + \frac{1}{g} \frac{dM_1}{ds} -$$

(V-9)

$$-2\pi \frac{\bar{V}_c U_A}{gM} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{M} (s - \delta_u) = \frac{\bar{V}_c^2}{gr_{min}} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cos \frac{2\pi s}{M},$$

y

$$H'_A \cos \frac{2\pi}{M} (s - \delta) + \frac{2}{g} \frac{dM_2}{ds} - 4\pi \frac{\bar{V}_c U_A}{gM} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{M} (s - \delta_u) =$$

(V-10)

$$= \frac{\bar{V}_c^2}{gr_{min}} \frac{n+1}{n} \cos \frac{2\pi s}{M},$$

donde

$$M_1(s) = \int_0^1 \mu(\eta, s) \bar{V}_c \frac{n+1}{n} \eta^{\frac{1}{n}} d\eta$$

(V-11)

y

$$M_2(s) = \int_0^1 \mu(\eta, s) \bar{V}_c \frac{n+1}{n} \eta^{1+\frac{1}{n}} d\eta.$$

(V-12)

Las ecuaciones (V-11) y (V-12) se transforman en cuatro al igualar los coeficientes de $\operatorname{sen} \frac{2\pi s}{M}$ y $\cos \frac{2\pi s}{M}$ a cero. Para proseguir con la determinación de las incógnitas es ahora necesario obtener una solución para la componente rotacional, $\mu(\eta, s)$, de la componente transversa total.

V.2) Componente Rotacional de la Velocidad Transversa.

La ecuación dinámica transversa, local, simplificada apropiadamente sobre el eje longitudinal central para este problema es:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = H'_c - \frac{v_c^2}{gr_c} + \frac{v_c}{g} \frac{\partial u_c}{\partial s} \quad (\text{V-13})$$

y será utilizada para deducir una expresión aproximada para $\mu(\eta, s)$. Integrando (V-13) verticalmente desde una elevación z cualquiera hasta $z=H$ (la superficie libre) con la condición de que $\tau_{zr}(z=H) = 0$, resulta, luego de sustituir η por z

$$\frac{\tau_{zr}(\eta)}{\gamma d_c} = H'_c(\eta - 1) + \frac{\bar{V}_c^2}{gr_c} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} (1 - \eta^{1+\frac{2}{n}}) - \frac{1}{g} \int_{\eta}^1 v_c \frac{\partial u_c}{\partial s} d\eta. \quad (\text{V-14})$$

De acuerdo al modelo turbulento de Boussinesq se puede relacionar el esfuerzo cortante longitudinal sobre planos horizontales, $\tau_{z\theta}$ con el gradiente vertical de velocidad longitudinal:

$$\tau_{z\theta} \approx \rho \epsilon \frac{\partial v}{\partial z},$$

donde ρ es la densidad del fluido y ϵ es el coeficiente de difusión turbulenta de cantidad de movimiento, también llamado viscosidad de remolino.

Suponiendo flujo hidrostático entonces a lo largo del eje central longitudinal del canal, se cumple sobre cualquier vertical en el flujo que

$$\tau_{z\theta} = \gamma d_c S_0 (1 - \eta),$$

donde S_0 es la pendiente longitudinal del cauce y se está suponiendo también que la resistencia inercial secundaria es despreciable (ver Falcón, 1979). Al combinar las dos relaciones arriba expresadas con (V-2) se puede deducir que

$$\epsilon(\eta) \approx \frac{gd_c^2 S_0}{\bar{V}_c} \frac{n^2}{n+1} (1-\eta)\eta^{1-\frac{1}{n}}. \quad (\text{V-15})$$

Insertando (V-7), (V-2) y (V-15) en (V-14), expresando z en términos de η , y simplificando resulta:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \eta} = -\bar{V}_c \frac{n+1}{n^2} \frac{H'_A}{S_0} \eta^{\frac{1}{n}-1} \cos \frac{2\pi}{M} (s-\delta) + \frac{\bar{V}_c^2}{gr_{min}} \frac{(n+1/n)^3}{(n+2)} \frac{\bar{V}_c}{S_0} \left(\frac{\eta^{1/n-1} - \eta^{3/n}}{1-\eta} \right) \cos \frac{2\pi s}{M} + \quad (\text{V-16})$$

$$+ \frac{2\pi}{M} \frac{\bar{V}_c^2 U_A}{g S_0} \frac{n+1}{n^2} \left(\frac{\eta^{1/n-1} - \eta^{2/n}}{1-\eta} \right) \text{sen} \frac{2\pi}{M} (s-\delta_u) - \frac{\bar{V}_c^2}{g S_0} \frac{(n+1)^2}{n^3} \frac{\eta^{1/n-1}}{1-\eta} \int_{\eta}^1 \frac{\partial \mu}{\partial s} \eta'^{\frac{1}{n}} d\eta'.$$

La ecuación V-16 es una ecuación integro-diferencial parcial para $\mu(\eta, s)$. Los dos primeros términos del miembro derecho reflejan la influencia del gradiente de presión radial y de la fuerza centrífuga respectivamente. Los términos tercero y cuarto surgen del término de aceleración convectiva $v\delta u/\delta s$ (el cual es consecuencia de la no uniformidad longitudinal del flujo) en (V-13) y reflejan la influencia de las componentes media y rotacional de la velocidad transversa, respectivamente. La ecuación V-16 será ahora resuelta para el caso en el cual los términos de aceleración convectiva son de menor magnitud que los términos de gradiente de presión radial y de fuerza centrífuga. Considérese, por ejemplo, el cociente de las amplitudes de los términos de aceleración convectiva y del gradiente de presión transversa en (V-13):

$$R_c(\eta) = \frac{\frac{v}{g} ABS(\delta u/\delta s)_{max}}{H'_A} \quad (\text{V-17})$$

El gradiente de presión transverso es una base conveniente para la comparación porque su magnitud es constante sobre la vertical. De (V-4) se puede estimar su magnitud en el orden de

$$\frac{\bar{V}_c^2}{gr_{min}} \frac{n+1}{n}.$$

Debido a que se encontró que $\mu(\eta, s)$ varía periódicamente con s para cualquier valor fijo de η , con una amplitud denotada $U_{max}(\eta)$, se tiene que

$$R_c(\eta) = \frac{\eta^{1/n} u_{max}(\eta)}{w \bar{V}_c} \quad (V-18)$$

donde se ha hecho uso de (V-2), de la expresión para $r_{min} = \frac{M}{2\pi w}$ y del hecho de que

$$\left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial s} \right)_{max} = \frac{2\pi}{M} u_{max}(\eta).$$

Subsecuentemente se verá, en el capítulo VI, que en algunos casos y sólo para un pequeño rango de η en la vecindad de la superficie libre, $R_c(\eta)$ no es menor que la unidad. Esto no se considera significativo porque en general el error en el cálculo de $\mu(\eta, s)$ es de orden R_c^2 , y las diversas incógnitas se determinan a partir de expresiones verticalmente integradas de las ecuaciones gobernantes, por lo que el error cercano a la superficie se reparte sobre toda la profundidad. Por otra parte, cerca de la superficie libre el término de fuerza centrífuga es mayor que H'_A , por lo que la importancia relativa del término de aceleración convectiva es menor que la indicada por $R_c(\eta)$ a medida que η tiende a la unidad.

Para obtener una solución aproximada de (V-16) se procede de la siguiente manera: una primera aproximación, $\mu_1(\eta, s)$, es obtenida integrando sólo los dos primeros términos del miembro derecho:

$$\mu_1(\eta, s) = -\bar{V}_c \frac{n+1}{n} \frac{H'_A}{S_o} \eta^{1/n} \cos \frac{2\pi}{M} (s - \delta) +$$

(V-19)

$$+ \frac{\bar{V}_c^2}{gr_{min}} \frac{\bar{V}_c}{S_o} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}{n+2} S_1(\eta) \cos \frac{2\pi s}{M} + C(s),$$

donde

$$S_1(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\eta^{\frac{1}{n}+j}}{\frac{1}{n}+j} - \frac{\eta^{\frac{3}{n}+1+j}}{\frac{3}{n}+1+j} \right), \quad (V-20)$$

$C(s)$ es una constante de integración y donde para poder efectuar la integración se ha hecho uso de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-\eta} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j. \quad (V-21)$$

La contribución de los últimos dos términos de (V-16) en $\mu(\eta, s)$, denotada $\mu_2(\eta, s)$, se puede aproximar insertando la expresión para μ_1 en el cuarto término de (V-16). Luego se obtiene μ_2 de

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial \eta} = \frac{2\pi \bar{V}_c^2 u_A}{M g S_o} \frac{n+1}{n^2} \left(\frac{\eta^{\frac{1}{n}-1} - \eta^{\frac{2}{n}}}{1-\eta} \right) \text{sen} \frac{2\pi}{M} (s - \delta_u) - \quad (V-22)$$

$$- \frac{\bar{V}_c^2}{g S_o} \frac{(n+1)^2}{n^3} \frac{\eta^{\frac{1}{n}-1}}{1-\eta} \int_{\eta}^1 \frac{\partial \mu_1}{\partial s} \eta'^{\frac{1}{n}} d\eta'.$$

Al insertar (V-19) en (V-22) e integrar respecto a η' resulta

$$\mu_2(\eta, s) = \frac{2\pi \bar{V}_c^2 u_A}{M g S_o} \frac{n+1}{n^2} S_2(\eta) \text{sen} \frac{2\pi}{M} (s - \delta_u) -$$

$$-\frac{\bar{V}_c^2 (n+1)^2}{gS_o n^3} \left[\frac{2\pi H'_A \bar{V}_c}{M S_o} \frac{n+1}{n+2} S_1(\eta) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{M} (s-\delta) + \right. \quad (V-23)$$

$$\left. + C'(s) \frac{n}{n+1} S_2(\eta) - \frac{2\pi \bar{V}_c^2 \bar{V}_c}{M g r_{min} S_o} \frac{(1+1/n)^3}{n+2} S_{10}(\eta) \operatorname{sen} \frac{2\pi s}{M} \right] + K(s),$$

donde

$$S_2(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\eta^{\frac{1}{n}+j}}{\frac{1}{n}+j} - \frac{\eta^{\frac{2}{n}+1+j}}{\frac{2}{n}+1+j} \right), \quad (V-24)$$

$$S_{10}(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\frac{\eta^{\frac{1}{n}+k}}{\frac{1}{n}+k} - \frac{\eta^{\frac{3}{n}+1+j+k}}{\frac{3}{n}+1+j+k}}{(\frac{1}{n}+j)(1+\frac{2}{n}+j)} - \frac{\frac{\eta^{\frac{1}{n}+k}}{\frac{1}{n}+k} - \frac{\eta^{\frac{5}{n}+2+j+k}}{(\frac{5}{n}+2+j+k)}}{(\frac{3}{n}+j+1)(\frac{4}{n}+j+2)} \right], \quad (V-25)$$

y $K(s)$ es una constante de integración. Luego se tiene que

$$\mu(\eta, s) = \mu_1(\eta, s) + \mu_2(\eta, s) \quad (V-26)$$

y la magnitud del error relativo en $\mu(\eta, s)$ así calculado sería de orden R_c^2 . Esto es razonable ya que el término del miembro derecho de (V-16), en el cual se introdujo la aproximación $\mu \approx \mu_1$, posee una magnitud relativa del orden de R_c con respecto a los términos mayores.

La condición de que

$$u_c(\eta = 0, s) = \mu(\eta = 0, s) + u_{ACOS} \frac{2\pi}{M} (s - \delta_u) = 0$$

conlleva a que

$$C(s) + K(s) = -u_{ACOS} \frac{2\pi}{M} (s - \delta_u).$$

(V-27)

Al suponer que $dC/ds = C'$ se puede expresar como

$$C'(s) = \alpha' \operatorname{sen} \frac{2\pi s}{M} + \beta' \operatorname{cos} \frac{2\pi s}{M},$$

(V-28)

donde α' y β' son constantes desconocidas, e imponer (V-8a) resultan dos ecuaciones (de igualar a cero los coeficientes de $\operatorname{sen} \frac{2\pi s}{M}$ y $\operatorname{cos} \frac{2\pi s}{M}$) las cuales determinan α' y β' :

$$\alpha' = \left[(CC6)(S15) - u_A \operatorname{sen} P_u - \bar{V}_c \frac{H'_A}{S_o} \operatorname{sen} P + \right.$$

(V-29)

$$\left. + (CC1)S4u_A \operatorname{cos} P_u - (CC5)(S3)H'_A \operatorname{cos} P \right] \frac{1 + 1/n}{S4(CC2)},$$

y

$$\beta' = \left[-\bar{V}_c \frac{H'_A}{S_o} \operatorname{cos} P + \frac{\bar{V}_c^2}{gr_{min}} \frac{\bar{V}_c}{S_o} \frac{(1 + 1/n)^3}{n + 2} S3 - \right.$$

(V-30)

$$\left. -u_A \operatorname{cos} P_u - (CC1)(S4)u_A \operatorname{sen} P_u + (CC5)(S3)H'_A \operatorname{sen} P \right] \frac{1 + 1/n}{S4(CC2)},$$

donde

$$CC1 = \frac{2\pi \bar{V}_c^2 (n + 1)}{M g S_o n^2},$$

(V-31)

$$CC2 = \frac{\bar{V}_c^2 (n + 1)^2}{g S_o n^3},$$

(V-32)

$$CC3 = \frac{2\pi \bar{V}_c n + 1}{M S_o n + 2}, \quad (V-33)$$

$$CC4 = \frac{2\pi \bar{V}_c^2 \bar{V}_c (1 + 1/n)^3}{M gr_{min} S_o (n + 2)}, \quad (V-34)$$

$$CC5 = (CC2)(CC3), \quad (V-35)$$

$$CC6 = (CC2)(CC4), \quad (V-36)$$

$$S3 = \int_0^1 S1(\eta) d\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(\frac{1}{n} + j)(\frac{1}{n} + j + 1)} - \frac{1}{(\frac{3}{n} + j + 2)(\frac{3}{n} + j + 1)} \right], \quad (V-37)$$

$$S4 = \int_0^1 S2(\eta) d\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(\frac{1}{n} + j)(\frac{1}{n} + j + 1)} - \frac{1}{(\frac{2}{n} + j + 1)(\frac{2}{n} + j + 2)} \right], \quad (V-38)$$

$$S15 = \int_0^1 S10(\eta) d\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{(\frac{1}{n} + k)(\frac{1}{n} + k + 1)} - \frac{1}{(\frac{3}{n} + 1 + j + k)(\frac{3}{n} + 2 + j + k)}}{(\frac{1}{n} + j)(\frac{2}{n} + j + 1)} - \right. \quad (V-39)$$

$$\left. - \frac{\frac{1}{(\frac{1}{n} + k)(\frac{1}{n} + k + 1)} - \frac{1}{(\frac{5}{n} + 2 + j + k)(\frac{5}{n} + 3 + j + k)}}{(\frac{3}{n} + j + 1)(\frac{4}{n} + 2 + j)} \right],$$

$$P = \frac{2\pi\delta}{M},$$

(V-40)

y

$$P_u = \frac{2\pi\delta_u}{M}.$$

(V-41)

Con las constantes de integración correspondientes a la solución de (V-16), expresadas en (V-27), (V-29) y (V-30), se pueden determinar $M_1(s)$ y $M_2(s)$, dadas por (V-11) y (V-12), respectivamente, para insertarlas luego en (V-9) y (V-10) que son las ecuaciones dinámica transversa y de momentum angular, alrededor de un eje longitudinal, respectivamente. Estas dos ecuaciones se convierten en cuatro al igualar a cero los coeficientes de $\sin \frac{2\pi s}{M}$ y $\cos \frac{2\pi s}{M}$ en cada una de ellas. Es entonces sencillo (pero tedioso; ver Falcón (1979), Apéndice D) obtener expresiones para $H'_A \text{sen} P$, $H'_A \text{cos} P$, $\tau_A \text{sen} P_\tau$ y $\tau_A \text{cos} P_\tau$, donde

$$P_\tau = \frac{2\pi\delta_{\tau u}}{M},$$

(V-42)

en términos de las incógnitas $U_A \text{sen} P_u$, $U_A \text{cos} P_u$ y el coeficiente de Nunner n . Un valor de n sobre el eje central se determina de inmediato de la relación de Darcy-Weisbach, con $\alpha = 1$:

$$n = \frac{V_A}{\sqrt{8gd_c S_o}}.$$

(V-43)

V.3) Ecuación Dinámica Longitudinal

La ecuación dinámica longitudinal, verticalmente integrada (ver Falcón (1979), Apéndice B.2) es

$$\left(\frac{\partial d}{\partial r} + 2\frac{d}{r}\right) \int_0^1 uvd\eta + d \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^1 uvd\eta \right) + \frac{\partial d}{\partial s} \int_0^1 v^2 d\eta +$$

(V-44)

$$+ d \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 v^2 d\eta = -g \frac{\partial H}{\partial s} d - \frac{\tau_{o\theta}}{\rho}.$$

Una expresión para $\frac{\partial H}{\partial s}$ en (V-44) puede ser obtenida, calculando primero de (V-5)

$$H(r, s) - H(r_c, s) = \int_{r_c}^r H'_c dr = H'_A \cos \frac{2\pi(s - \delta)}{M} (r - r_c)$$

(V-45)

y derivando respecto a s resulta

$$\frac{\partial H(r, s)}{\partial s} = \frac{\partial H(r_c, s)}{\partial s} - \frac{2\pi}{M} H'_A \operatorname{sen} \frac{2\pi(s - \delta)}{M} (r - r_c).$$

(V-46)

En (V-45) el valor de $\frac{\partial H}{\partial r} = H'$ se ha supuesto igual a su valor sobre el eje central longitudinal, de manera que las expresiones dadas por (V-45) y (V-46) son aproximaciones de primer orden.

En (V-44) el primer término del miembro izquierdo es de orden superior porque contiene productos de cantidades de primer orden; el segundo término también es de orden superior debido a que contiene una derivada que varía muy lentamente (respecto a r) de una cantidad de primer orden. Despreciando los términos de flujo secundario, sustituyendo $\tau_{o\theta}/\rho$ en términos de la relación local de Darcy-Weisbach, insertando (V-2) para evaluar los integrales y utilizando (V-46) queda:

$$\left(\frac{\partial d}{\partial s} \bar{V}^2 + 2\bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} d \right) \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} =$$

(V-47)

$$= \frac{2\pi}{M} g d H'_A \operatorname{sen} \frac{2\pi(s-\delta)}{M} (r-r_c) - \frac{f_b \bar{V}^2}{8} + g d S_o,$$

donde

$$\frac{\partial H(r_c, s)}{\partial s} = -S_o.$$

(V-48)

Ahora se suponen soluciones de la forma

$$\bar{V}(r, s) = \bar{V}_c(1 + \nu)$$

(V-49)

y

$$d(r, s) = d_c(1 + \epsilon),$$

(V-50)

donde ambas cantidades, ν y ϵ , se suponen con magnitudes mucho menores que la unidad.

Insertando (V-49) y (V-50) en (V-47), despreciando términos de orden superior y reconociendo que para $r=r_c$ (V-47) se reduce a

$$g d_c S_o - f_b \frac{\bar{V}_c^2}{8} = 0$$

(V-51)

debido a que para $r=r_c$ $\frac{\partial d}{\partial s} = 0 = \frac{\partial \bar{V}}{\partial s}$, resulta

$$\frac{\partial \nu}{\partial s} = \frac{\pi g H'_A}{V_c^2 M} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi(s-\delta)}{M} (r - r_c) - \quad (V-52)$$

$$- \frac{f_b}{16d_c} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} (2\nu - \epsilon) - \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial s}.$$

La ecuación V-51 refleja un balance de fuerzas globales longitudinales entre la componente de peso a lo largo de la pendiente y la resistencia friccional. La ecuación V-52 representa un balance local entre las desviaciones de las fuerzas longitudinales que aparecen en (V-44) relativas a las fuerzas globales expresadas en (V-51). Cabe recordar que para que las ecuaciones V-51 y V-52 sean válidas es necesario que los términos representativos de la resistencia inercial del flujo secundario o transversal en (V-44) sean despreciables en comparación con las desviaciones de las fuerzas arriba mencionadas. Para condiciones de flujo cualesquiera estas desviaciones aumentarán en magnitud a medida que la longitud de onda M disminuye y la profundidad del flujo sobre el eje central aumente. Por otra parte, la resistencia inercial debida al flujo secundario disminuirá en magnitud con aumento de r_{min} . De manera que un canal para el cual la razón r_{min}/M sea grande encaja idealmente en el anterior esquema de solución. De acuerdo a lo mencionado en la Introducción, tales razones de gran magnitud definen canales débilmente meandrosos, precisamente del tipo utilizado por Gottlieb y Nori & Sucre (1988) en sus experimentos. En consecuencia, los flujos débilmente meandrosos considerados aquí son tales que el efecto del flujo secundario es relativamente importante en las ecuaciones dinámica transversa y de momentum angular, pero despreciable en la ecuación dinámica longitudinal.

Por inspección de (V-52) se tiene que las cantidades ν y ϵ pueden tener estructuras matemáticas dadas por:

$$\nu = \nu_o \cos \frac{2\pi(s - \delta_\nu)}{M} (r - r_c) \quad (\text{V-53})$$

y

$$\epsilon = \epsilon_o \cos \frac{2\pi(s - \delta_\epsilon)}{M} (r - r_c), \quad (\text{V-54})$$

donde ν_o , δ_ν , ϵ_o , y δ_ϵ son constantes a ser determinadas. Es de notar que (V-52) provee una relación entre ν y ϵ . Otra relación se obtendrá subsecuentemente al requerir que el arrastre de fondo (del material del lecho) esté orientado en la misma dirección y sentido que la fuerza actuante sobre una partícula representativa del lecho, D_{50} , por ejemplo. Es posible, de acuerdo a un análisis alterno de Falcón & Kennedy (1984), utilizando un resultado de Karim (1981), igualar a la dirección y sentido de la fuerza resultante sobre un elemento de capa de fondo (en la cual ocurre el arrastre de fondo), cuyo espesor viene dado por

$$y_b = D_{50} \frac{u_*}{u_{*cr}},$$

donde u_* es la velocidad de corte local del flujo y u_{*cr} es el valor correspondiente al esfuerzo cortante crítico (al movimiento incipiente) para D_{50} . Haddad y Mattiuzzo (1985) encontraron que esta condición equivale a usar un diámetro de partícula

$$D_* = \frac{3}{2} \frac{1-p}{\sqrt{\theta}} \sqrt{\frac{d_c S_o D_{50}}{(\rho_s - \rho)/\rho}}$$

en lugar del D_{50} antes mencionado, donde p = porosidad en la capa de fondo, θ es el parámetro crítico de Shields para movimiento incipiente, y $\rho(\rho_s)$ es la densidad del fluido (sedimento). Cualesquiera de estas suposiciones se consideran aplicables aún cuando el

transporte suspendido sea de magnitud comparable al de fondo. Este punto se comentará detalladamente en el próximo aparte.

V.4) Ecuación de Continuidad del Sedimento

La ecuación que expresa el principio de la conservación del sedimento para condiciones permanentes es (ver Falcón, 1979, Apéndice C):

$$r_c \frac{\partial q_s}{\partial s_c} + \frac{\partial}{\partial r}(r q_r) = 0, \quad (\text{V-55})$$

donde q_s y q_r son las tasas de transporte de sedimento del material del lecho en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente. Formalmente estos arrastres deben ser totales: de fondo más suspendido. Sin embargo debido a que en los experimentos de Gottlieb, utilizados para verificar el presente desarrollo teórico, el arrastre fué fundamentalmente de fondo, se particularizarán los arrastres al caso de arrastre de fondo. Además, sería complicado el cálculo de los arrastres suspendidos debido a la complejidad del campo de velocidades presente sobre un cauce meandroso. Por estas razones se adoptará para el transporte longitudinal la expresión

$$q_s(r, s) \propto [\bar{V}(r, s) - \bar{V}_{cr}]^p, \quad (\text{V-56})$$

donde \bar{V}_{cr} es la velocidad crítica al movimiento incipiente del sedimento. Tal como la discusión de Jain (1975) del trabajo de Engelund (1974) sugiere, (V-56) es una relación más generalmente aceptada para la tasa de transporte que la usada por Engelund y Gottlieb, los cuales omitieron \bar{V}_{cr} . En (V-56) q_s y \bar{V} están en fase, lo cual se justifica por la tasa lenta de variación longitudinal de los flujos considerados, particularmente a lo largo del eje central, ligeramente curvilíneo, del canal. Al dividir (V-56) por si misma, pero aplicada

sobre el eje central, resulta

$$q_s(r, s) = q_{sc} \left(1 + \frac{\nu}{1 - \bar{V}_{cr}/\bar{V}_c} \right)^p, \quad (\text{V-57})$$

donde $q_{sc} = q_s(r_c, s)$ y se ha hecho uso de (V-53). Debido a que es de esperar que q_s difiera muy poco de q_{sc} se expresará aquella mediante la forma linealizada (primeros dos términos para el binomio de Newton):

$$q_s(r, s) \approx q_{sc} \left(1 + \frac{p}{1 - \bar{V}_{cr}/\bar{V}_c} \nu \right). \quad (\text{V-58})$$

Es ahora conveniente definir

$$p' = \frac{p}{1 - \bar{V}_{cr}/\bar{V}_c}, \quad (\text{V-59})$$

donde p es un valor único (determinado con los resultados experimentales de Gottlieb) mientras que p' variará de un experimento a otro porque depende de la razón variable \bar{V}_{cr}/\bar{V}_c .

Al introducir (V-53) en (V-58) y el resultado en (V-55), hacer el cambio de variable

$$m = r - r_c, \quad (\text{V-60})$$

e integrar (V-55) resulta:

$$q_m = q_r = q_{sc} \left(\frac{r}{r_c} \right) p' \frac{2\pi}{M} \nu_o \text{sen} \frac{2\pi(s - \delta_\nu)}{M} \left(\frac{m^2 - m_o^2}{2} \right), \quad (\text{V-61})$$

donde $m_o = B/2$ aparece de la determinación de la constante de integración tal que q_m sea cero sobre ambas paredes laterales del canal (o lo que es lo mismo, en $m = \pm B/2$).

Hasta ahora se han tratado las ecuaciones dinámica longitudinal y de continuidad de sedimentos siguiendo de cerca el desarrollo de Engelund (1974) para flujos fuertemente meandrosos, el cual, sin embargo, no incluye el primer término en el miembro izquierdo de (V-47). El presente análisis se diferencia del de Engelund en que para flujos ligeramente meandrosos no es posible obtener una primera aproximación de la topografía del lecho partiendo de un análisis de flujo uniforme. Recuérdese que para canales meandrosos, el análisis del flujo cuasi-uniforme provee un perfil transversal del lecho en fase con la curvatura del canal; esto no se observa en el caso de flujos levemente meandrosos (cuasi-rectos), tal como lo demuestran los experimentos de Gottlieb, al menos en sistemas de tamaño típico de laboratorio. Adicionalmente, los perfiles batimétricos del lecho para un flujo cuasi-uniforme aparentan ser independientes de las tasas de transporte transversal y longitudinal (la condición física imperante es que la sumatoria de fuerzas transversas actuantes sobre una partícula representativa es nula). En cambio de acuerdo al análisis aquí presentado, la variable ϵ , dada por (V-54), la cual parcialmente describe la topografía linealizada del lecho, debe ser calculada del sistema total de ecuaciones gobernantes (e interaccionantes).

Ahora se supone que el ángulo Ψ'' entre la dirección longitudinal y el vector resultante de transporte de sedimentos es igual al ángulo que forma la fuerza resultante sobre una partícula representativa del lecho con la misma dirección longitudinal. Al expresar esta condición sobre cualquier punto del lecho, despreciando cantidades de orden superior, queda el siguiente resultado reducido al eje central del canal:

$$\tan \Psi'' = \frac{q_{mc}}{q_{sc}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 (\gamma_s - \gamma) \left(\frac{\partial d}{\partial r}\right)_{r=r_c} + \tau_A \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cos \frac{2\pi(s-\delta\tau)}{M}}{\gamma d_c S_o \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}. \quad (\text{V-62})$$

El primer término en el numerador del miembro derecho de (V-62) representa la compo-

nente radial, pendiente-abajo, del peso sumergido de una partícula esférica de sedimento de diámetro D . El segundo término expresa el corte transversal actuante sobre el área proyectada de la partícula, y el denominador representa la fuerza cortante longitudinal. El efecto promedio de las interacciones entre partículas y las fuerzas inerciales correspondientes se consideran despreciables, así como también la componente de peso sumergido de la partícula en la dirección de la pendiente longitudinal.

Al insertar (V-50), (V-54) y (V-61) en (V-62) se obtiene:

$$-p' \frac{\pi \nu_o m_o^2}{M} \operatorname{sen} \frac{2\pi(s - \delta_\nu)}{M} = \frac{2}{3} \left(\frac{S_g - 1}{S_o} \right) D \epsilon_o \cos \frac{2\pi(s - \delta_\epsilon)}{M} + \frac{\tau_A}{\gamma d_c S_o} \cos \frac{2\pi(s - \delta_\tau)}{M},$$

(V-63)

donde $S_g = \gamma_s/\gamma$. Este resultado es de naturaleza similar a la ecuación 4.55 de Gottlieb (1976), la cual fué derivada por Engelund (1974). Si la pendiente transversa de la superficie libre del agua es despreciable en comparación con la pendiente transversa del lecho, entonces ambos resultados arriba citados se hacen idénticos si

$$D_e = \frac{3}{2} \left(\frac{S_o}{S_g - 1} \right) \frac{d_c}{\tan \phi_r}$$

(V-64)

es seleccionado como un diámetro equivalente de partículas, donde ϕ_r es el ángulo de fricción dinámica del sedimento, introducido por Engelund y fué tomado por Gottlieb en un valor aproximado de 30° . La ecuación (V-63) es una aproximación en el sentido de que el miembro izquierdo contiene a p (a través de p'), la cual resulta del transporte total de partículas disponibles, mientras que el miembro derecho ha sido derivado para una sola partícula de diámetro D . Así pues, D debe ser interpretado como un diámetro efectivo de las partículas, representativo de la granulometría presente. Para estados activos de movimiento de todas las partículas de sedimento parece razonable tomar $D = D_{50}$, o ya que $\tan \psi''$ varía linealmente con D , tomar $D = D_{medio}$, el cual generalmente difiere poco del

D_{50} . Sin embargo en la verificación subsecuente se utilizó el D_{50} por ser el valor reportado para los experimentos de fondo móvil de Gottlieb.

Existe un enfoque alternativo en que se consideran las fuerzas actuantes sobre un elemento de capa de fondo (zona en que se mueven las partículas que constituyen el arrastre de fondo), definida ésta por Karim (1981). Su uso fué introducido por Falcón y Kennedy (1983) para aplicarla al caso de flujo en curvas muy largas con radio de curvatura constante. Para rederivar alternativamente (V-62) se tiene que la componente de peso sumergido de partículas de sedimento (contenidas en un volumen de control de capa de fondo, por unidad de área del lecho) tangente al lecho y contenida en un plano transversal-vertical es

$$y_b(1 - p_v)(\gamma_s - \gamma)\text{sen}\beta,$$

donde p_v es la porosidad volumétrica de la mezcla agua-sedimento en la capa de fondo, cuyo espesor viene dado por

$$y_b = D_{50} \frac{u_*}{u_{*c}}, \tag{V-65}$$

donde $u_* = \sqrt{gd_c S_o}$ es la velocidad de corte en la dirección longitudinal y $u_{*c} = \sqrt{\theta g D_{50} (\Delta\rho/\rho)}$ es la velocidad de corte crítica (al movimiento incipiente de D_{50}), donde θ es el parámetro crítico de Shields. Al aplicar las mismas fuerzas de corte, transversal y longitudinal, al techo del elemento de capa de fondo, e igualar las direcciones de la fuerza resultante y del arrastre, respecto a la dirección longitudinal, se encuentra una expresión equivalente a (V-62) si en ella se define el diámetro de la partícula como

$$D_K = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - p_v}{\sqrt{\theta}} \right) \sqrt{\frac{d_c S_o D_{50}}{\Delta\rho/\rho}}, \tag{V-66}$$

donde el subíndice K se refiere al resultado de Karim.

V.5) Ecuación de Continuidad del Fluido

Esta ecuación representa el principio de la conservación de la materia y ha sido derivada por Falcón (1979, Apéndice B.3) en su forma verticalmente integrada en coordenadas curvilíneas, que para la geometría débilmente meandrosa del cauce aquí usado, prácticamente se reduce a un sistema, localmente, de coordenadas cilíndricas. La expresión obtenida es

$$r_c \frac{\partial}{\partial s_c} (\bar{V} d) + \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u} d) = 0. \quad (\text{V-67})$$

La variable \bar{u} es la componente media transversa de velocidad y en $r = r_c$ es igual al primer término en el miembro derecho de (V-7). Al introducir (V-53) y (V-54) en (V-67), despreciar cantidades de orden superior, hacer uso de (V-60), e integrar el resultado respecto a m se obtiene:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{V}_c} = \frac{\pi}{M} \frac{d_c}{d} \frac{r_c}{r} \left[\epsilon_o \text{sen} \frac{2\pi(s - \delta_\epsilon)}{M} + \nu_o \text{sen} \frac{2\pi(s - \delta_\nu)}{M} \right] (m^2 - m_o^2), \quad (\text{V-68})$$

donde la constante de integración ha sido escogida de tal manera que $\bar{u} = 0$ en $m = \pm B/2$, las paredes del canal. Al despejar \bar{u} de esta expresión e igualarla a la misma en (V-7), coleccionar coeficientes de seno y coseno del argumento $2\pi s/M$, e igualarlos a cero, resultan dos ecuaciones:

$$u_A \text{sen} P_u = -\bar{V}_c \frac{\pi}{M} \left(\frac{B}{2} \right)^2 (\epsilon_o \text{cos} P_\epsilon + \nu_o \text{cos} P_\nu) \quad (\text{V-69})$$

y

$$u_A \cos P_u = \bar{V}_c \frac{\pi}{M} \left(\frac{B}{2} \right)^2 (\epsilon_o \text{sen} P_\epsilon + \nu_o \text{sen} P_\nu),$$
(V-70)

donde

$$P_\epsilon = \frac{2\pi\delta_\epsilon}{M},$$
(V-71)

y

$$P_\nu = \frac{2\pi\delta_\nu}{M}.$$
(V-72)

Al combinar (V-69) y (V-70) con (V-52) y (V-63) se eliminan las incógnitas $u_A \cos P_u$ y $u_A \text{sen} P_u$ y se podrían determinar explícitamente ϵ_o , δ_ϵ , ν_o , y δ_ν . Sin embargo, esto sería un cálculo muy tedioso y las expresiones resultantes demasiado extensas para derivar algún significado físico de ellas. Por lo tanto se ha programado su resolución en computadora y luego, por sustituciones sucesivas se obtiene el resto de las incógnitas implícitas en el problema. El programa de computadora correspondiente es presentado por Haddad y Mattiuzzo (1985) y también por Nori y Sucre (1988).

VI) VERIFICACION DEL MODELO ANALITICO

VI.1) Experimentos de Gottlieb (1976)

Es importante destacar que Haddad y Mattiuzzo revisaron cada paso de la teoría desarrollada por Falcón (1979) y encontraron un error algebraico, de poca significación, por lo cual recalcularon los resultados teóricos aplicables a los experimentos de Gottlieb. Aparte de los datos básicos correspondientes a estos experimentos de fondo móvil (ver Tabla VI.1),

TABLA VP-1

DATOS DE TRANSPORTE DE SEDIMENTO PARA LOS EXPERIMENTOS DE GOTTLIEB

| CORRIDA | D_{50} (mm) | d_A (mm) | \bar{v}_c (m/seg.) | $S_o \times 10^3$ | τ_{co} (Kg/m ²) | \bar{v}_{cR} (m/seg) | Q_s (l/seg.) | P' |
|---------|------------------|---------------|-------------------------|-------------------|-------------------------------------|---------------------------|-------------------|------|
| 1S | 0.55 | 0.137 | 0.292 | 1.09 | 0.149 | 0.131 | 0.0022 | 4.76 |
| 2S | 0.55 | 0.189 | 0.396 | 2.15 | 0.406 | 0.108 | 0.0128 | 3.61 |
| 3S | 1.18 | 0.142 | 0.282 | 1.54 | 0.219 | 0.159 | 0.0016 | 6.02 |
| 4S | 1.18 | 0.20 | 0.360 | 2.25 | 0.450 | 0.142 | 0.0075 | 4.34 |

se presentan curvas de nivel de la macrotopografía suavizada del lecho luego de finalizado cada uno de sus cuatro experimentos reportados (ver figuras VI-2 y VI-4). Adicionalmente, Gottlieb llevó a cabo dos experimentos de fondo rígido a partir de los cuales presenta la desviación angular del vector velocidad, respecto a la dirección longitudinal, en algunos puntos sobre la profundidad del flujo. El canal utilizado tenía una longitud de onda $M = 12$ m., una longitud total de trabajo de 18 m. y la amplitud, w , del ángulo de desviación del eje del canal respecto a la dirección longitudinal promedio fué de 0.0784 rads.

VI.1.1) Experimentos con Fondo Móvil

Para aplicar la teoría y predecir resultados experimentales es necesario primero determinar las cantidades p y p' correspondientes a las corridas de Gottlieb. Esto requiere del conocimiento de la razón \bar{V}_{cr}/\bar{V}_c (para el diámetro D_{50}) para cada corrida, y será calculada de la relación

$$\frac{\bar{V}_{cr}}{\bar{V}_c} = \sqrt{\frac{\tau_{cr}}{\tau_{o\theta}}} \quad (\text{VI-1})$$

obtenida de la relación de Darcy-Weisbach y suponiendo que $\bar{V}_c = \bar{V}_A$, siendo esta última la velocidad media del flujo sobre la sección transversal del canal. Al utilizar los datos de Gottlieb y calcular τ_{cr} con el diagrama clásico de Shields se obtienen los resultados presentados en la Tabla VI-1.

La gráfica de Q_s (tasa de transporte longitudinal) versus $\bar{V}_c - \bar{V}_{cr}$ sobre papel log-log se presenta en la figura VI-1. La magnitud del coeficiente p que aparece en (V-56) fué determinada por ajuste de mínimos cuadrados arrojando un valor de 2,63. Los valores de p' dados en la Tabla VI-1 se calcularon con (V-59). Sobre la misma figura también se muestra la gráfica de Q_s versus \bar{V}_c . El exponente m' de Gottlieb determinado por la técnica de mínimos cuadrados resultó ser 6,02.

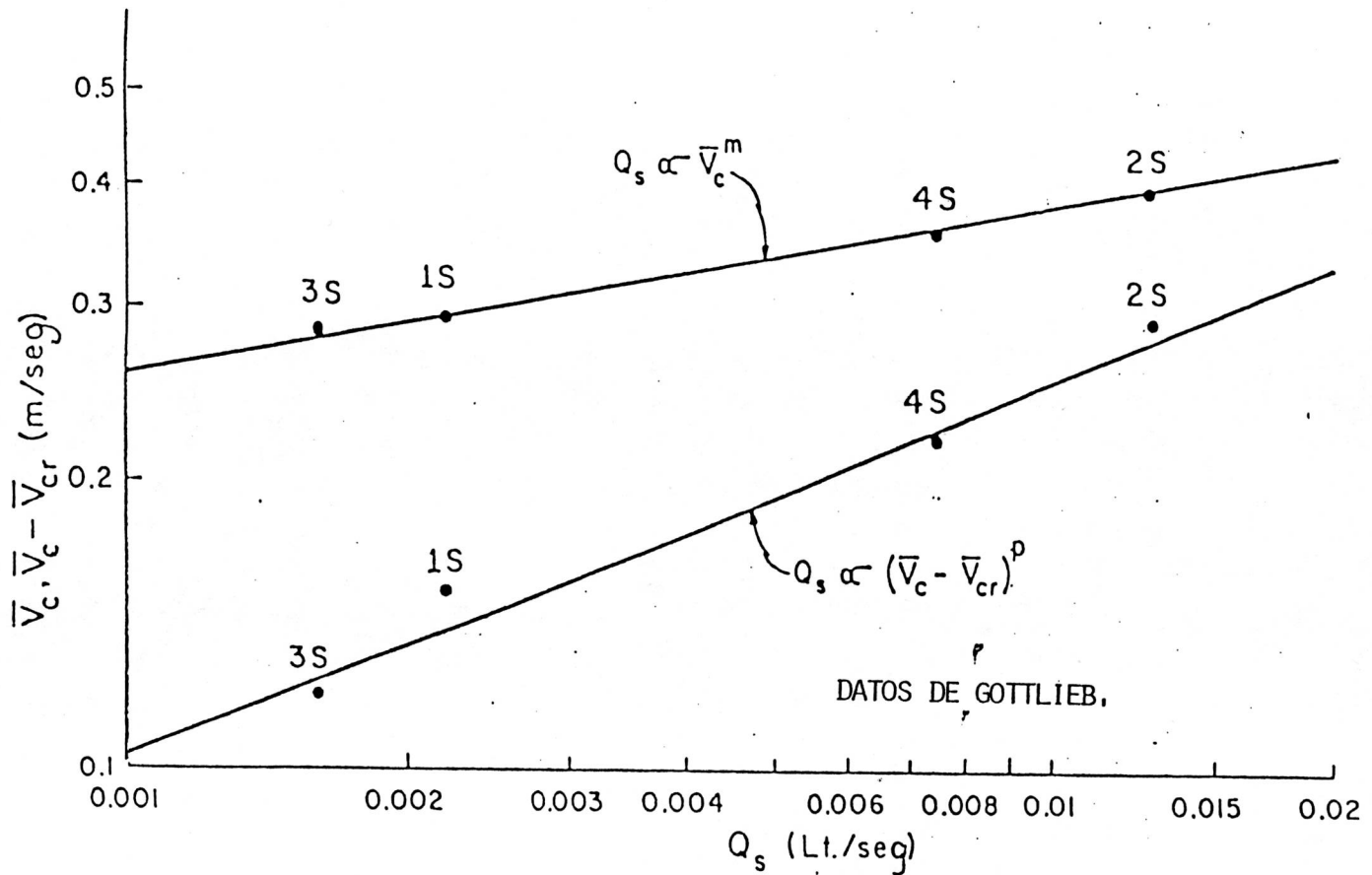


FIGURA VI-1 VARIACIONES DE Q_s (RATA DE TRANSPORTE LONGITUDINAL) VERSUS \bar{V}_c Y $(\bar{V}_c - \bar{V}_{cr})$ PARA LOS DATOS DE GOTTLIEB (1976)

Por razones que se comentarán subsecuentemente en esta sección, solo los dos primeros experimentos de fondo móvil de Gottlieb, 1S y 2S, pudieron ser analizados con la teoría. Las topografías correspondientes se muestran en la figura VI-2.

VI.1.1.1) Discusión de Resultados con Experimentos de Fondo Móvil

Para el experimento 1S la pendiente transversal máxima del lecho ocurre a unos 82° aguas abajo del ápice del meandro (punto de máxima curvatura en planta del eje longitudinal del canal). Sobre la figura VI.3 se muestran algunos puntos experimentales del perfil transversal correspondiente del lecho. Con base a los datos de la Tabla VI-1 se calculó un factor de fricción del lecho, f_b , igual a 0,135 y, equivalentemente, un coeficiente de Nunner $n = 2,72$. El programa de computación correspondiente a la teoría desarrollada arrojó un valor de $P_\epsilon = 77,5^\circ$, muy cercano a la magnitud observada de 82° . El valor computado de ϵ_o fué de $0,212 \text{ m}^{-1}$ y el perfil transverso correspondiente del lecho, linealizado, se observa en la figura VI-3. Considerando las dificultades en el proceso de suavización de la topografía del lecho, y las numerosas suposiciones hechas en el modelo teórico, el perfil lineal reproduce el observado bastante razonablemente. Adicionalmente, luego se verá que las magnitudes de P_ϵ y ϵ_o son sensibles a lo cercano que esté el flujo primario a la condición de flujo pseudo-uniforme (en el sentido de que dos secciones transversales cualesquiera, separadas por una longitud de onda, exhiban las mismas características topográficas y cinemáticas). Otras cantidades de interés, determinadas por los cálculos programados, se presentan en la Tabla VI-2.

Para la segunda corrida de Gottlieb corresponden valores de $f_b = 0,202$ y $n = 2,23$ para los cuales corresponden magnitudes computadas de $P_\epsilon = 124^\circ$ y $\epsilon_o = 0,399 \text{ m}^{-1}$ siendo ambas demasiado grandes. Llegado a este punto es conveniente comentar la validez de la ley de Nunner, $n=1/\sqrt{f}$, con lechos muy rugosos. Hinze (1975) indica que dicha ley es válida para valores de f_b menores que 0,10 (o sea valores de n mayores que 3,16) y que para mayores magnitudes de f_b los valores de n aumentan ligeramente respecto a la

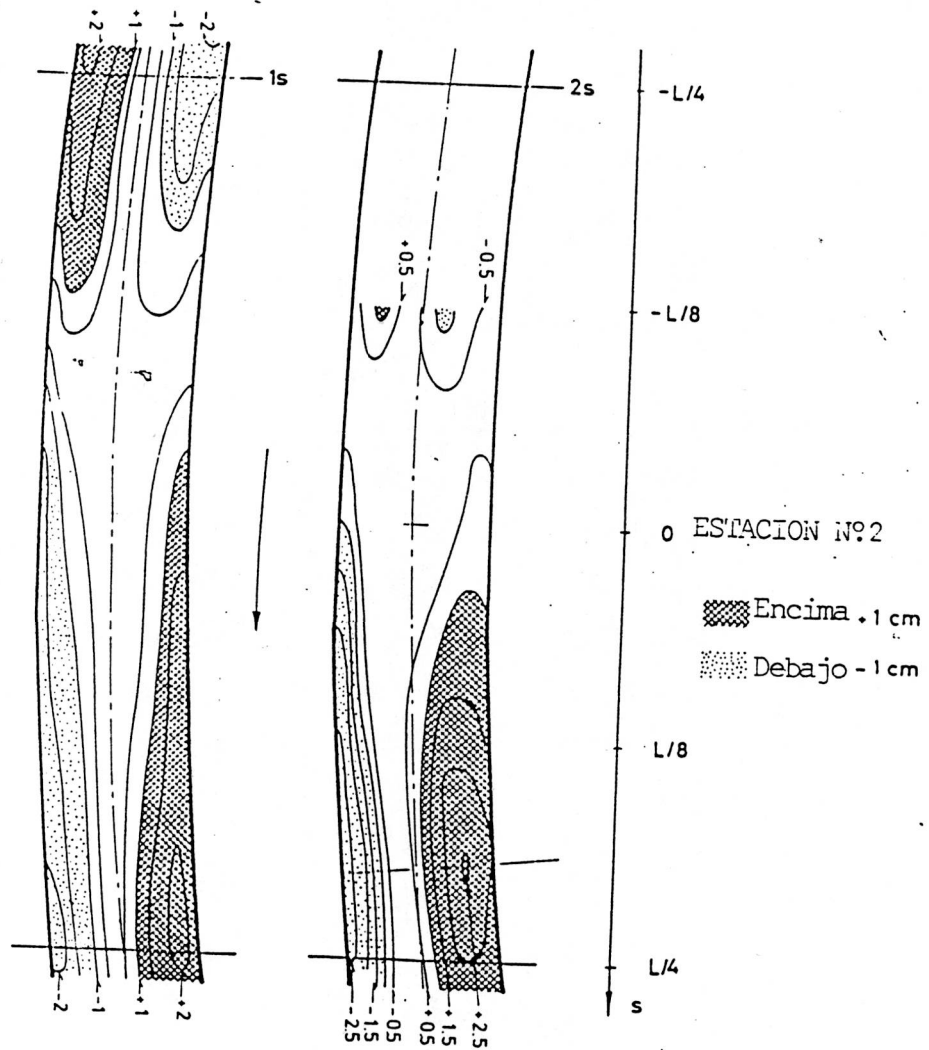


FIGURA V.1-2
 TOPOGRAFIAS DE LOS LECHOS CORRESPONDIENTES A LAS
 CORRIDAS 1S y 2S DE GOTTLIEB (1976)

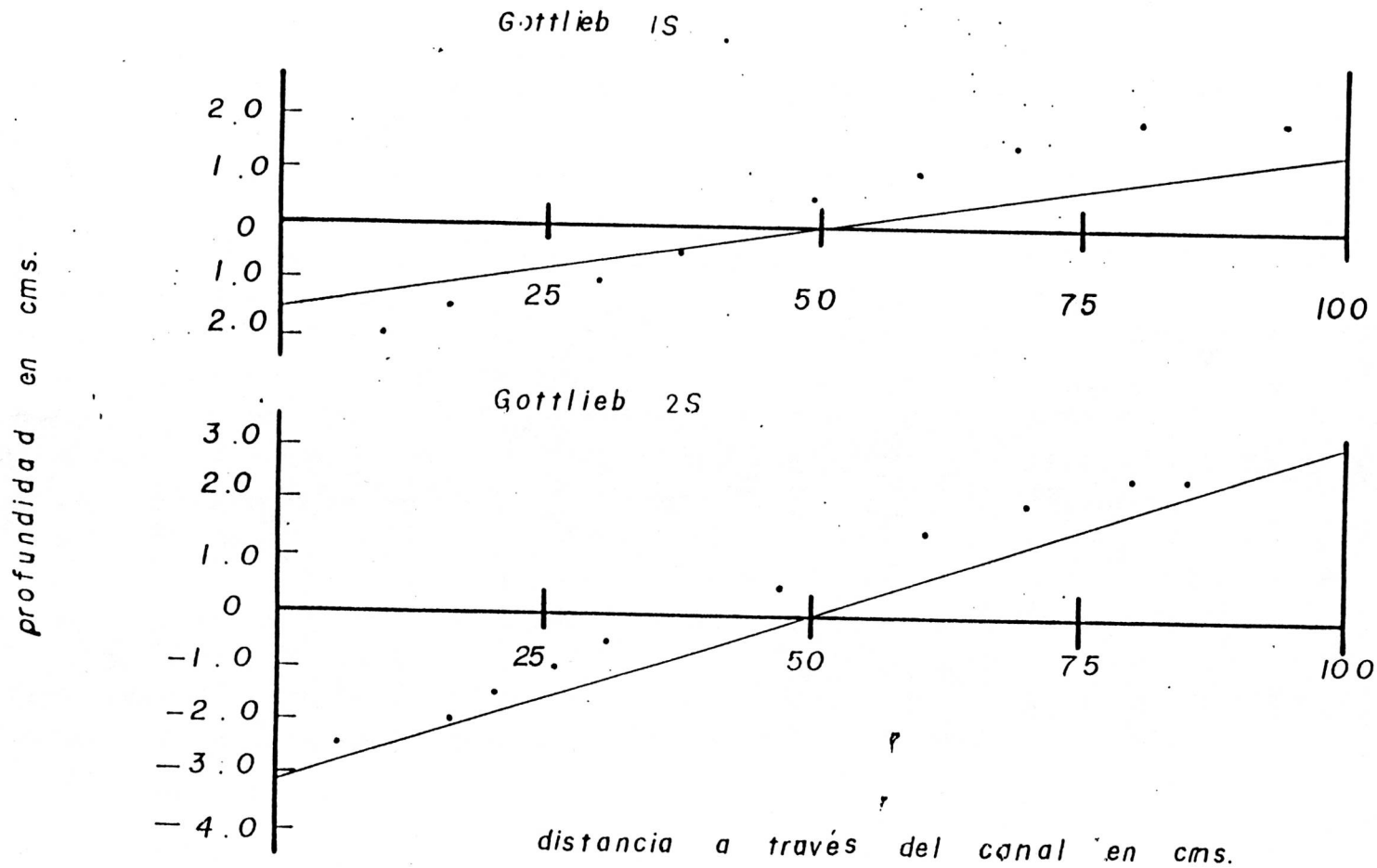


FIGURA V1-3. PERFILES TRANSVERSALES DEL LECHO PARA $s = \delta_e$ MEDIDOS EN LOS ENSAYOS 1S y 2S DE GOTTLIEB (1976), COMPARADOS CON LOS OBTENIDOS POR EL PRESENTE MODELO ANALITICO.

relación antes citada. Debe tenerse en cuenta que los experimentos de Nunner se llevaron a cabo en tuberías circulares con rugosidad superficial de arena, pero sin el equivalente de las deformaciones de fondo del lecho. Parecería razonable que a medida que la rugosidad del lecho aumenta y se produzca un más intenso intercambio vertical de turbulencia, la distribución de $v(\eta)$ debería tender a hacerse más uniforme sobre la vertical, y, debido a esa condición geométrica, el coeficiente de Nunner n tendería a hacerse mayor que lo correspondiente a la relación general de Nunner. Hsu y Kennedy (1971) determinaron valores de n muy grandes (para flujos en tuberías de diámetro periódicamente variable), entre 5 y 17 a través de una longitud de onda. Aunque sus flujos estaban sujetos a gradientes de presión longitudinales considerables, la ondulación de la pared se asemeja algo a la presencia de las deformaciones del lecho de arena en los experimentos de Gottlieb. En vista de la alta rugosidad correspondiente a su segunda corrida, 2S, parece razonable incrementar el valor del coeficiente n para establecer si la topografía observada del lecho puede ser aproximada. A tal efecto se encontró que incrementando el valor de n hasta 3,5 resultan $P_e = 71,7^\circ$ y $\epsilon_o = 0,326 m^{-1}$. El valor observado de P_e es aproximadamente 71° . Unos cuantos puntos del perfil transversal del lecho reportado se muestran sobre la figura VI-3 y se incluye el correspondiente perfil lineal del lecho. El hecho de que dos variables, P_e y ϵ_o , puedan ser bastante bien ajustadas modificando razonablemente una variable, el coeficiente de Nunner n , brinda credibilidad al modelo analítico. En la Tabla VI-2 se presentan resultados adicionales correspondientes a esta corrida 2S. También parece razonable que un incremento del valor de n conlleve a menores valores de P_e y ϵ_o . Esto puede observarse en los miembros derechos de (V-9) y (V-10) donde un incremento de n reduce las magnitudes de los términos representativos de la fuerza centrífuga y torque, respectivamente, de tal manera que al menos las amplitudes de las cantidades que caracterizan al flujo secundario deberían decrecer. De acuerdo a los razonamientos anteriores es lógico esperar que al aumentar, justificadamente, la magnitud del coeficiente n , disminuyan P_e y ϵ_o , que fué lo que ocurrió en el caso del experimento 2S.

TABLA VI-2

RESULTADOS ANALITICOS PARA LOS EXPERIMENTOS DE GOTTLIEB

| Corrida Nº | f_b | n | $v_o (m^{-1})$ | $P_v (^\circ)$ | $\tau_A (\frac{Kg}{m^2})$ | $P_T (^\circ)$ | H'_A | $P (^\circ)$ | $u_A (\frac{m}{seg})$ | $P_u (^\circ)$ | $\epsilon_o (m^{-1})$ | $P_\epsilon (^\circ)$ | Fondo |
|---------------|-------|--------------------------------|----------------|----------------|---------------------------|----------------|---------|--------------|-----------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|-------------|
| 1S | 0.135 | $1/\sqrt{f_b} = 2.72$ | 0.124 | -134.4 | 0.015 | -121.1 | 0.00045 | 22.6 | 0.0024 | 19.1 | 0.212 | 77.5 | Erosionable |
| 2S | 0.202 | $\frac{1.6}{\sqrt{f_b}} = 3.5$ | 0.182 | -140.3 | 0.032 | -136.2 | 0.00082 | 18.6 | 0.0051 | 11.0 | 0.326 | 71.7 | Erosionable |
| 1 | 0.050 | $1/\sqrt{f_b} = 4.47$ | 0.025 | 169.5 | 0.03 | 149.4 | 0.00058 | -7.6 | 0.00054 | 79.5 | 0.000 | - | Rígido |
| 2 | 0.000 | $1/\sqrt{f_b} = 5.81$ | 0.024 | 166.5 | 0.034 | 134.7 | 0.00115 | -10.5 | 0.00076 | 76.6 | 0.000 | - | Rígido |

Para el experimento 3S con $n=2,15$ y $f_b=0,22$ se calcularon $P_\epsilon = 52,3^\circ$ y $\epsilon_o=0,107$, los cuales son pequeños comparados con los medidos por Gottlieb ($P_\epsilon \approx 70^\circ$ y $\epsilon_o \approx 0,42$). Debido a que un aumento de n haría estas cantidades aún más pequeñas, se concluye que para la corrida 3S no hay posibilidades razonables de ajuste.

Los resultados experimentales obtenidos por Gottlieb en su corrida 4S fueron $P_\epsilon \approx 42^\circ$ y $\epsilon_o \approx 0,45$, mientras que los arrojados por el programa de computación para $n = 1,92$ y $f_b = 0,271$ fueron $P_\epsilon = 73,7^\circ$ y $\epsilon_o = 0,18$. Un intento de ajuste en este caso alejaría a ϵ_o aún más del valor observado.

En vista de que para los experimentos 3S y 4S de Gottlieb no fué posible hacer ajustes razonables del coeficiente de Nunner n que condujeran a valores razonables de P_ϵ y ϵ_o que correspondieran a la topografía del lecho observada, se intento explicar el hecho por las siguientes causas. El factor de fricción (y la correspondiente pendiente) para cada uno de los experimentos de fondo móvil de Gottlieb fueron calculados por el método ALK (Alam-Lovera-Kennedy). Dicho método se basa sobre numerosos datos tomados cuidadosamente en experimentos en que se aproximó, lo mejor posible, la condición de flujo uniforme. Por otra parte, Gottlieb expresa que fué difícil determinar, cuándo se estableció una condición de equilibrio debido a la relativamente rápida migración de las deformaciones del lecho. Eso dificulta establecer la constancia, aproximada, de la profundidad del flujo principal a lo largo del canal, y el prolongar la duración del experimento no es garantía de la inexistencia de flujo gradualmente variado. El hecho de que la longitud total del canal fuese de solo una y media longitud de onda realza la posibilidad anterior de no aproximar un flujo uniforme. Los valores predichos de f_b y S_o para los experimentos de Gottlieb y la diferencia porcentual de S_o se presentan en la Tabla VI-3. Los resultados anteriores evidencian que en las corridas 3S y 4S no existió flujo uniforme y en consecuencia, el modelo analítico no es válido para esos casos. Puede observarse en (V-16) que el valor de S_o afecta directamente a la magnitud de los términos de gradiente transversal de presiones y fuerza centrífuga, precisamente los términos más grandes del miembro derecho de la ecuación. Este efecto se

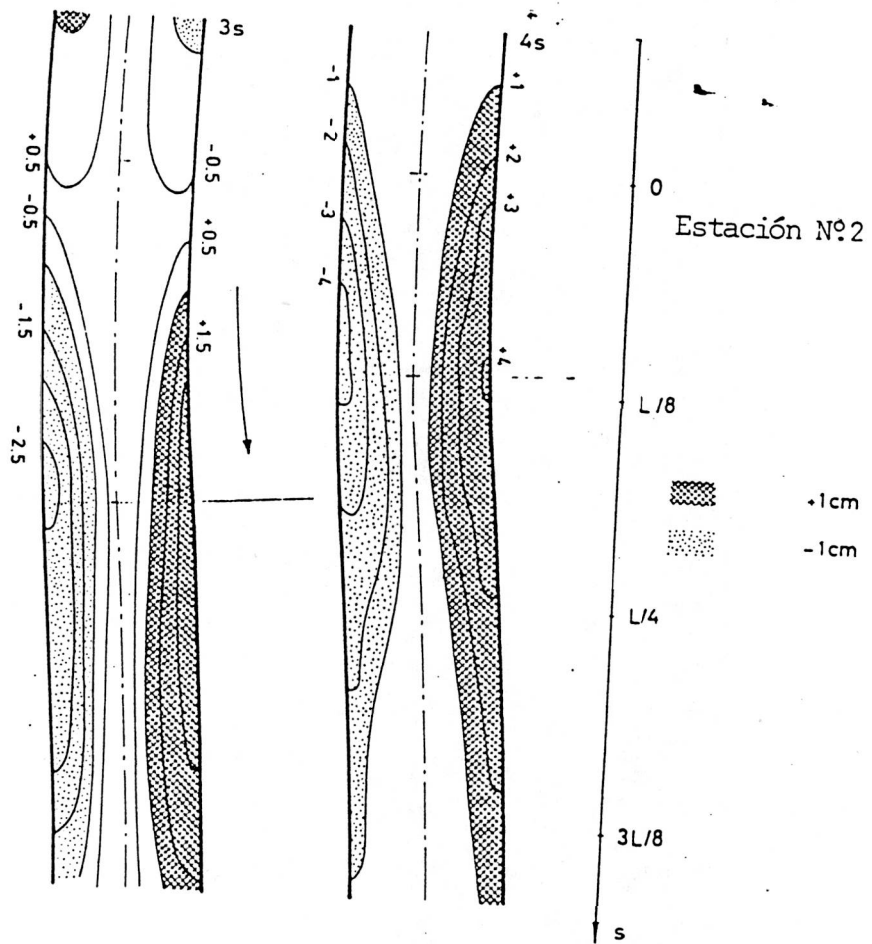


FIGURA V-4

TOPOGRAFIAS DE LOS LECHOS CORRESPONDIENTES
A LAS CORRIDAS 3S y 4S DE GOTTLIEB (1976)

profundidad en cms.

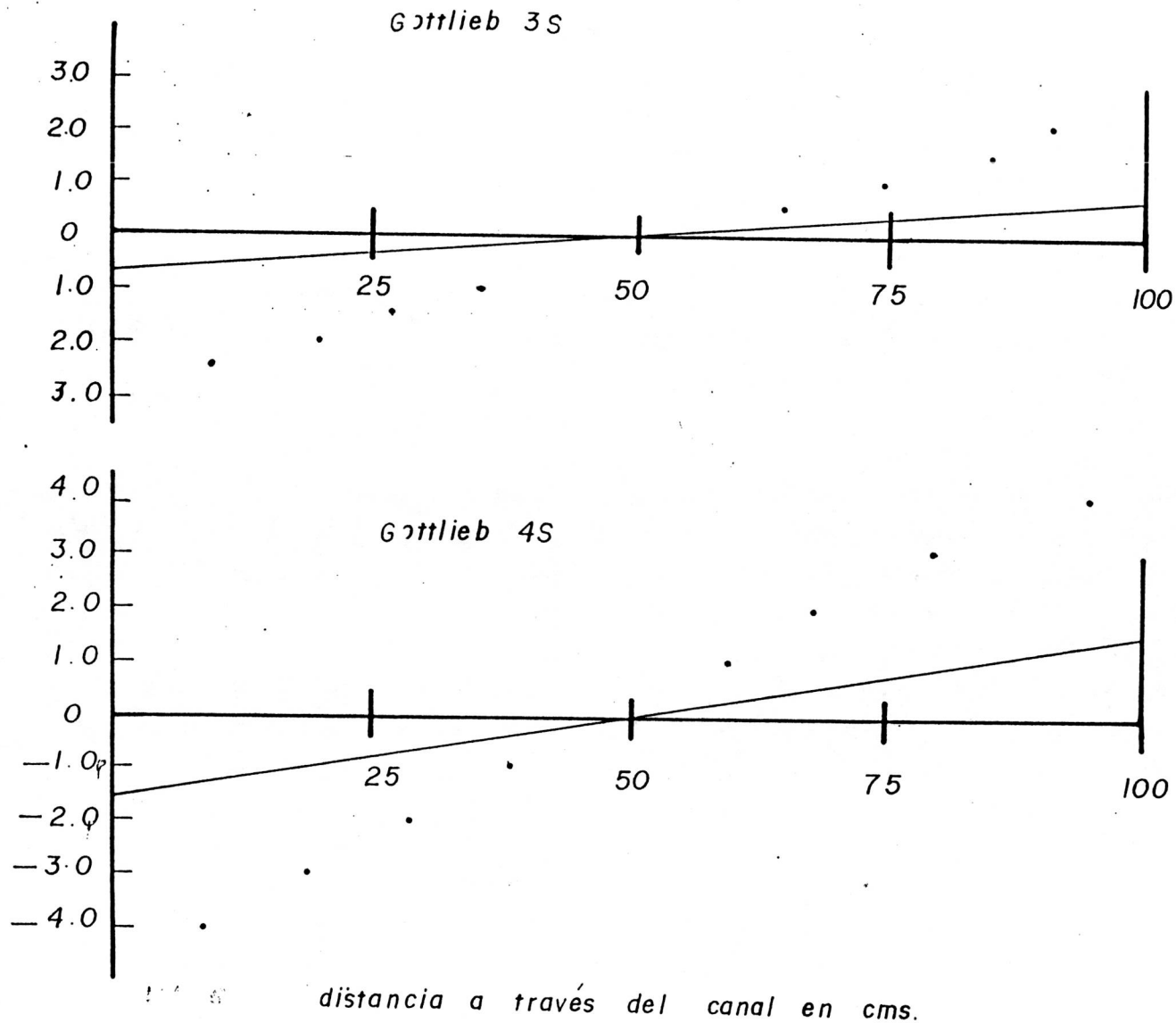


FIG. VI-5 PERFILES TRANSVERSALES DEL LECHO PARA $S=\delta_c$ medidos en los ensayos 3S y 4S de Gottlieb (1976), comparados con los obtenidos por el presente modelo analítico.

TABLA VI-3.

PENDIENTES OBSERVADAS Y CALCULADAS PARA LOS EXPERIMENTOS
DE GOTTLIEB EN FONDO MOVIL

| Corrida Nº | f_{ALK} | S_{ALK} ($\times 10^3$) | S_{REP} ($\times 10^3$) | $\frac{S_{REP} - S_{ALK}}{S_{ALK}} \times 100\%$ | |
|---------------|-----------|--------------------------------|--------------------------------|--|-------|
| 1S | 0.135 | 1.41 | 1.09 | -29.4 | 0,029 |
| 2S | 0.202 | 2.15 | 2.15 | 0 | 0.032 |
| 3S | 0.213 | 0.74 | 1.54 | 108.1 | 0.032 |
| 4S | 0.269 | 0.97 | 2.25 | 132.0 | 0.036 |

transmite a la magnitud de $\partial\mu/\partial\eta$ y en consecuencia a la magnitud del esfuerzo cortante transverso. La inaplicabilidad del análisis es también sugerida por el hecho de que la distancia longitudinal desde el punto donde ocurre el lecho sin pendiente transversa, hasta el punto donde aparece la máxima inclinación transversa, difiere crecientemente de $M/4$ a medida que la diferencia porcentual en la pendiente longitudinal aumenta. Por lo tanto, parecería que la no uniformidad del flujo primario estuviese asociada con la existencia de armónicos superiores presentes en la topografía del lecho (ver figuras VI-2 y VI-4). A la luz de las últimas referencias mencionadas en la revisión bibliográfica es posible que hayan coexistido barras alternadas junto a las barras fijas correspondientes a la sinuosidad del canal experimental de Gottlieb. Esto explicaría la anomalía batimétrica antes citada.

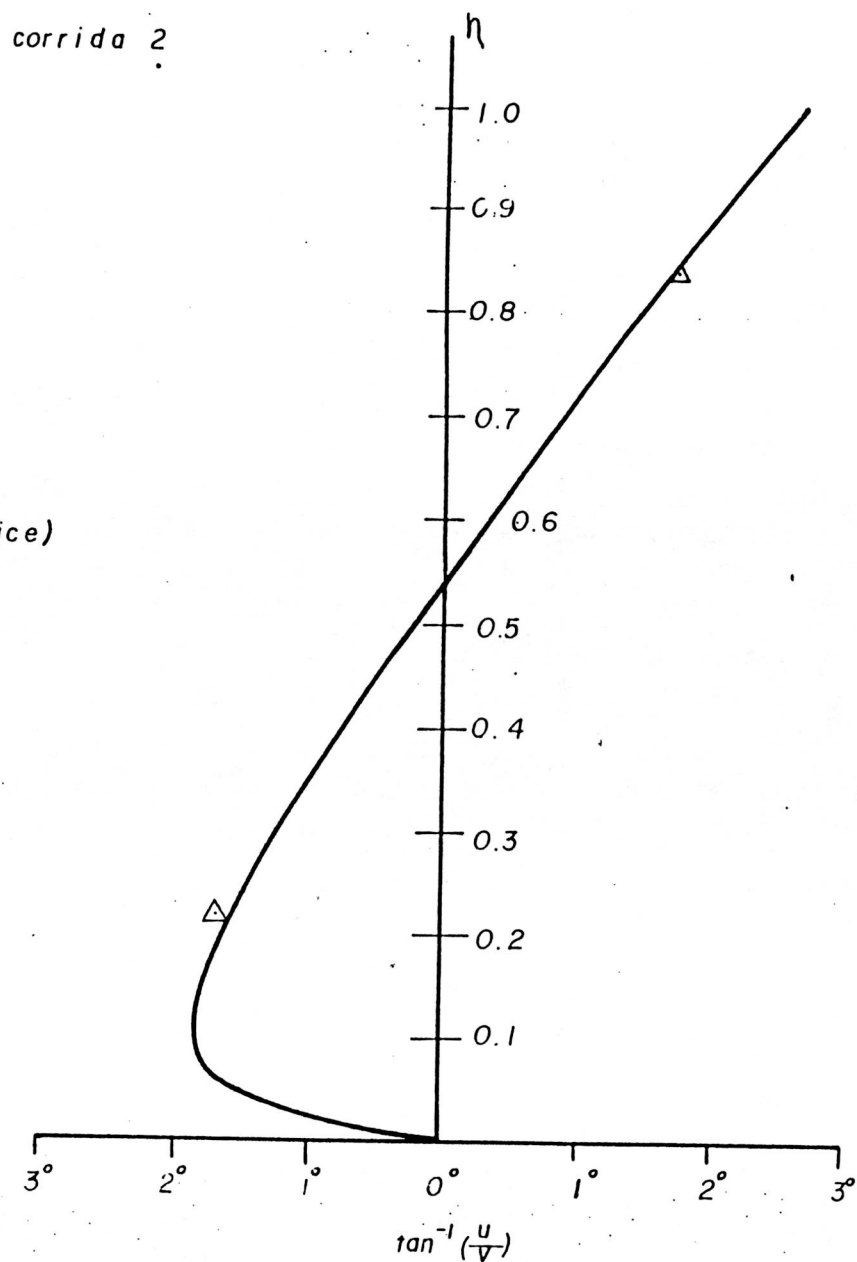
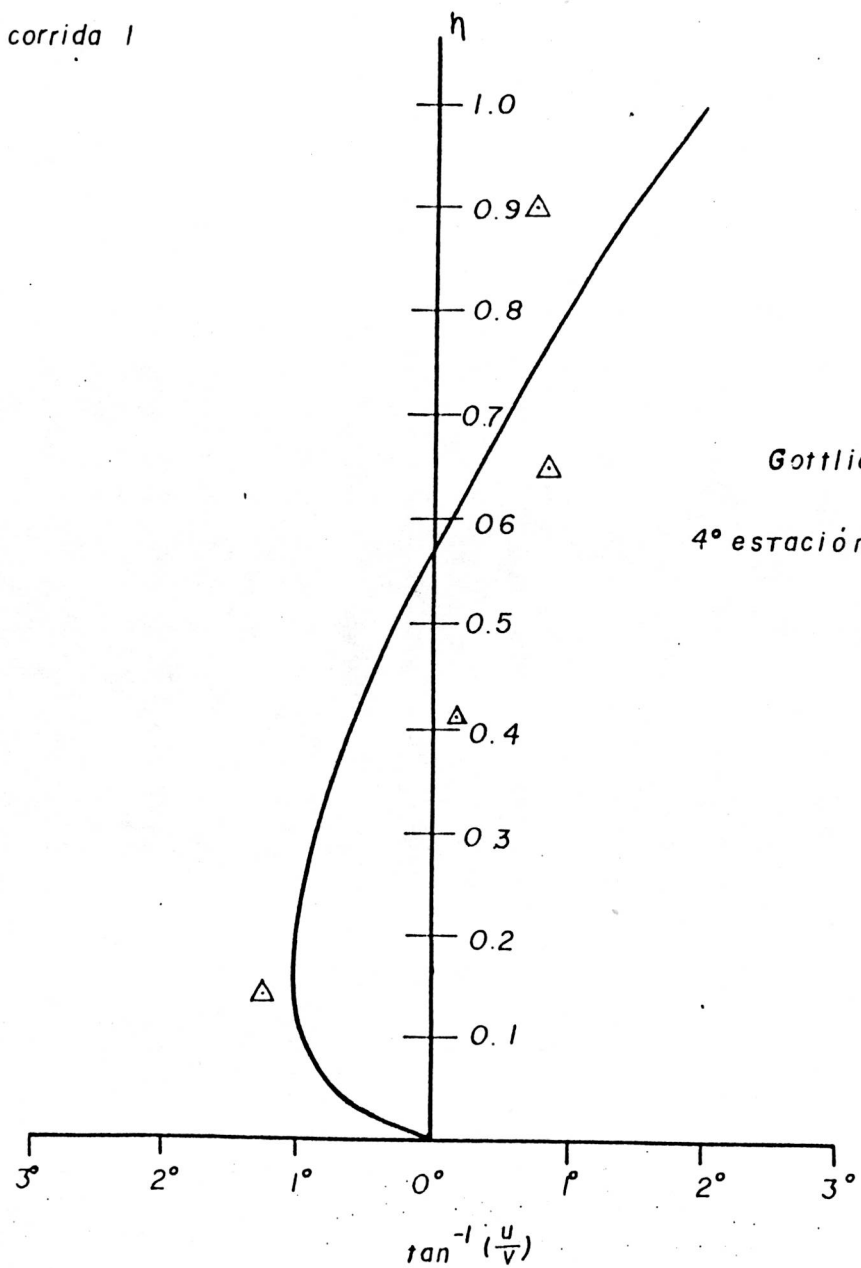
VI.1.2) Experimentos con Fondo Rígido

El programa computacional desarrollado para flujos débilmente meandrosos sobre lechos de fondo móvil puede utilizarse para casos de fondo rígido mediante el artificio de suponer un valor del diámetro de sedimento muy grande, por ejemplo, 1m. o 10m., con valores de p' de 4 y 6, respectivamente. Los resultados, para cualquiera de las cuatro combinaciones de D_{50} y p' , arrojaron las mismas magnitudes para todas las cantidades pertinentes al flujo secundario. La horizontalidad transversa del lecho es garantizada por el hecho de que $\epsilon_o=0,0000$ para todos estos casos. Los valores calculados se presentan en la Tabla VI-2 para ambas corridas de Gottlieb sobre fondo rígido.

Las distribuciones verticales computadas de $\tan^{-1}[\mu(\eta)/v(\eta)]$ en el eje central para el ápice del canal (correspondientes a la estación 4 del canal de Gottlieb en su figura 5.1) se muestran para ambas corridas sobre fondo rígido en la figura VI-6. Los valores medidos por Gottlieb se incluyen en las figuras (triángulos con punto central).

corrida 1

corrida 2



Gottlieb
4° estación (ápice)

FIGURA. VI-6 (PAG. 147. FALCON 1979.)

VI.1.2.1) Discusión de Resultados con Fondo Rígido

Para los dos experimentos de Gottlieb sobre fondo rígido las distribuciones computadas de $u_c(\eta)$ en el ápice del canal (sitios de máxima curvatura) indican que cerca del fondo el flujo secundario va hacia la margen exterior de la curva, mientras que cerca de la superficie libre se dirige hacia la margen interior. Este resultado es contrario a lo observado en flujos completamente desarrollados en curvas con radio de curvatura constante. Al tener en cuenta la incertidumbre presente en la medición de tan pequeños ángulos indicados en la figura VI-6, la semejanza entre las mediciones de Gottlieb y la predicción hecha con el modelo se considera muy aceptable. Adicionalmente, el hecho de que se prediga el revés de la distribución vertical de $u_c(\eta)$, arriba citado, el cual se debe a la influencia de los términos representativos de la inercia del fluido, le brinda credibilidad al modelo analítico aquí desarrollado.

VI.2) Experimento de Ikeda y Nishimura

Ikeda y Nishimura (1985) llevaron a cabo experimentos en un canal sinuoso para el cual $w = 0,698$ rads., $M = 3m.$, $R_{min} = 0,684m.$, $B = 0,30m.$ y $S_o = 0,00139$. Para un experimento particular reportan los valores indicados como Datos en la Tabla VI-4. Como no indican arrastres sólidos se determinó p' con el valor de $p = 2,63$ proveniente de los experimentos de Gottlieb como

$$p' = \frac{p}{1 - \sqrt{\tau_{cr}/\tau_c}} = 4,91.$$

Los resultados experimentales se presentan en la figura VI-7, tomada de Ikeda y Nishimura. Los casos denotados (a) y (b) corresponden a los cálculos de los autores citados incluyendo el arrastre suspendido y excluyéndolo, respectivamente. Ellos indican que el caso (a) arroja un 8% más de profundidad que el caso (b). El caso (c) presenta la batimetría medida luego de 24 horas de flujo, suficiente para lograr equilibrio con el sistema recirculante utilizado.

TABLA VI-4
(IKEDA Y NISHIMURA)

Diametro D50

Datos: DC = 0.0537 mts. RMIN = 0.6839 mts.
WM = 3 mts. W = 0.6981
BW = 0.3 mts. So = 0.00137
VC = 0.161 m/seg. FZ = 4
PG = 4.91 DP = 0.00015

Resultados:

Pv = 0.8168 Pe = 1.1612
Pu = 4.87 E-2 P = 0.1903
Pt = 0.5455 Vo = -3.2841
Eo = 3.3065 UA = 9.43 E-3
TA = -4.594 E-2 HM = 4.809 E-3

Diametro equivalente

Datos: DC = 0.0537 mts. RMIN = 0.6839 mts.
WM = 3 mts. W = 0.6981
BW = 0.3 mts. So = 0.00139
VC = 0.161 m/seg. FZ = 4
PG = 4.91 DP = 0.000269

Resultados:

Pv = 0.5088 Pe = 0.886
Pu = 4.285 E-2 P = 0.1394
Pt = 0.4698 Vo = -2.26
Eo = 3.0355 UA = 4.747 E-3
TA = -4.488 E-2 HM = 4.795 E-3

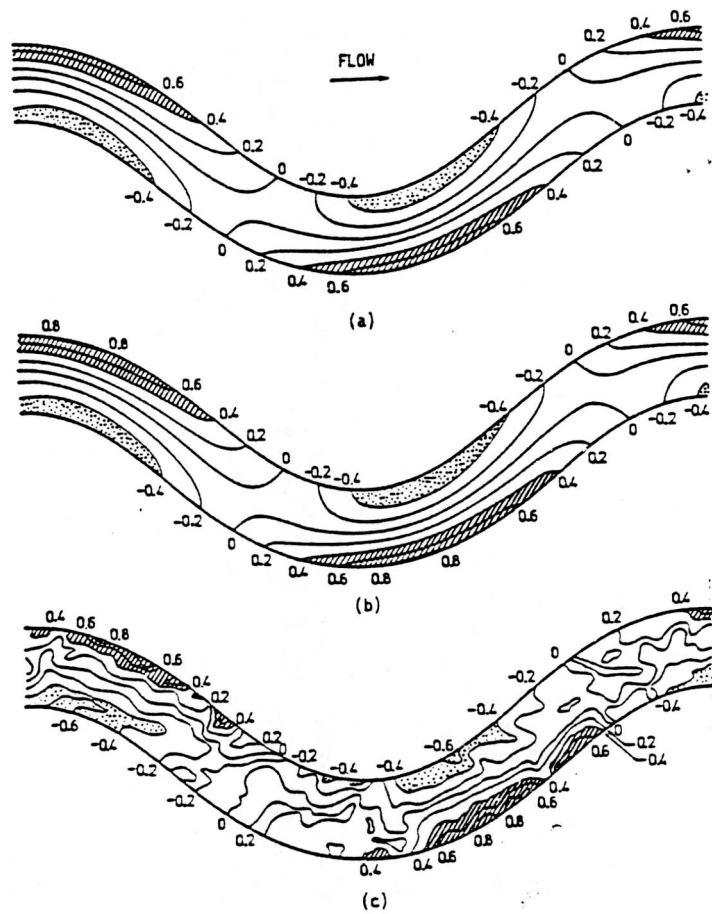


FIGURA VI.7 (EXP. DE IKEDA Y NISHIMURA)

a) Teoría sin suspensión.

b) Teoría con suspensión.

c) Medición experimental.

En ella se puede estimar un desfase batimétrico de aproximadamente 45° , es decir 0,785 rads. Como se observa en la Tabla VI-4, el uso del diámetro equivalente (hipótesis de Karim-Kennedy) arroja un valor cercano de 0,89 rads. El valor experimental, equivalente a ϵ_o , de 4,7, sin embargo es mayor que el valor teórico de 3,04 indicado en la Tabla VI-4. Por el contrario, si se usa el D_{50} el valor de ϵ_o de 5,3 sobrepasa el experimental, y el desfase batimétrico también es exagerado. Tomando en cuenta la estimación poco cierta del parámetro p' y el hecho de que el canal no es débilmente meandroso, se puede concluir que la teoría arroja valores cercanos a, o del mismo orden de magnitud que, las magnitudes medidas.

VII) DISEÑO Y CONSTRUCCION DE UN CANAL DEBILMENTE MEANDROSO

A objeto de verificar aún más el desarrollo teórico presentado en el capítulo V se construyó un canal meandroso en el Instituto de Mecánica de Fluidos de la Universidad Central de Venezuela (ver fotos VII-1 y VII-2).

VII.1) Características del Canal

El canal se apoyó sobre una viga de aluminio en forma de cercha, de 28 m. de longitud y 0,80 m. de ancho. La pendiente del canal se puede variar entre cero y uno por mil (0,001) mediante el accionamiento de un motor a tal efecto. El fondo del canal consistió de tablonces de contraenchapado marino de 122 cm. de ancho, de longitud variable y de 2 cm. de espesor, colocados y nivelados en posiciones predeterminadas de acuerdo al diseño; luego fueron lijados y barnizados para alisar e impermeabilizarlos, respectivamente. En las juntas se usó una pasta de aserrín y barniz, que además de impermeabilizar, garantizó la continuidad del fondo (ver figura VII-1a). Como paredes se utilizaron láminas de acetato, de 22 cm. de alto, 250 cm. de largo y 1 cm. de espesor, unidas entre sí y al fondo del canal mediante tornillos (ver figuras VII-1b y VII-1c, respectivamente). El material plástico para las paredes se eligió por su facilidad de colocación para seguir la geometría del diseño, por su flexibilidad y alta resistencia y por ser transparente, lo cual facilitó la colocación de

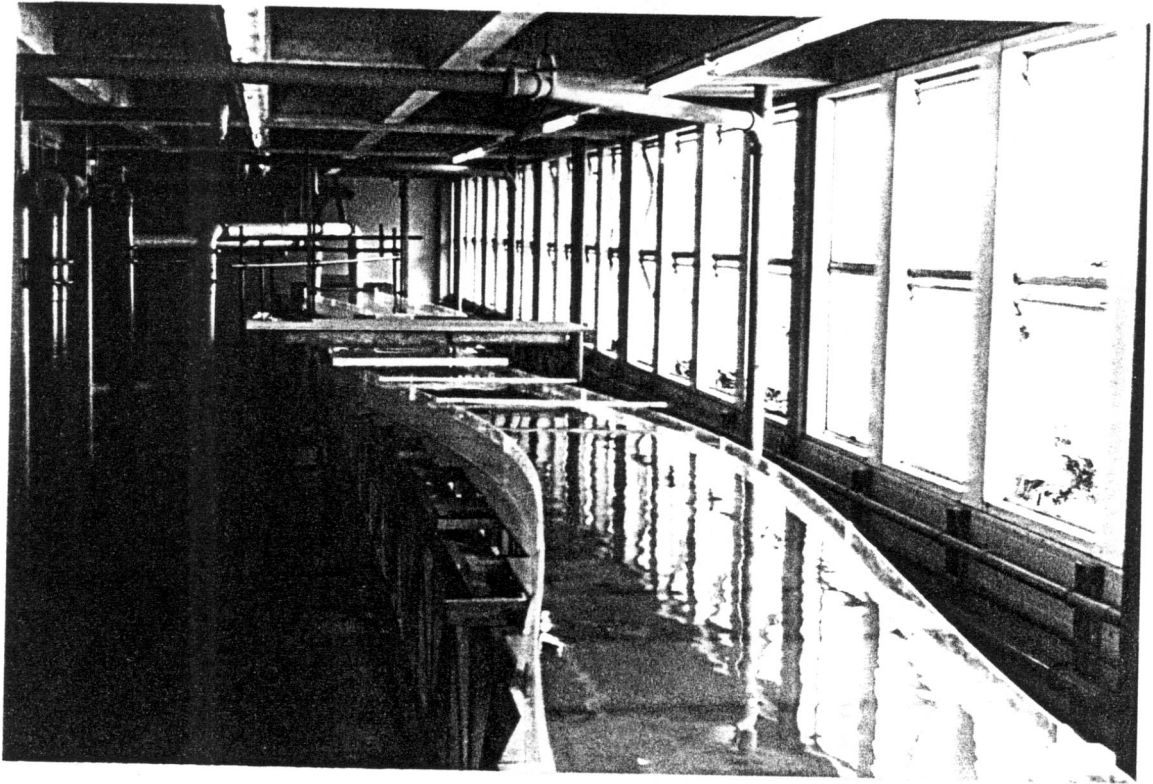


FOTO VII-1

VISTAS DEL CANAL CONSTRUIDO

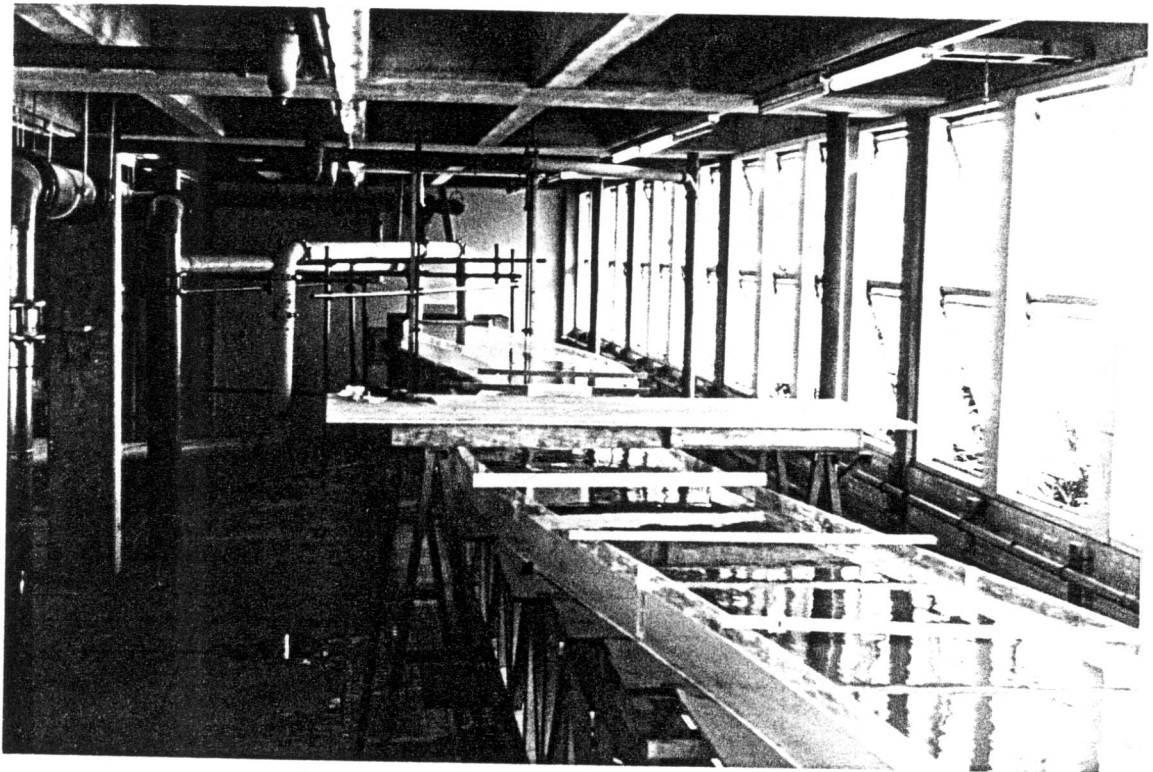
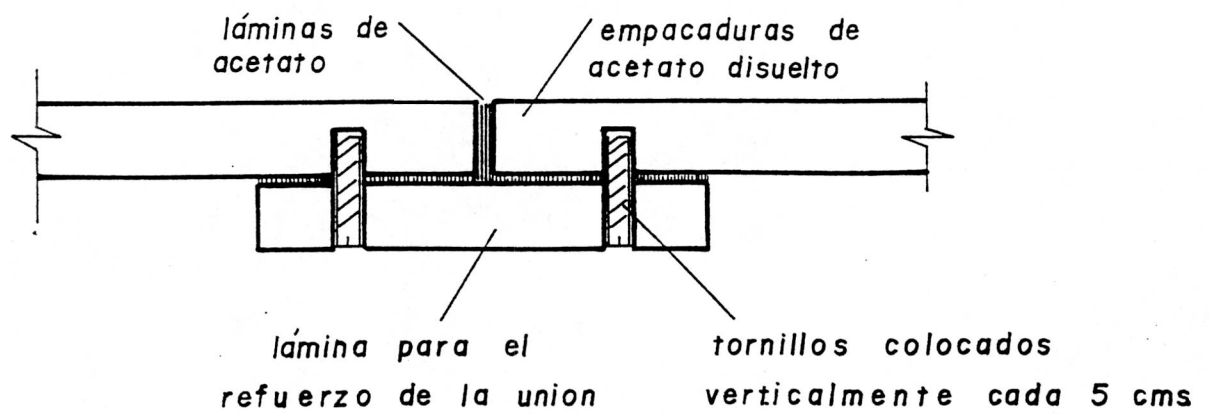
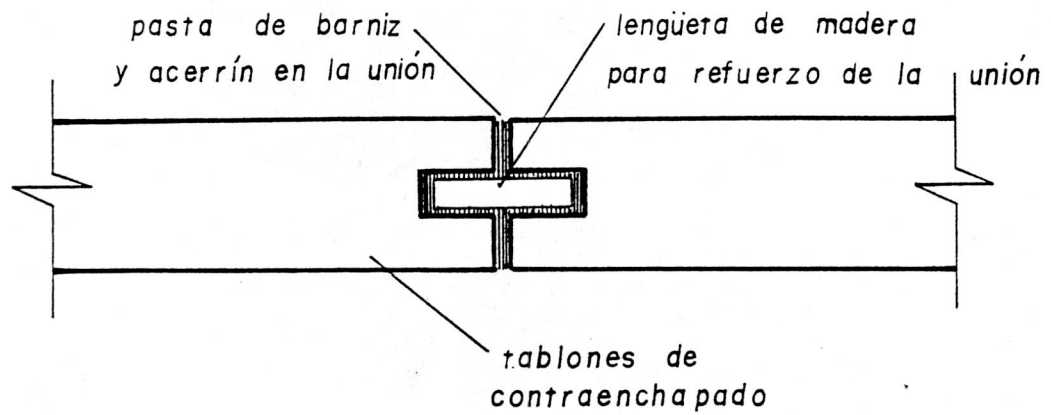


FOTO VII-2



FIGURAWI-Ia y b. Juntas entre tablón y tablón, pared y pared

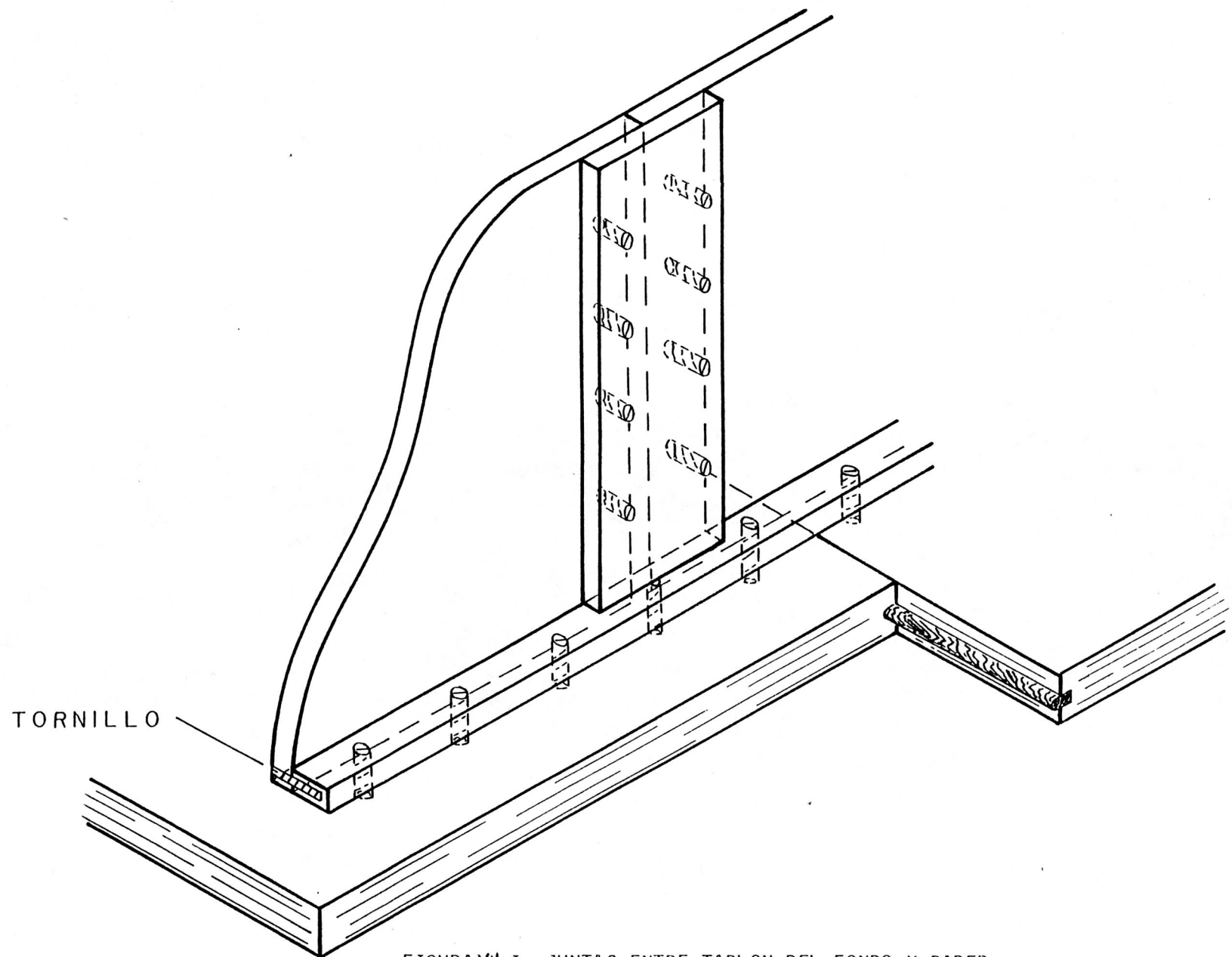


FIGURA VII-Ic JUNTAS ENTRE TABLON DEL FONDO Y PARED

equipos de medición así como la determinación visual de diversas mediciones.

Las dimensiones del canal que se esquematiza en la figura VII-2 se escogieron iguales a las del canal de 1m. de ancho construido por Gottlieb (1976), a excepción del ángulo w que se seleccionó igual al doble, es decir a 0,1568 rads. (aproximadamente 9°) y la longitud total del canal se aumentó hasta dos y media longitudes de onda (una longitud de onda más que el canal de Gottlieb). Estos dos cambios se introdujeron para hacer más notorio el fenómeno del flujo transversal y para disminuir el efecto de perturbaciones desde los extremos del canal que pueden dificultar lograr la existencia de un flujo pseudo-uniforme en el canal.

La estructura de admisión consistió en un tanque de madera suficientemente grande para disipar la macroturbulencia creada a la salida de las tuberías de alimentación. El tanque fué unido al canal meandroso mediante una transición con una colmena de aluminio intermedia para uniformizar la distribución de velocidad a la entrada al canal (ver foto VII-3).

En las dos tuberías de alimentación, de $\phi = 8$ pulgadas de diámetro, se colocaron placas orificio, previamente calibradas con un transductor electrónico de presión, a objeto de conocer el caudal que circulaba en el canal en cada experimento.

La estructura de salida consistió en una compuerta basculante, seguida de un embudo colector que unido a un canal recolector de gran pendiente conducía el agua al estanque de depósito del Laboratorio de Hidráulica (ver foto VII-4).

VII.2) Medición de las Pendientes del Canal y del Flujo

A objeto de poder determinar la pendiente media longitudinal del fondo rígido del canal, y también la pendiente media de la superficie libre del flujo para cualquier experimento, se agujereó el fondo del canal a lo largo de su eje longitudinal central, cada 3m., colocando tubos de bronce a ras con el fondo para evitar perturbaciones de la presión hidrostática debido a rebabas. A estos tubos, por su extremo inferior, se les colocaron

zona en la cual se tomaron las
medidas con el propósito de minimizar
las influencias de la entrada y la salida

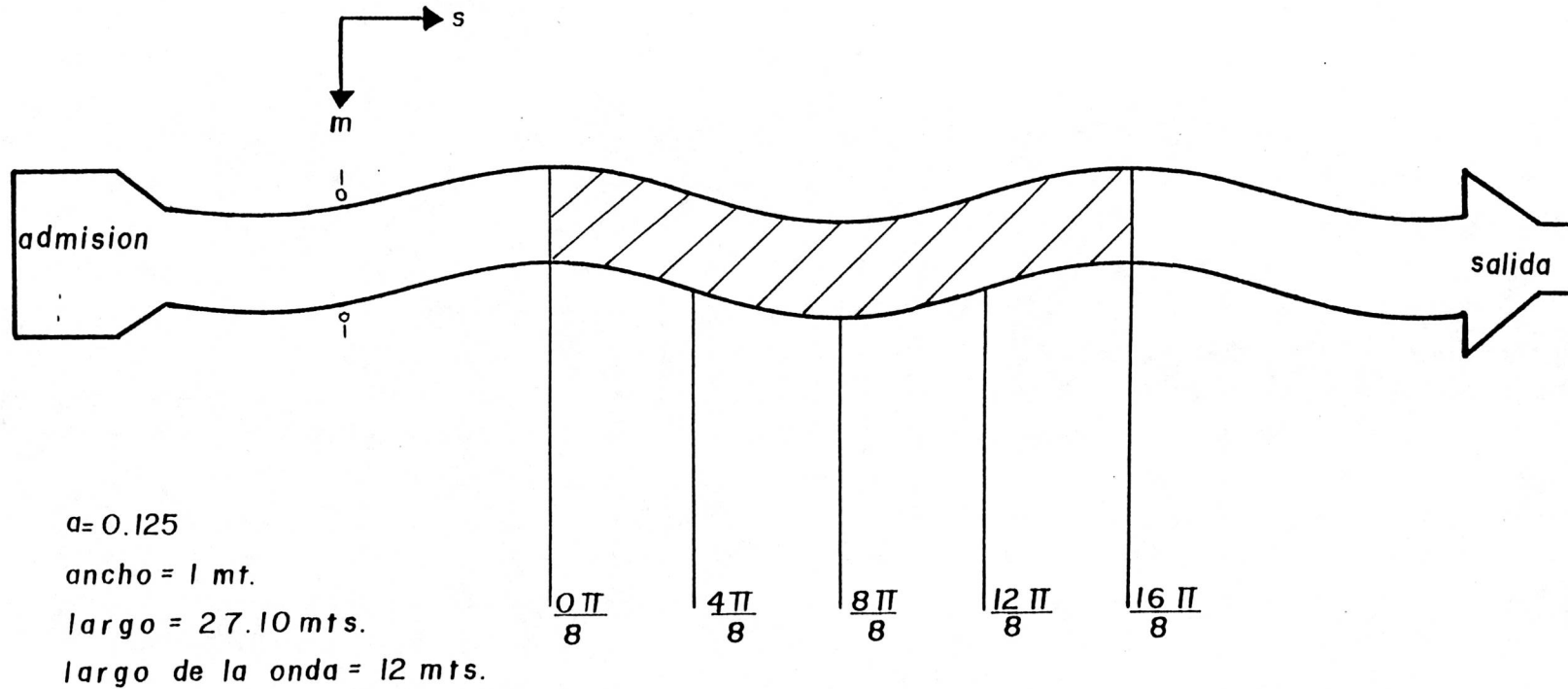


FIGURA VII-2. ESQUEMA QUE DEFINE EL CANAL CONSTRUÍDO

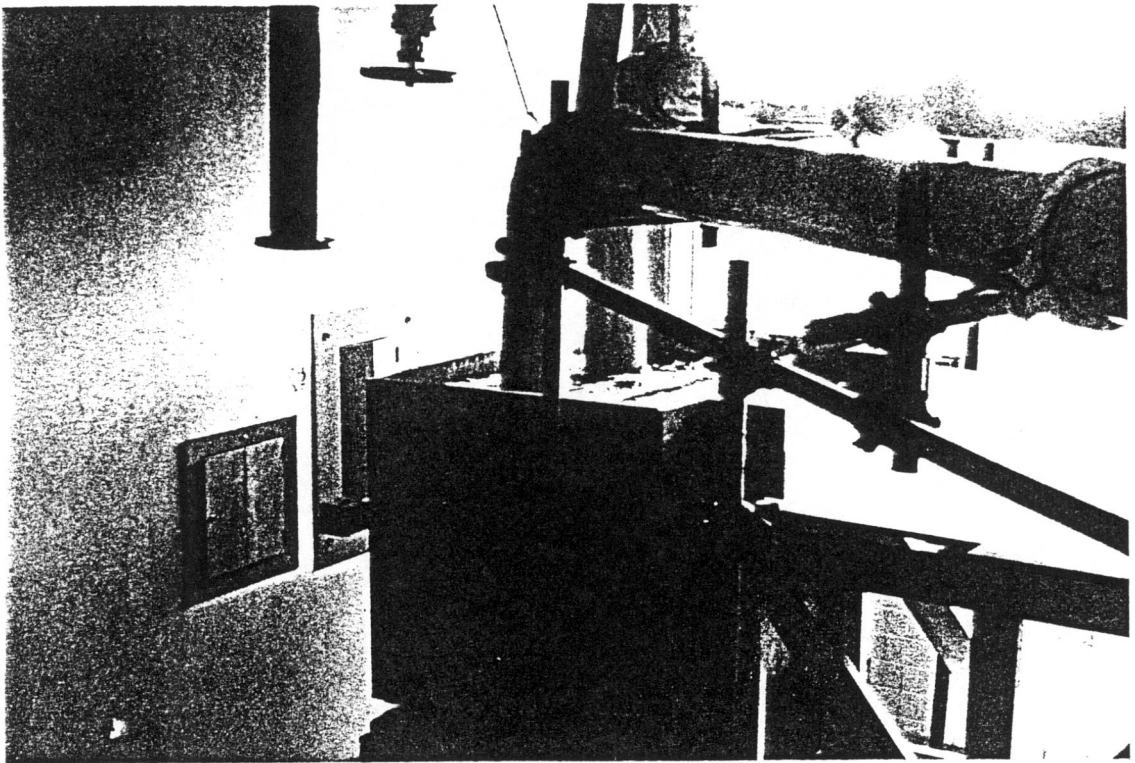


FOTO VII-3
ADMISION Y SALIDA

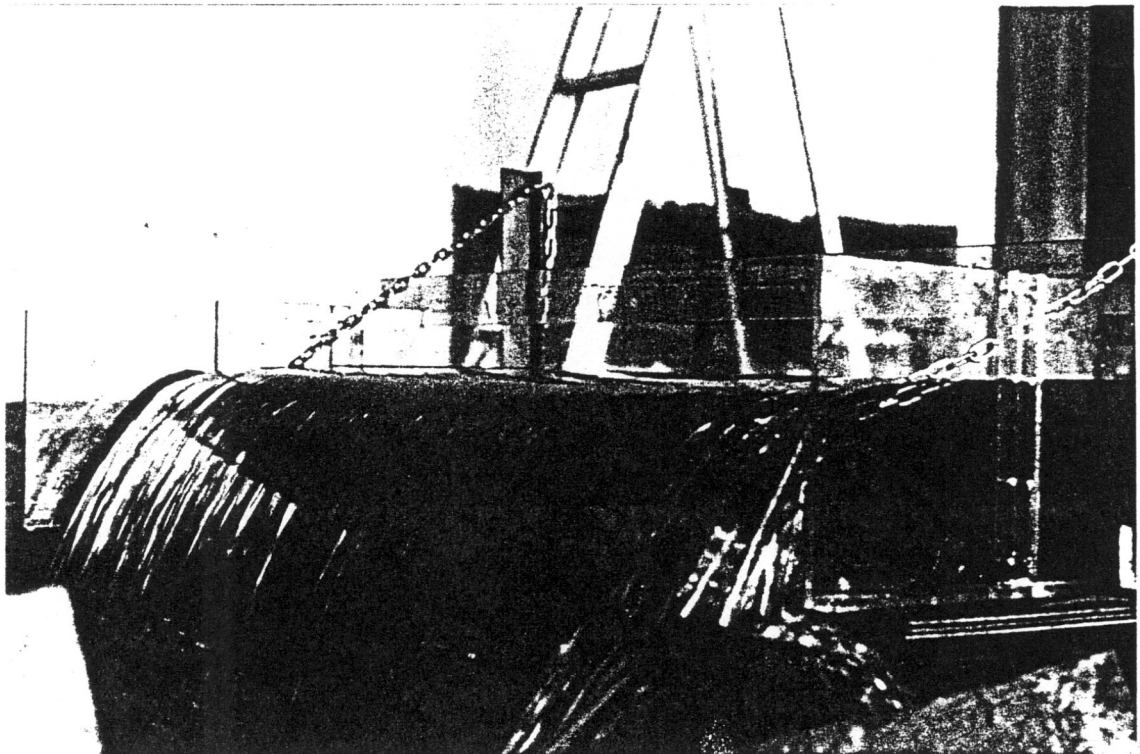


FOTO VII-4

mangueras plásticas, de $\phi = 5/32$ de pulgada, que se extendían en forma de "U" y luego ascendían y se conectaban a tubos de vidrio verticales, abiertos a la atmósfera por su extremo superior, adheridos a una tabla de madera vertical atornillada a la pared vecina al canal, sobre la cual se fijó un papel milimetrado. Manteniendo un nivel estático de agua dentro del canal se obtenía un datum común para todos los piezómetros individuales. Este sistema de piezómetros, colocados cada 3m., permitía calcular la pendiente de la superficie libre del flujo por mínimos cuadrados. También, al vaciar el canal, los piezómetros registraban el nivel de la columna de agua a ras con el fondo, con lo que se determinaba la pendiente longitudinal del fondo. Esta información permitía ajustar la compuerta a la salida, o modificar el caudal y la pendiente del canal, hasta que ambas pendientes arriba citadas (la del fondo y de la superficie libre) fuesen lo más iguales posible, y así garantizar la existencia de un flujo aceptablemente pseudo-uniforme. Esto también podía verificarse determinando el coeficiente de Nunner, al adaptar la ley de la potencia a la distribución vertical de la componente longitudinal de velocidad medida, también por la técnica de mínimos cuadrados, y comparar la variación de dicho coeficiente sobre las sucesivas estaciones de medición. La condición de pseudo-uniformidad también significa que a cada media longitud de onda del meandro las distribuciones verticales de velocidad transversa deben ser de igual magnitud pero de signo contrario. Las estaciones antes citadas y su equivalencia con las secciones utilizadas por el programa computacional se muestran en las figuras VII-3 y VII-4.

VII.3) Equipo de Medición

La distribución vertical de la componente tangencial (longitudinal) de velocidad se midió con un micromolinete, calibrado en el Laboratorio de Hidráulica con un tubo de Pitot. El soporte de este aparato es de unos 50cm. de longitud y el elemento medidor consiste de una hélice de 1cm. de diámetro aproximadamente conectada a un registrador KENT MINIFLO no. 08-21638 con escala de 1 a 50 Hz. y 2 posiciones de lectura (x1

FIG.VII-3 ESTACIONES DE MEDICION

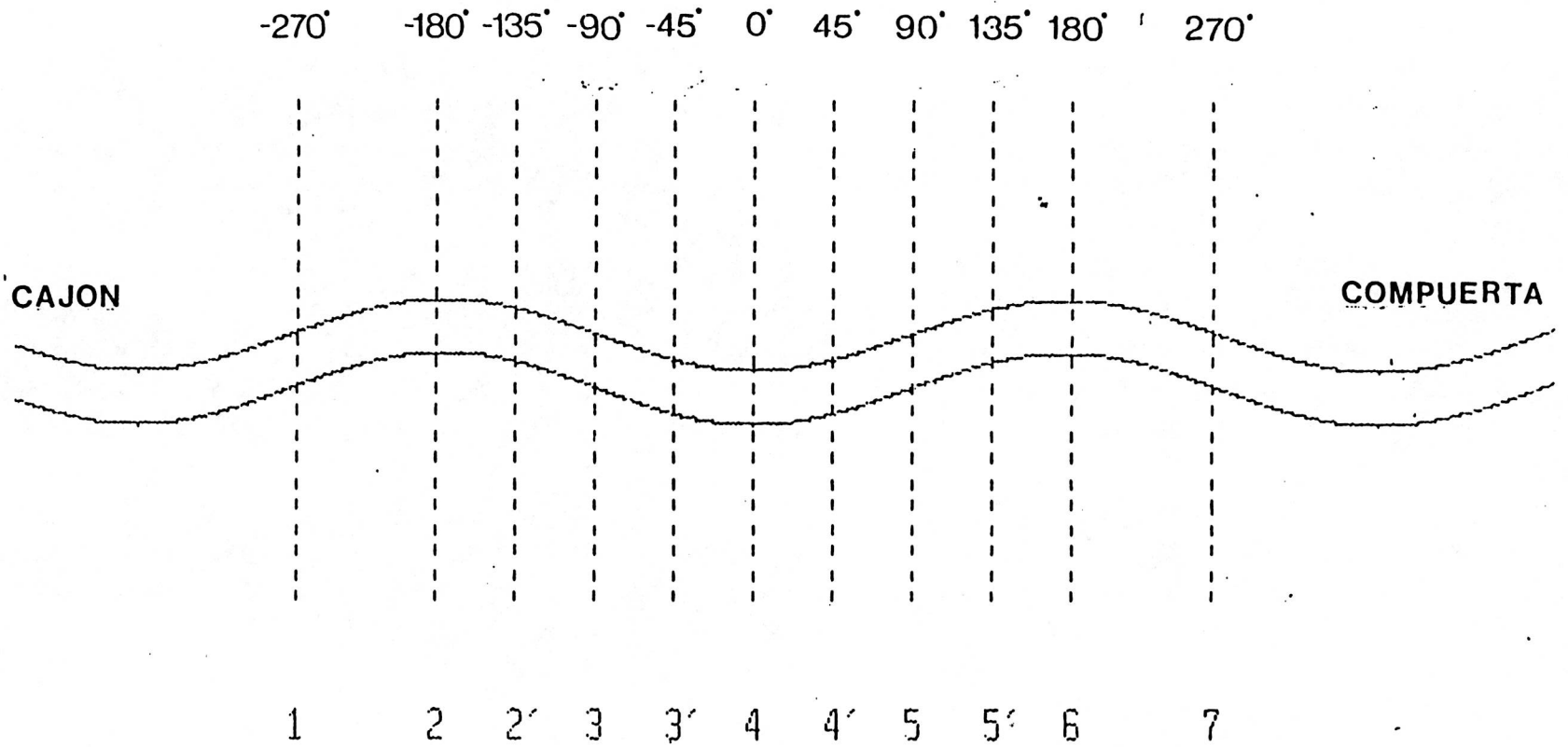


FIG. VII-4

DIAGRAMA DE LA UBICACION DE LAS SECCIONES DADAS
 POR EL PROGRAMA (en media longitud de onda)

Seccion de
 Medicion

4

4'

5

5'

Secciones dadas
 por el programa
 de Computacion

0

1

2

3

4

5

6

7

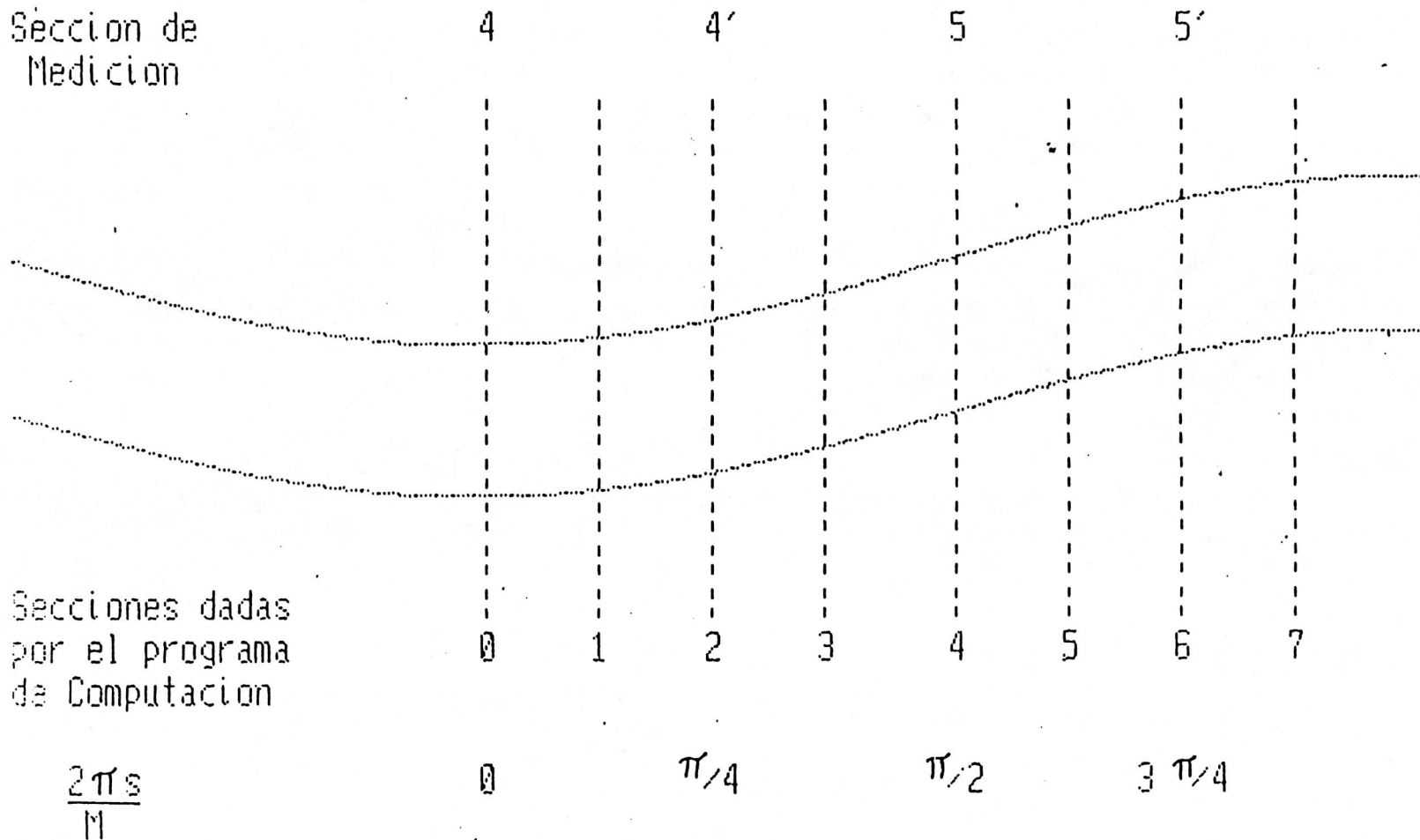
$$\frac{2\pi s}{M}$$

0

$\pi/4$

$\pi/2$

$3\pi/4$



y x5). Con la lectura tomada del registrador se entraba al gráfico de conversión (figura VII-5) para leer la velocidad.

La dirección del vector velocidad se determinó midiendo primero el ángulo de deflexión, respecto a la dirección longitudinal, de una veleta preparada especialmente para ese propósito (ver figura VII-6 y foto VII-5). Luego de varias pruebas se encontró que una tira de cartulina impermeabilizada con una delgada película de barniz, con forma trapecoidal de 15cm. de longitud, base mayor de 1,8cm. y base menor de 0,9cm., presentaba un comportamiento estable. Al introducirla en el flujo se hace colineal con el vector velocidad y su desviación angular respecto a la dirección longitudinal es leída mediante un sistema de dos transportadores centrados al eje que soporta, flexiblemente, a la veleta. Tanto este aparato como el micromolinete se montaron sobre un puente móvil (ver figura VII-6 y fotos VII-6 y VII-7), fácil de moverse de una estación de medición a otra, inclusive podía desplazarse transversalmente.

El micromolinete mostraba velocidades instantáneas cada 2,7 segs., las cuales se almacenaban hasta un total de 50 valores, para así calcular una media poco dispersa. El ángulo de desviación de la veleta se medía 30 veces, a intervalos aproximados de 2 segs. La apreciación del micromolinete fué de 1 cm/seg. y la del transportador fué de $0,5^\circ$.

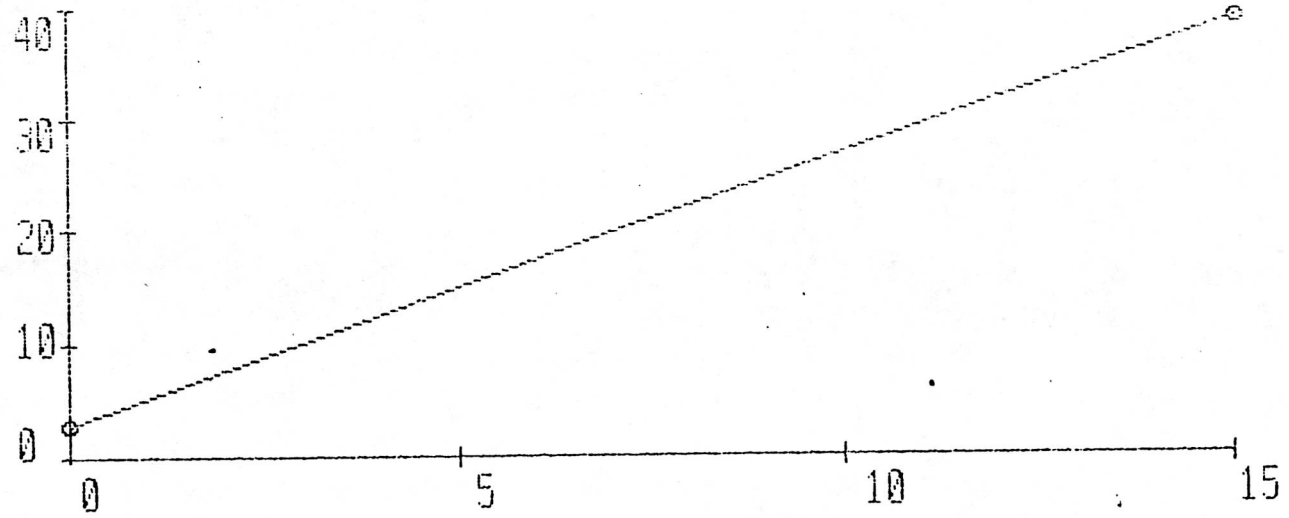
Por tratarse de ángulos de deflexión muy pequeños, la componente transversa de velocidad se calculó como el producto de la componente longitudinal por la tangente del ángulo de deflexión. Mayores refinamientos tales como intentar encontrar el ángulo de deflexión, respecto a la dirección longitudinal, del eje del micromolinete que diera la magnitud del vector velocidad en el plano horizontal, no condujeron a resultados más significativos que los obtenidos simplemente colocando el eje del micromolinete directamente en la dirección longitudinal.

Las mediciones antes citadas se llevaron a cabo en las estaciones indicadas en la Tabla VII-1 para tres experimentos con coeficientes de fricción diferentes. En el primero el fondo de madera se barnizó y las paredes verticales de plástico ofrecían poca resistencia, por lo

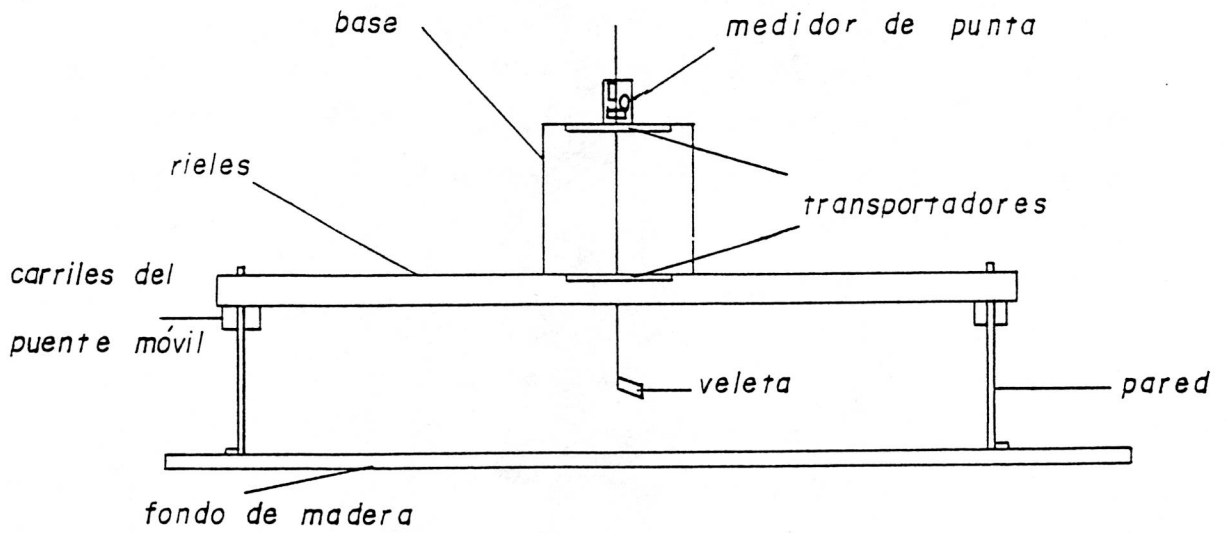
FIGURA VII-5

GRAFICO DE CONVERSION

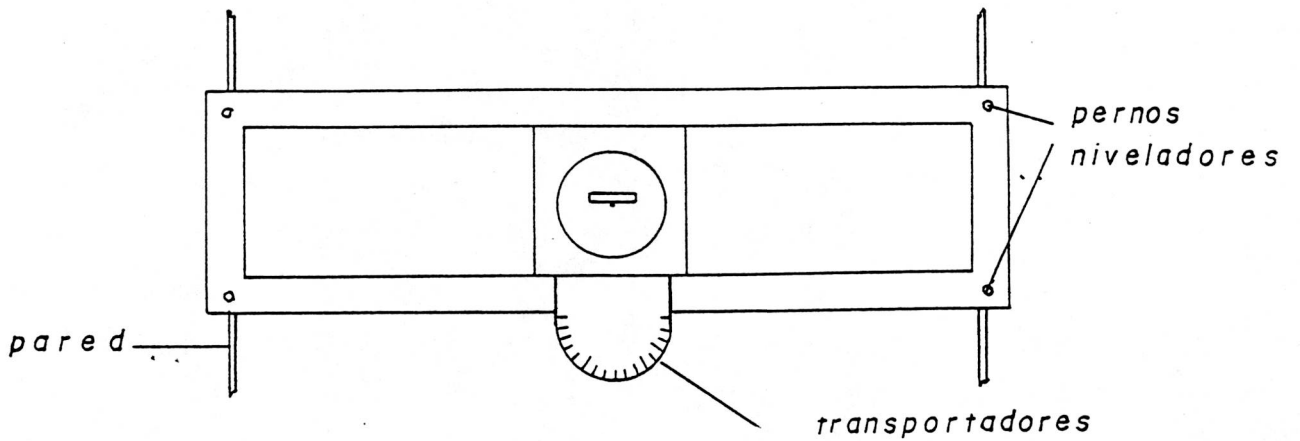
V (cm./seg.)



Lectura del Registrador



PERFIL



PLANTA

FIGURA VII-6 PUENTE MOVIL Y VELETA

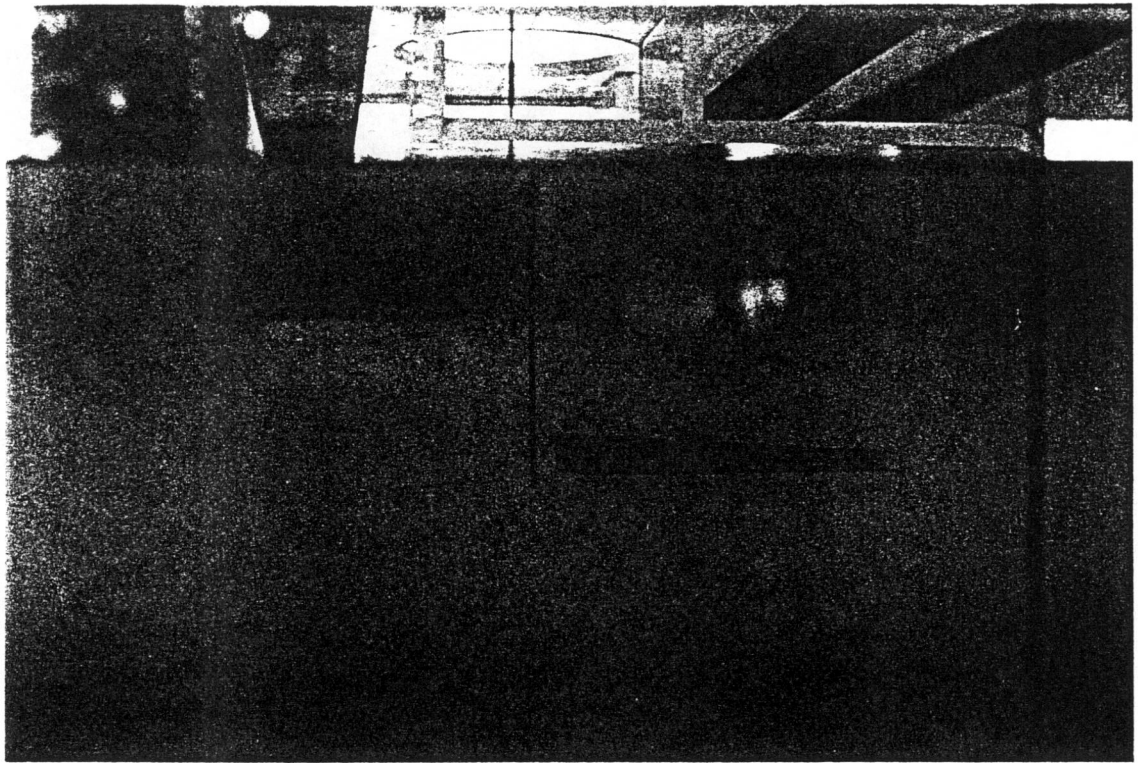


FOTO VII-5

DETALLE DE VELETA EN FUNCIONAMIENTO

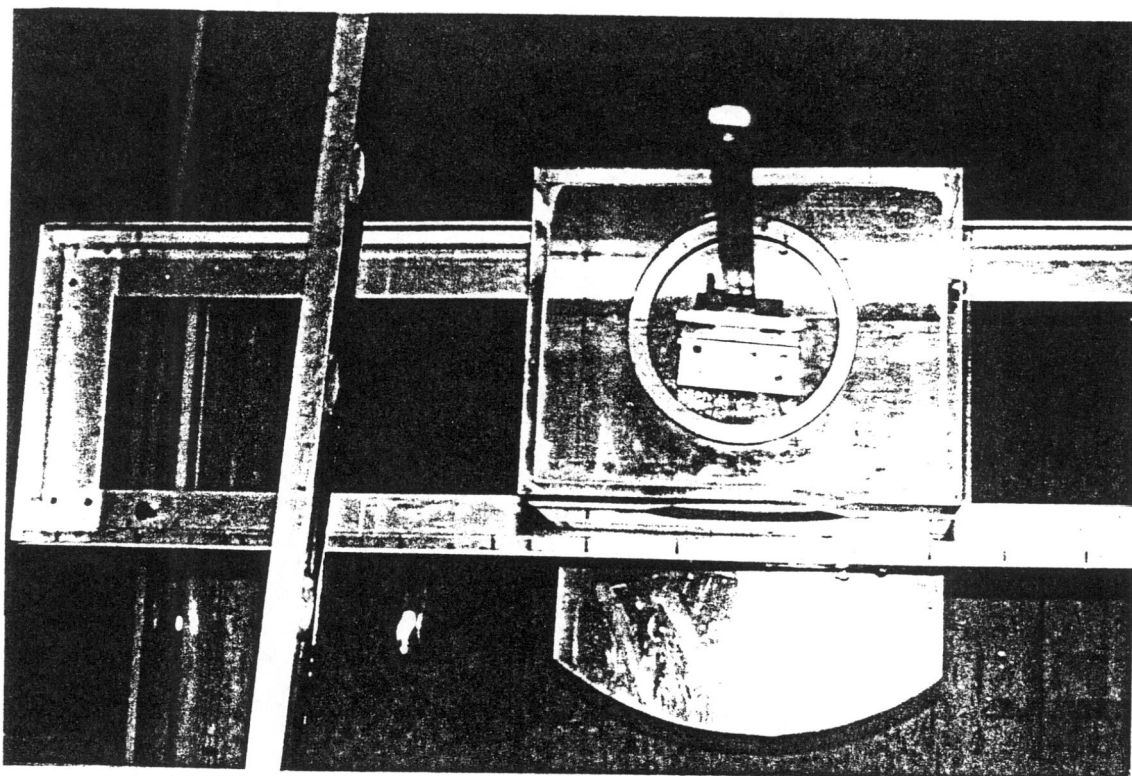
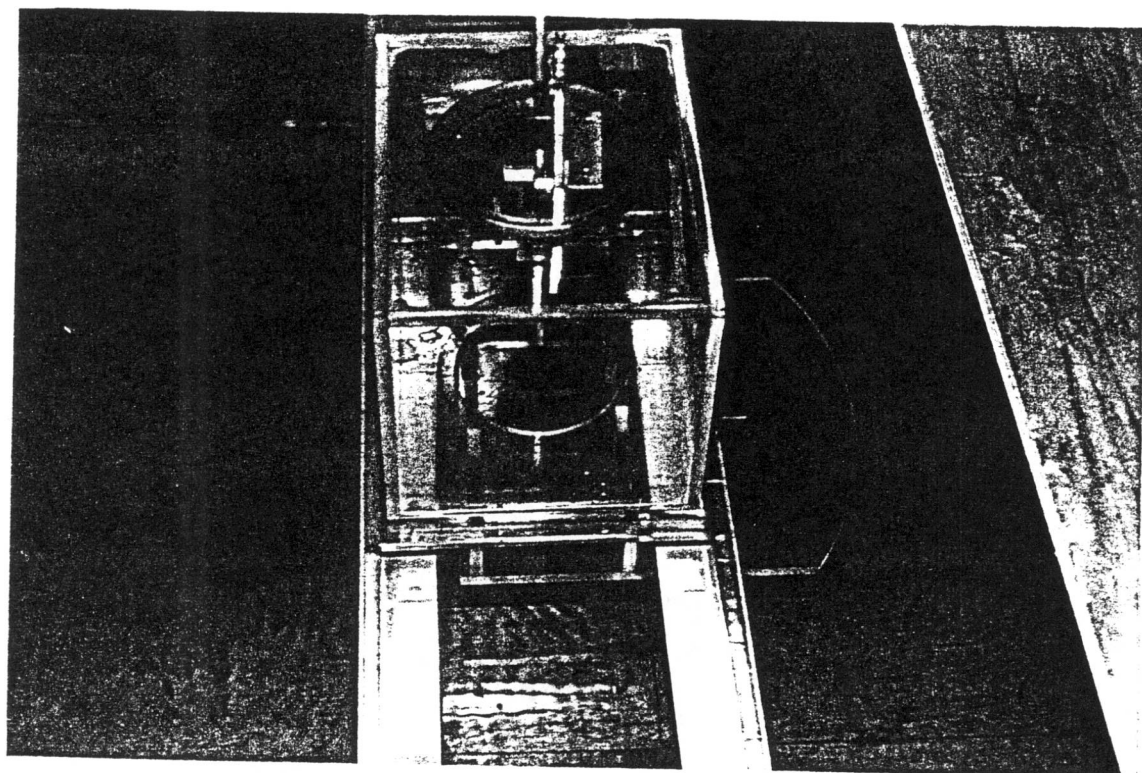
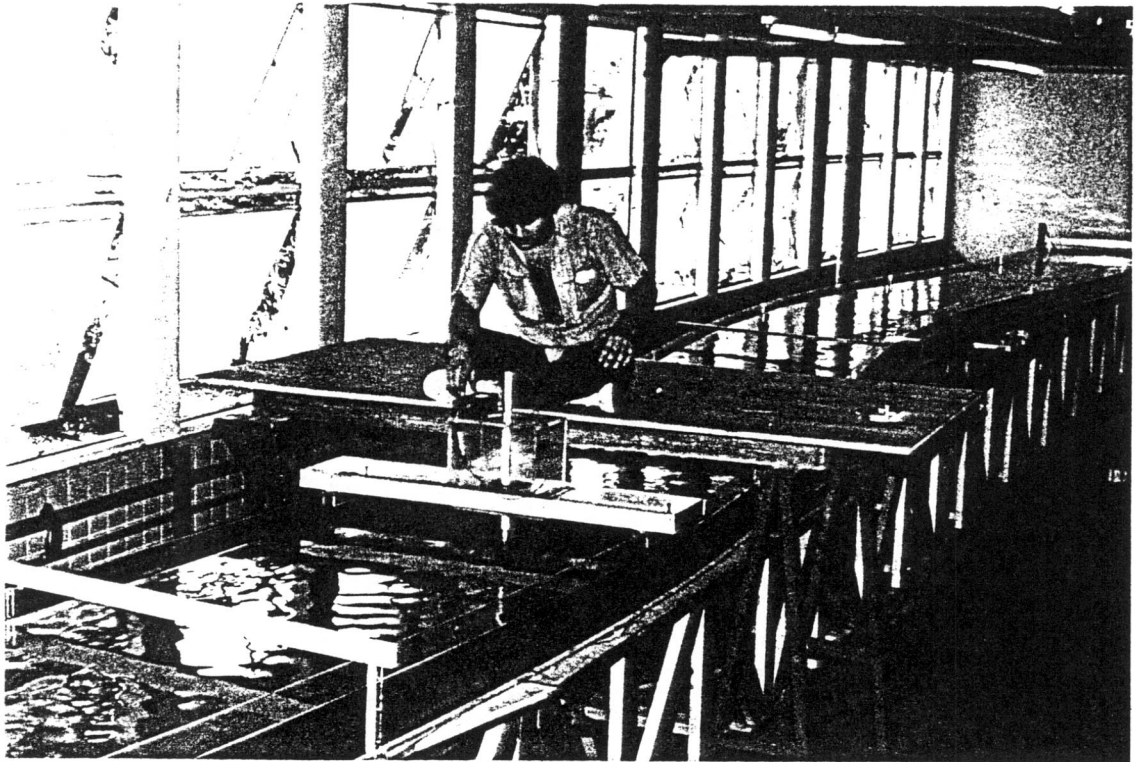


FOTO VII-6
PUENTE MOVIL, BASE, MEDIDOR DE PUNTA, NIVEL Y
DEMÁS IMPLEMENTOS





PROCESO DE MEDICION

FOTO VII-7

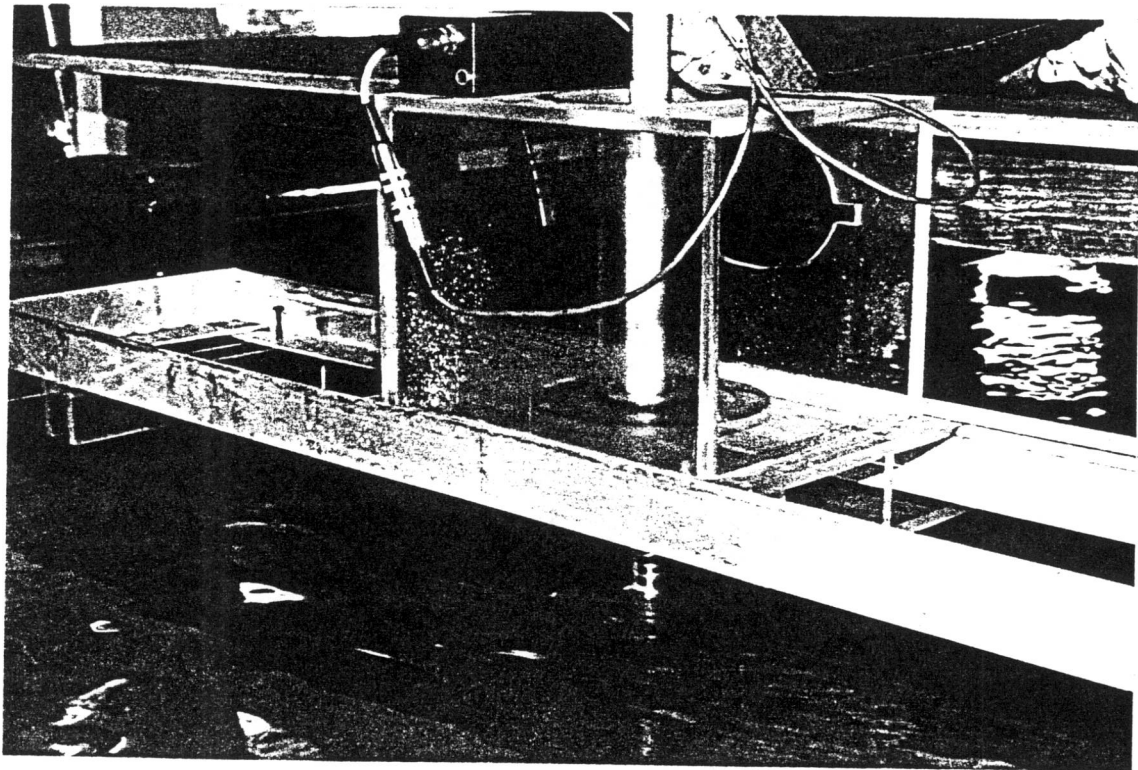


TABLA VII-1

POSICION DE LAS ESTACIONES DE MEDICION
EXPRESADAS EN RADIANES Y GRADOS

| ESTACION | POSICION | |
|----------|---------------------|--------|
| | $\frac{2 \pi s}{M}$ | grados |
| 1 | $- 6 \pi / 4$ | -270 |
| 2 | $- 4 \pi / 4$ | -180 |
| 2' | $- 3 \pi / 4$ | -135 |
| 3 | $- 2 \pi / 4$ | -90 |
| 3' | $- \pi / 4$ | -45 |
| 4 | 0 | 0 |
| 4' | $\pi / 4$ | 45 |
| 5 | $2 \pi / 4$ | 90 |
| 5' | $3 \pi / 4$ | 135 |
| 6 | $4 \pi / 4$ | 180 |
| 7 | $6 \pi / 4$ | 270 |

cual se presumió un contorno hidráulicamente liso. Para el segundo experimento se fijaron a cada 50cm. de longitud listones transversales sobre el fondo, de 1,8 x 0,4 x 100cm. y estos mismos se continuaron verticalmente sobre las paredes plásticas, a objeto de incrementar la turbulencia del flujo. En el tercer experimento se fijó arena al fondo y a las paredes del canal para incrementar el coeficiente de rugosidad del canal meandroso. En la Tabla VII-2 se presentan las condiciones y características de los flujos en el canal para los tres experimentos. Los resultados experimentales y las predicciones teóricas correspondientes para la distribución vertical de la componente transversa de velocidad, y para la distribución transversa de la componente longitudinal media (verticalmente integrada) se presentan en el Anexo I.

VII.4) Discusión de Resultados

Existen dos modos diferentes para calcular el coeficiente de Nunner promedio para cada experimento: un primer valor proveniente de valores globales para todo el flujo, a partir de la fórmula de Darcy-Weisbach

$$n = \frac{\bar{V}}{\sqrt{8gr_h S_o}},$$

donde r_h es el radio hidráulico del canal; y un segundo valor que se obtiene como promedio de los valores correspondientes a las diversas estaciones de medición a lo largo del canal, donde la magnitud del coeficiente de Nunner en cada estación se determina ajustando los valores locales centrales, medidos a varias elevaciones, de la componente longitudinal de velocidad, a la ley de Nunner utilizando la técnica de mínimos cuadrados. Estos valores, para cada uno de los tres experimentos llevados a cabo, se presentan en el Anexo I. Debido a que las mediciones de la componente transversa de velocidad se efectuaron sobre el centro del canal se consideró lógico utilizar el segundo valor promedio, arriba citado, para hacer las comparaciones teórico-experimentales.

El primer experimento correspondió a un fondo barnizado bastante liso, que junto con

TABLA VII-2

TABLA DE VALORES INTRODUCIDOS EN EL PROGRAMA

| EXPERIMENTO | DC (at) | Rain (at) | H (at) | w | B (at) | So | Vc (m/s) | n | f | observaciones |
|-------------|------------|--------------|-----------|-------|-----------|--------|-------------|-----|-------|--|
| 1 | .088 | 12.16 | 12 | .1568 | 1 | .00023 | .210 | 7.5 | .0178 | contorno hidraulicamente liso |
| 2 | .103 | 12.16 | 12 | .1568 | 1 | .00023 | .260 | 9.5 | .0111 | rugosidad artificial (listones madera cada 50 cms.) |
| 3 | .105 | 12.16 | 12 | .1568 | 1 | .00023 | .180 | 6.5 | .0237 | arena adherida al canal |

la resistencia de paredes plásticas arrojó un coeficiente de Nunner de 7,5, representativo de la baja resistencia de este canal al flujo. Al tercer experimento, para el cual se fijó arena al fondo y paredes, se le calculó un coeficiente más bajo, de 6,5, indicativo, lógicamente, de mayor fricción. Para el segundo experimento se obtuvo un resultado aparentemente paradójico, pero explicable: el coeficiente promedio, central, determinado por mínimos cuadrados, resultó igual a 9,5, lo que sugiere poca resistencia, a pesar de la influencia perturbadora de los listones atravesados sobre el fondo del canal. Se considera que los listones conllevan a la producción de una turbulencia más intensa que la que produce la fricción del fondo propiamente, y a su vez el intercambio turbulento, en la dirección vertical, ahora incrementado por la presencia de los listones, hace que la distribución vertical de la componente longitudinal de velocidad tienda a uniformizarse. En este caso, la formulación global para el coeficiente de Nunner, a partir de la expresión de Darcy-Weisbach, no sería válida porque no incluye la resistencia o bloqueo al flujo debido a los listones.

En las estaciones 1, 3, 5, y 7, que corresponden a los puntos de inflexión del eje meandroso, las velocidades transversas, experimentales y calculadas teóricamente, tienden a ser pequeñas debido a que la fuerza centrífuga es nula en esos puntos porque allí el radio de curvatura tiende a infinito. La discrepancia entre medición y predicción puede en parte deberse a la dificultad de apreciación de ángulos de deflexión tan pequeños ($\theta < 1^\circ$) existentes entre la dirección longitudinal local y la dirección indicada por la veleta (la de la velocidad máxima en el plano horizontal).

Al comparar las magnitudes de las componentes de velocidad transversa adimensionalizada, u/\bar{V} , sobre los gráficos de la figura VII-7a,b,c, se observa que ésta disminuye a medida que disminuye el coeficiente de Nunner n , es decir, a medida que aumenta el factor de fricción de Darcy-Weisbach f . Sin embargo, aunque lógica, esta conclusión podría no ser general ya que los flujos de cada experimento tenían diferentes profundidades y velocidades medias sobre la sección transversal.

En algunas estaciones y cerca de la superficie libre se observa un reverso en la dis-

ESTACION 1

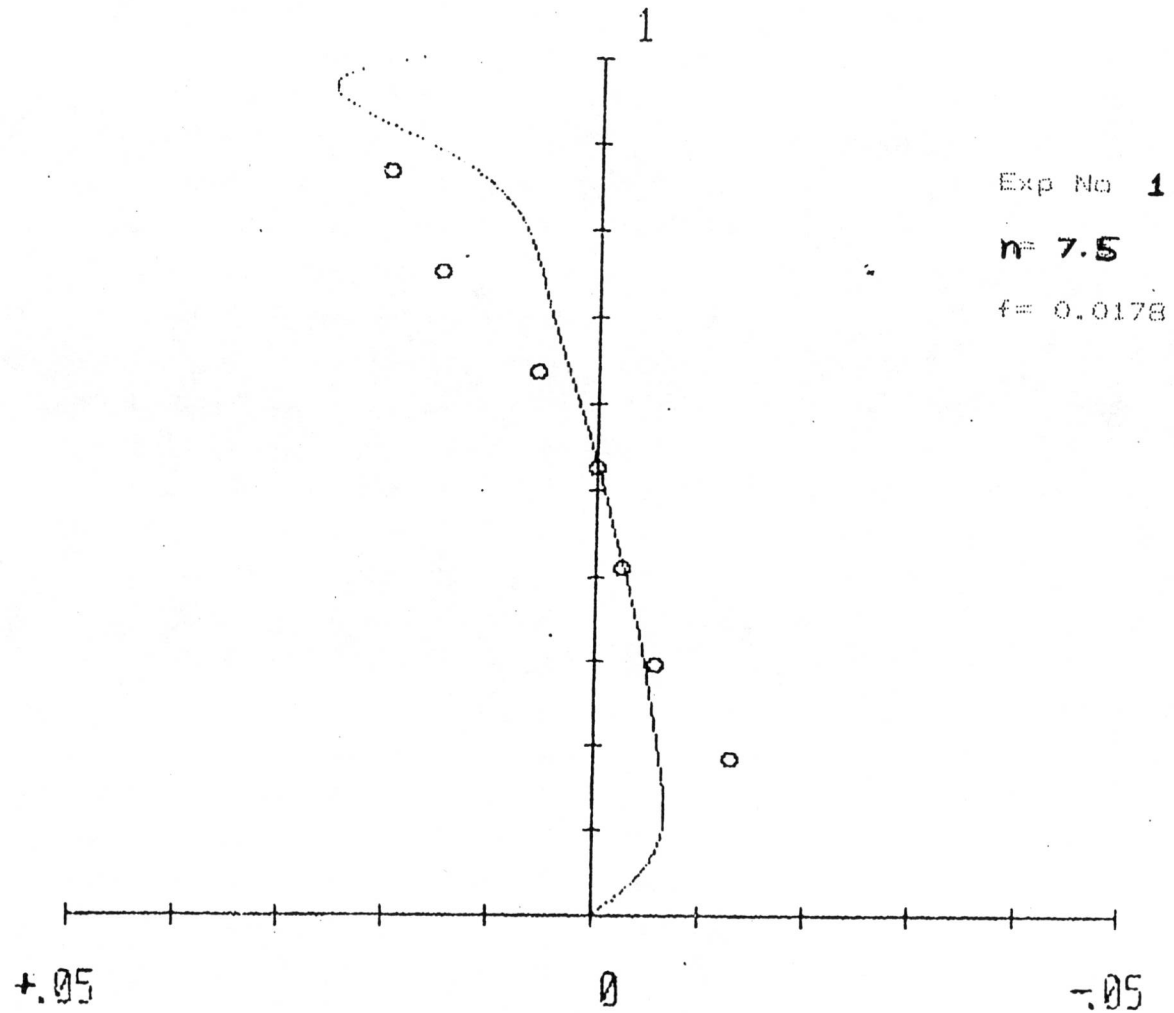


FIGURA VII-7a

ESTACION 1

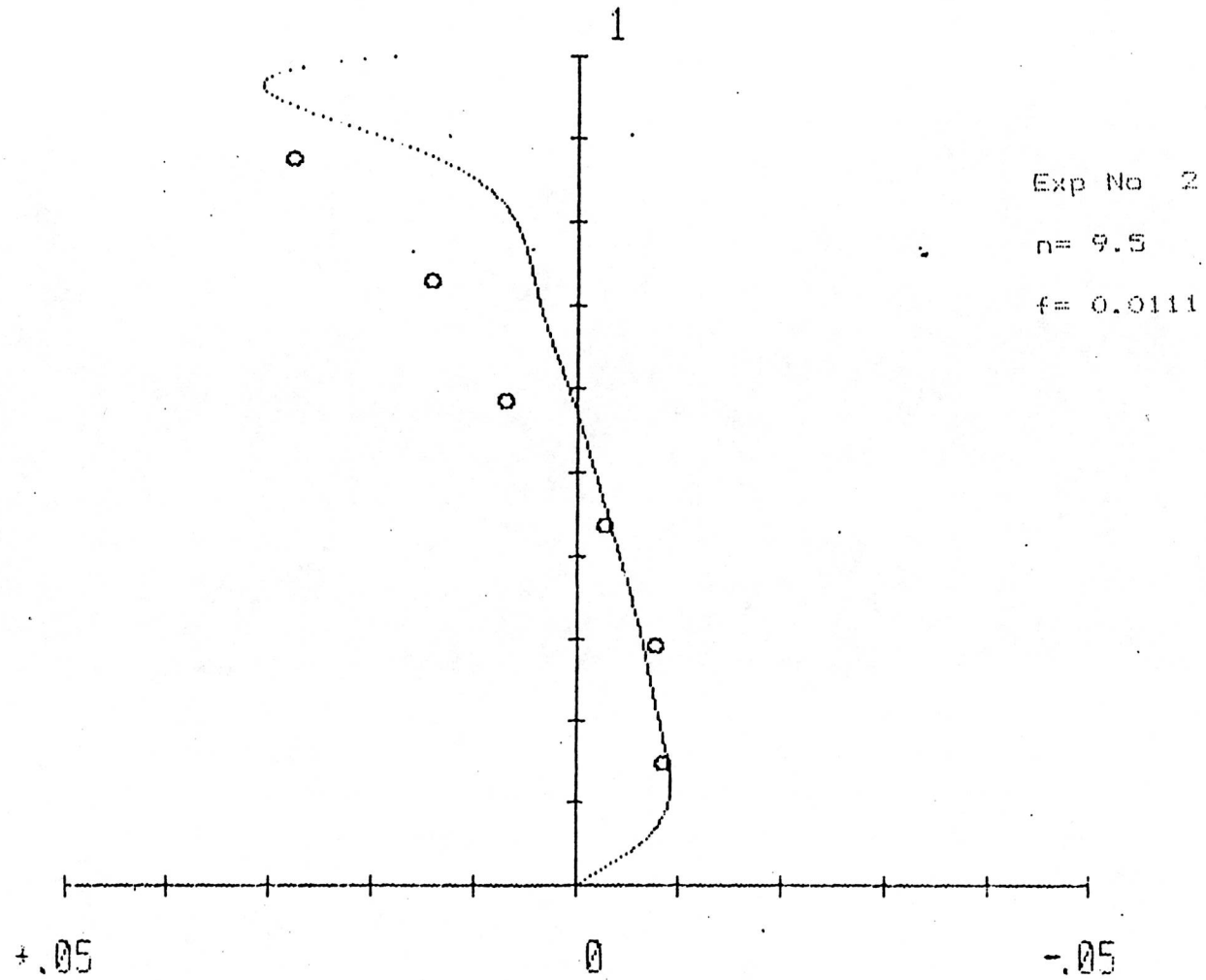


FIGURA VII-7b

ESTACION 1

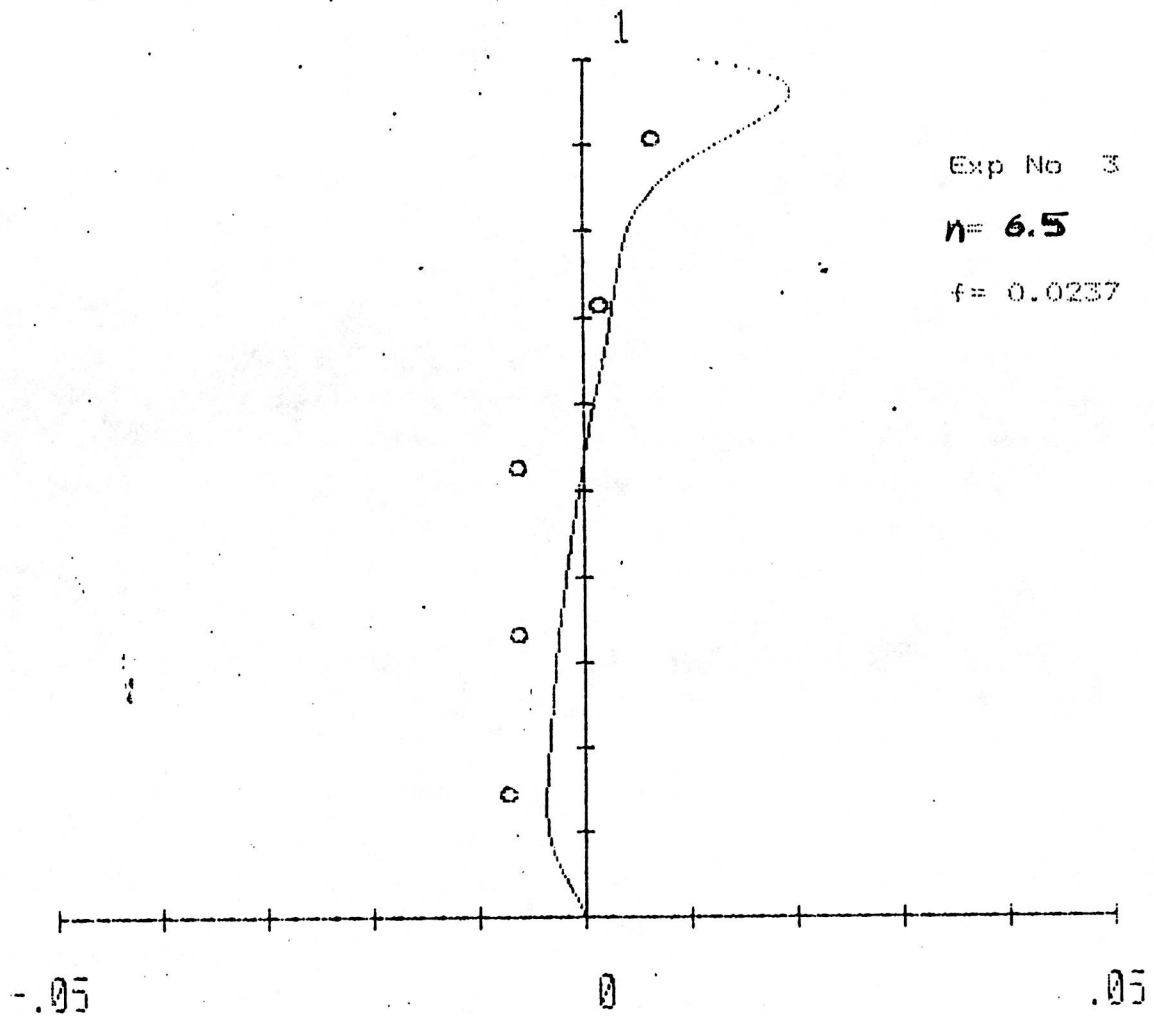


FIGURA VII-7c

tribución vertical teórica de la componente transversa de velocidad. La posible veracidad de esta tendencia no se pudo verificar por la dificultad de efectuar mediciones tan cerca de la superficie libre y porque el programa de mediciones culminó antes de implementar el programa computacional correspondiente. También es posible que el reverso calculado sea ficticio ya que el método de aproximaciones sucesivas aplicado para resolver la ecuación V-16 implica un error máximo cerca de la superficie libre, y también porque el uso de la serie geométrica conduce a soluciones que convergen lentamente (requieren muchos términos de las series) a medida que $\eta \rightarrow 1$ y posiblemente, aunque el número de sumandos fué grande (300 términos y en $\eta = 1$, 600 términos), resultó insuficiente (ver programa computacional en Anexo II). El caracter alternante del flujo secundario, es decir, el cambio de sentido del flujo secundario sobre la profundidad, se mantiene a todo lo largo del canal, al menos en la vecindad de su eje central.

La variación transversa de la componente de velocidad longitudinal media para el segundo experimento presenta discrepancias significativas con el cálculo teórico. La velocidad media resultó mayor sobre el eje central que sobre las dos otras verticales (izquierda y derecha) lo que hace suponer que los listones produjeron una disminución importante de las velocidades cerca de las paredes. Por el contrario, en los otros dos experimentos esta disminución se observa en pocas estaciones, siendo la tendencia general a que la velocidad media aumente hacia la margen exterior y disminuya hacia la interna, pero sin variar linealmente como se supone en el desarrollo teórico con perturbaciones de primer orden. Sin embargo la distribución vertical del flujo secundario compara aceptablemente con la predicción teórica, lo que induce a pensar que la distribución transversa de la velocidad media longitudinal, aunque forma parte de un sistema de ecuaciones gobernantes del fenómeno aquí estudiado, no tiene mucho efecto sobre la componente transversa u .

VIII) APLICACION AL RIO MISSOURI

Las verificaciones con datos de campo son cuestionables porque la naturaleza no im-

pone condiciones controladas. Por ejemplo, no se puede garantizar que la batimetría transversa del lecho, medida en un cierto período haya sido "fabricada" por el flujo que se aforó simultáneamente. Sin embargo para sistemas grandes los caudales tienden a variar lentamente y la condición de flujo permanente, en correspondencia biunívoca con la macrodeformación del lecho puede darse en forma aproximada.

Tal es el caso del río Missouri presentado por Falcón (1979) y Falcón y Kennedy (1983) con el cual se verificó una teoría para el caso de flujo completamente desarrollado, permanente, en cauces con radio de curvatura constante. La geometría en planta del cauce, la batimetría del lecho y la granulometría del material del lecho se presentan en las figuras VIII-1, VIII-2 y VIII-3, respectivamente. En la figura VIII-4, calculada de la figura VIII-2, se presenta el perfil batimétrico transverso de la sección transversal A-A. Otros datos pertinentes de este caso, tomados de Falcón (1979) se presentan en la Tabla VIII-1. En la Tabla VIII-2 se muestran los resultados de aplicar la teoría aquí desarrollada para flujo en meandros cuasi-rectos, al río Missouri, con tres diámetros diferentes: D_{50} , D_{95} y con el diámetro equivalente, D_e , obtenido anteriormente a partir de un balance de fuerzas transversas sobre un elemento de capa de fondo cuyas características fueron determinadas por Karim (1981). Para aplicar esta última hipótesis al río Missouri se obtuvieron los siguientes resultados preliminares:

$$R_* = \frac{u_* D_{50}}{\nu},$$

$$\theta = \frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) D_{50}},$$

y

$$p' = \frac{2,63}{1 - \sqrt{\tau_{cr}/\tau_o}} = 3.1,$$

donde R_* es el número de Reynolds de corte.

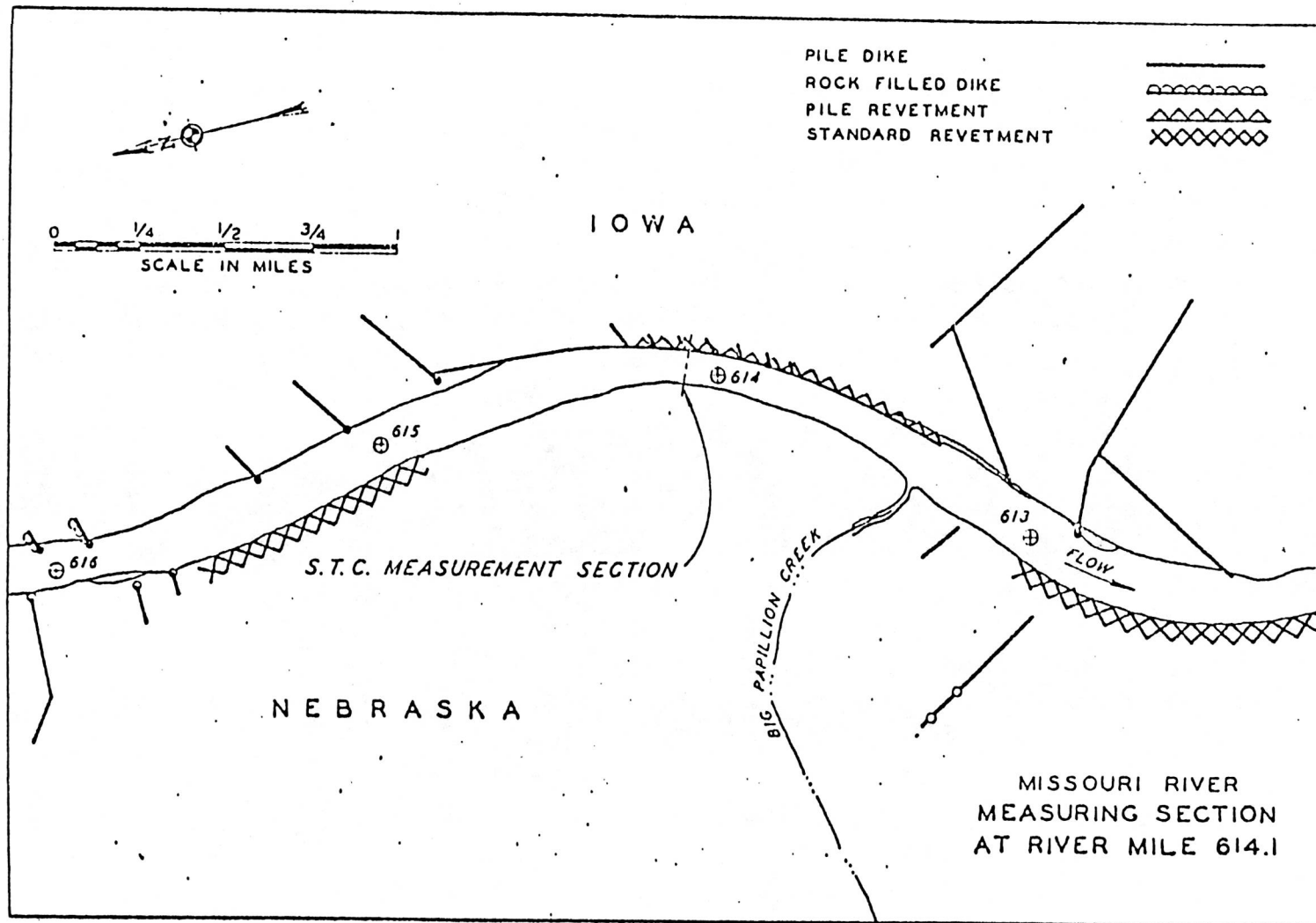


FIGURA VIII-1. PLANTA DEL RIO MISSOURI

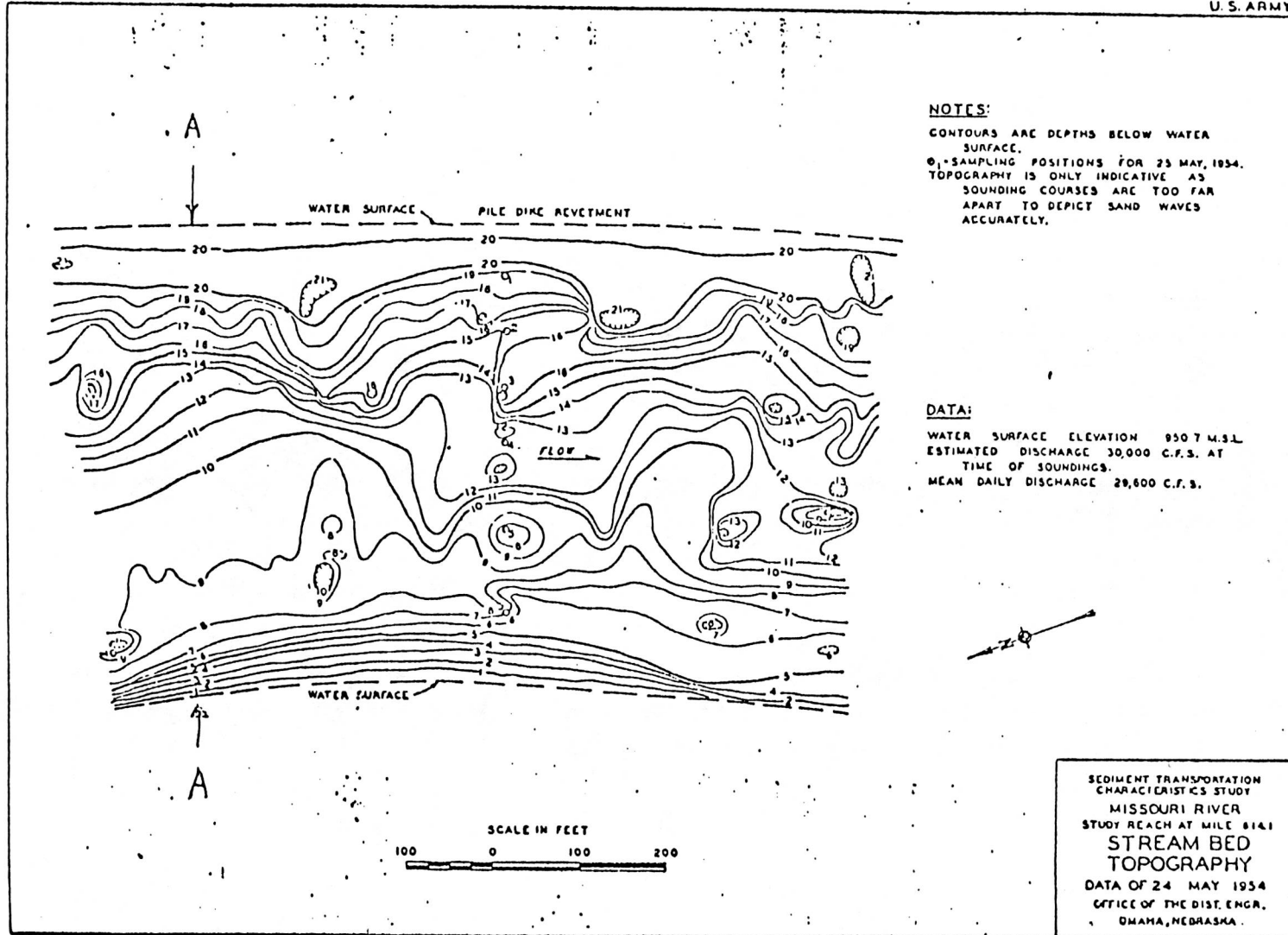
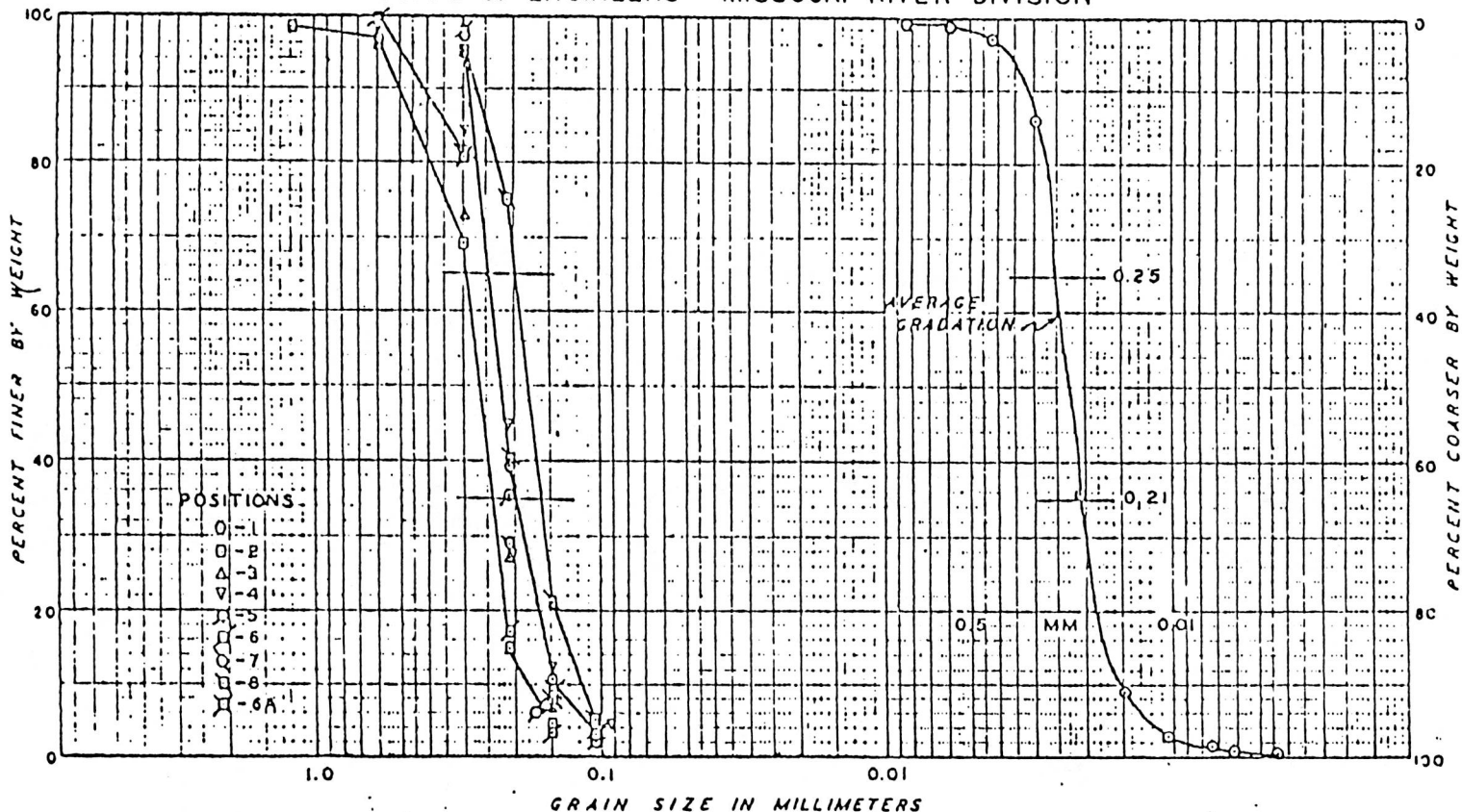


FIGURA VIII-2. BATIMETRIA DEL RIO MISSOURI.

MECHANICAL ANALYSIS OF RIVER SEDIMENT
CORPS OF ENGINEERS - MISSOURI RIVER DIVISION



Type _____
Location _____
Depth _____ ft.
Time _____ hrs.
Date _____

Type BED SURFACE
Location 614.1 (AREAL)
Depth _____ ft.
Time _____ hrs.
Date 26 MAY 1954

Type _____
Location _____
Depth _____ ft.
Time _____ hrs.
Date _____

Type _____
Location _____
Depth _____ ft.
Time _____ hrs.
Date _____

MISSOURI RIVER MILE 614.1

FIGURA VIII-3. GRANULOMETRIAS

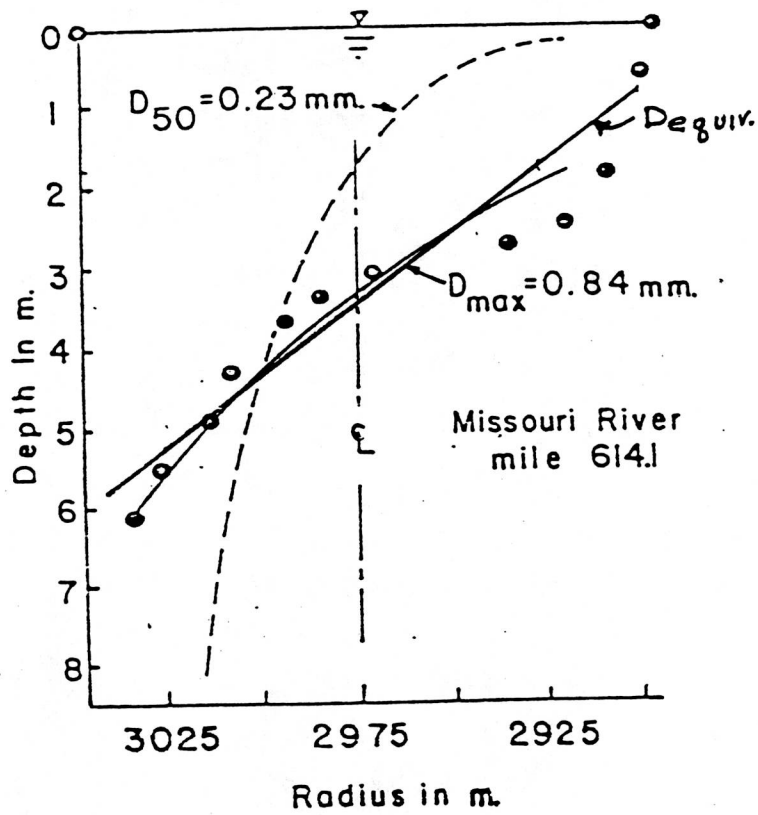


FIGURA VIII-4 Predicción y medición del perfil transverso del Río Missouri.

| Run Number | d_A (m) | d_m (m) | b (m) | r_c (m) | $S_o \times 10^3$ | V_A (m/sec) | D_{max} (mm) | n (IV-64) | a (IV-06) | K (IV-39) | d_c (m) | $\bar{H} \times 10^3$ (meas) (IV-120) |
|---------------------------------|--------------|--------------|----------|--------------|-------------------|------------------|-------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--|
| Zimmermann (1974) | | | | | | | | | | | | |
| RI-11 | | 0.101 | 0.40 | 1.80 | 2.72 | 0.33 | 0.50 | 3.59 | 0.40 | 4.57 | 0.096 | 6.60 7.94 |
| RII-4 | | 0.066 | 0.50 | 2.55 | 4.26 | 0.32 | 0.50 | 2.47 | 0.85 | 5.93 | 0.056 | 3.8 5.9 |
| RII-13 | | 0.105 | 0.40 | 2.55 | 2.84 | 0.27 | 0.50 | 3.36 | 0.55 | 6.05 | 0.090 | 5.6 7.2 |
| RIII-2 | | 0.072 | 0.40 | 3.30 | 2.99 | 0.27 | 0.50 | 2.16 | 0.91 | 4.57 | 0.070 | 2.07 3.19 |
| Onishi (1972) | | | | | | | | | | | | |
| C-13 | | 0.131 | 2.08 | 8.53 | 2.43 | 0.54 | 0.50 | 3.90 | 0.77 | 11.63 | 0.094 | --- 5.65 |
| CI-13 | | 0.133 | 0.90 | 9.09 | 1.80 | 0.54 | 0.50 | 4.49 | 0.79 | 10.20 | 0.125 | --- 4.09 |
| Kikkawa et al (1976) | | | | | | | | | | | | |
| M1 | | 0.055 | 0.90 | 4.50 | 2.0 | 0.45 | 1.17 | 5.15 | 0.91 | 2.68 | 0.054 | 4.8 ^A 5.48 |
| M2 | | 0.063 | 0.90 | 4.50 | 2.0 | 0.48 | 1.17 | 5.12 | 0.09 | 3.07 | 0.062 | 6.0 ^A 6.25 |
| Missouri River at Mile 614.1 | 3.54 | | 115 | 2975 | 0.15 | 1.56 | 0.84 | 7.71 | 0.99 | 31.27 | 3.33 | --- 0.103 |
| Nass (1977)** | | | | | | | | | | | | |
| 1-A-V | 3.39 | | 126 | 4572 | 0.125 | 0.84 | 0.36 | 4.71 | 1.00 | 32.85 | 3.27 | --- 0.020 |
| 2-A-VI | 2.51 | | 55 | 1524 | 0.169 | 0.80 | 0.50 | 4.53 | 0.99 | 22.20 | 2.44 | --- 0.053 |
| 3-A-VI | 3.34 | | 116 | 4572 | 0.116 | 0.93 | 0.41 | 5.49 | 1.00 | 30.89 | 3.25 | --- 0.023 |
| 3-B-VI | 3.54 | | 116 | 4572 | 0.118 | 0.86 | 0.41 | 4.93 | 1.00 | 29.04 | 3.46 | --- 0.020 |
| 4-A-VII | 2.95 | | 58 | 1981 | 0.095 | 0.63 | 0.24 | 4.39 | 0.99 | 29.48 | 2.86 | --- 0.026 |

DATOS DE CANALES DE LECHO EROSIONABLE

TABLA VIII-1

TABLA VIII-2

Los resultados obtenidos para los tres diámetros diferentes son:

RIO MISSOURI

| | D50 | Dmax | Dequiv |
|----------|--------|--------|--------|
| DC (m) | 3.33 | 3.33 | 3.33 |
| Rmin (m) | 2975 | 2975 | 2975 |
| WM (m) | 7178 | 7178 | 7178 |
| W (rad) | .384 | .384 | .384 |
| BW (m) | 115 | 115 | 115 |
| So | .00015 | .00015 | .00015 |
| Vc (m/s) | 1.56 | 1.56 | 1.56 |
| FZ | 7.71 | 7.71 | 7.71 |
| PQ | 3.1 | 3.1 | 3.1 |
| DP (m) | .00023 | .00084 | .00117 |
| PV (rad) | 1.05 | -0.92 | -1.00 |
| PE (rad) | -0.85 | 0.30 | 0.22 |
| PU (rad) | 1.23 | -0.74 | -0.82 |
| P (rad) | 0.10 | 0.05 | 0.03 |
| PT (rad) | 0.18 | 0.12 | 0.10 |

La validez de la expresión para p' aplicada al río Missouri es obviamente cuestionable, ya que fué determinada a partir de los experimentos de fondo móvil de Gottlieb aplicando la técnica de mínimos cuadrados. Al aplicar la ecuación V-64, deducida por Haddad y Mattiuzzo (1985) se obtiene $D_e = 1.173\text{mm}$. Los resultados arrojados por el programa computacional para cada uno de los tres diámetros anteriormente mencionados se presentan en la Tabla VIII-3, donde particularmente se especifican los valores del ángulo de desfasaje de la sección de máxima pendiente transversa, P_e , en radianes y grados, y la pendiente transversa correspondiente. De aquí se concluye que la hipótesis de Karim conduce a la mejor aproximación teórica al caso del río Missouri. El desfasaje de la sección de máxima pendiente transversa es de apenas $12,61^\circ$, lo cual es típico de ríos grandes y corrobora los comentarios de Falcón (1984). Por otra parte, como se observa en la figura VIII-4, la predicción linealizada del perfil batimétrico transverso es muy aceptable. Cabe mencionar que en esa misma figura los perfiles indicados con $D_{50} = 0,23\text{mm}$. y $D_{max} = 0,84\text{mm}$. fueron calculados con otra teoría, no expuesta aquí, correspondiente al caso de flujo completamente desarrollado en cauces de curvatura en planta constante. El grado de coincidencia de ambos perfiles, obtenidos con dos análisis diferentes, refuerza el argumento, y también hallazgo experimental, de que el arrastre suspendido no influye mucho en el desarrollo del perfil batimétrico transverso. En el caso citado de radio de curvatura constante, el caudal sólido transverso neto es nulo, condición que se reduce a un balance de fuerzas transversas actuantes sobre la capa de fondo, sin necesidad de considerar el arrastre suspendido. En el caso de cauces meandrosos el arrastre transverso y el longitudinal varían a lo largo del eje longitudinal del cauce y sus variaciones están interrelacionadas de tal forma que se cumpla el principio de la conservación de la materia. Sin embargo, para cauces suficientemente grandes, se encuentra que el flujo está en una condición cuasi-completamente desarrollado aunque el cauce sea meandroso. En tal caso se puede calcular con la teoría para ese tipo de flujo (completamente desarrollado) presentada por Falcón y Kennedy (1983). Así pues, el hecho de que el modelo de flujo sobre meandros débiles

TABLA VIII-3

| | D (mm) | PE=2 π /M (rads) | PE (grados) | $\Delta d/d = E_0 d c$ |
|--------|-----------|-------------------------|----------------|------------------------|
| D50 | 0.23 | -0.95 | -48.71 | -0.20 |
| Dmax | 0.84 | 0.305 | 17.48 | 0.055 |
| Dequiv | 1.173 | 0.22 | 12.61 | 0.034 |

arroje un perfil similar al observado y al predicho con la teoría de Falcón y Kennedy le brinda credibilidad a la teoría objeto del presente trabajo y además refuerza el criterio de que el arrastre suspendido influye poco en la formación de la batimetría transversa del lecho de los cauces meandrosos.

IX) CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La verificación experimental de la teoría de Falcón (1979), basada en el principio de la cantidad angular de movimiento, en cuanto a las distribuciones vertical y longitudinal de la componente transversa de velocidad se refiere (las cuales fueron medidas en un canal débilmente meandroso construido en el Instituto de Mecánica de Fluidos de la Universidad Central de Venezuela), se considera satisfactoria. Una diferencia básica entre el presente análisis y el modelo de Gottlieb (1976) es que en aquel se ha utilizado una ecuación gobernante adicional que es la de conservación del momentum angular. Esto permite calcular la distribución vertical, sobre el eje central del canal, de la componente transversa de velocidad sin necesidad, como lo hace Gottlieb, sobre toda la sección transversal del canal, imponiendo la condición $u = 0$ sobre las paredes verticales y propagando la solución hasta el eje central del canal. Esto es ventajoso porque las ecuaciones simplificadas para poca profundidad no son válidas cerca de las paredes laterales ya que allí el flujo es fuertemente tridimensional y se aleja de la condición hidrostática. Sin embargo se obtiene mucho menos información acerca de la variación transversa de u en comparación al modelo de Gottlieb.

Es interesante notar que para la presente solución se han satisfecho simultáneamente la ecuación de momentum angular, junto con la ecuación dinámica radial y la relación de Boussinesq, mientras que la solución del caso "uniforme", con radio de curvatura constante no permitía eso. La razón de esto puede verse en la ecuación dinámica transversa local: para el caso de flujo "uniforme" el término de aceleración convectiva no aparecía, pero en cambio si está presente en el caso de flujo meandroso (ver ecuación V-13). Por lo tanto, luego de insertar la relación de Boussinesq (modelo turbulento) se obtiene una ecuación

diferencial ordinaria para $u(\eta)$ en el caso de flujo uniforme, y una ecuación diferencial parcial para $u_c(\eta, s)$ en el caso de flujo meandroso, por lo cual en este último caso se pueden imponer condiciones adicionales, en este caso exigidas por la ecuación de cantidad angular de movimiento.

Es de esperar que amplitudes relativamente grandes del valor medio de la componente transversa de velocidad contribuyan a la existencia de desfasajes grandes de las diversas variables que caracterizan al flujo secundario o transverso. Por el contrario si los parámetros adimensionales d_c/r_{min} y d_c/M son mucho menores que la unidad podrían esperarse desfasajes pequeños: el caso del primer parámetro arriba citado implica efectos inerciales secundarios relativamente pequeños en las ecuaciones dinámica transversa y en la ecuación de momentos; valores pequeños del segundo parámetro indicaría que las fuerzas longitudinales surgidas de la no uniformidad del flujo son despreciables respecto a las fuerzas que constituyen el balance de fuerzas debidas al flujo primario. Este parece ser el caso para el río Missouri en la milla 614,1 donde la teoría de flujo "uniforme" arrojó un perfil batimétrico transverso adecuado.

Consideraciones de simetría para un flujo cuasi-uniforme sugieren que la tasa de cambio longitudinal de la componente longitudinal del arrastre sólido total, $\partial q_s/\partial s$, debe ser nula cerca del ápice del canal. Por lo tanto para satisfacer la conservación de la materia la cantidad rq_r debe ser constante sobre la sección transversal del cauce. Más aún, como q_r es cero sobre las márgenes tiene que ser nula sobre toda la sección transversal. Si sus componentes: arrastre de fondo y suspendido también son individualmente nulas en la vecindad del ápice entonces el análisis desarrollado para cauces curvos "uniformes", basado en el equilibrio de fuerzas transversas sobre una partícula representativa del lecho, o sobre un elemento de la capa de fondo, sería válido para canales fuertemente meandrosos con cargas suspendidas apreciables. Esta conclusión es soportada por lo adecuado de la predicción hecha para el río Missouri.

Cabe destacar el énfasis que se ha puesto en calcular la componente transversa de velocidad en su forma tridimensional, al contrario de otros autores que la han simplifi-

cado con una distribución rectilínea, o simplemente la han descartado. Por el contrario aquí se ha tomado en cuenta la variación vertical del coeficiente de viscosidad de remolino en el modelo turbulento de Boussinesq para calcularla. Su determinación, de la manera más cierta posible, es importante, por ejemplo, para modelaje de distribución de contaminantes. La verificación para el gradiente transversal de la componente de velocidad longitudinal media, en cambio, no fué conclusiva, aunque pudiera ser que en algunos casos las variaciones transversas queden ocultas por errores de medición. En todo caso dicho gradiente no parece influir mucho en la distribución vertical de la componente transversa de velocidad. Lo adecuado de estos cálculos a su vez ha conllevado a que los términos de inercia convectiva, en las diversas integraciones verticales de las ecuaciones, hayan quedado aceptablemente representados. Es así como el modelo teórico es capaz de reproducir los grandes desfases presentes entre la curvatura en planta de meandros cuasi-rectos, y la macrobatimetría en los experimentos de fondo móvil de Gottlieb (1976). La verificación similar del experimento de Ikeda y Nishimura (1985) y lo adecuado de la predicción teórica sugieren que el modelo puede aplicarse a cauces algo más fuertemente meandrosos que el canal usado por Gottlieb, pero no tanto como en los experimentos de Hooke (1974), donde Falcón (1979) encontró una resistencia inercial secundaria notoria, la cual no está incluida en el presente modelo verificado. Falcón (1983,1984) encontró que la resistencia inercial secundaria tiende a desaparecer en modelos grandes de laboratorio, y por supuesto en tamaño de prototipo, por lo que la teoría es aplicable a esos casos. Sin embargo en la verificación del caso del río Missouri, a pesar de que se predijo bien la batimetría, no se tuvo información fidedigna acerca del coeficiente p' del cual depende el arrastre sólido del río. Por otra parte nunca se sabe en forma controlada cual fué el caudal formativo permanente equivalente en estos casos reales de campo.

La recomendación fundamental consiste en la de implementar el uso de la ecuación de cantidad de movimiento angular para recalcular los esfuerzos cortantes sobre el lecho, ya que el obtenerlos del modelo de flujo turbulento puede conducir a errores considerables. Cabe recordar que el proponente original para utilizar el balance de momentos a fin de

calcular estos flujos de superficie libre en cauces curvos fué el finado profesor John F. Kennedy, quien le mencionó al presente autor esa idea desde 1974. El trabajo de Yeh y Kennedy, citado en la bibliografía, demuestra la facilidad de visualización física del problema y la relativa sencillez de su aplicación.

BIBLIOGRAFIA

- Alam, A.M.Z. and Kennedy, J.F.** 1969 "Friction Factors for Flow in Sand Bed Channels", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 95, No. HY6, Proc. Paper 6400, Nov, pp.1973-1992.
- Blondeaux, P. and Seminara, G.** 1985 "A Unified Bar-Bend Theory of River Meanders", Journal of Fluid Mechanics, vol. 157, pp. 449-470.
- Colombini, M., Seminara, G. and Tubino, M.** 1987 "Finite Amplitude Alternate Bars", Journal of Fluid Mechanics, vol. 181, pp. 213-232.
- Einstein, A.** 1954 "Ideas and Opinions", Crown Publishers, New York, pp. 249-253, traducción al Castellano del Ing. David Pérez Hernández.
- Engelund, F.** 1974 "Flow and Bed Topography in Channel Bends", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol. 100, HY 11
- Engelund, F. and Fredsoe, J.** 1976 "A Sediment Transport Model for Straight Alluvial Channels", Nordic Hydrology, 7.
- Engelund, F. and Fredsoe, J.** 1982 "Hydraulic Theory of Alluvial Rivers", Advances in Hydroscience, vol. 13, Academic Press, Inc.
- Falcón, M.** 1970 "La Formación de Barras Alternadas en un Canal de Fondo Móvil", Boletín No. 3 del Laboratorio de Hidráulica, Facultad de Ingeniería, UCV. También en IV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Oaxtepec, México, 1970.
- Falcón, M.** 1979 "Analysis of Flow in Alluvial Channel Bends", Chapter V, Ph.D. Thesis, Department of Mechanics and Hydraulics, University of Iowa.
- Falcón, M.** 1984 "Secondary Flow in Curved Open Channels", Annual Review of Fluid

Mechanics, vol. 16, pp. 79-93. Traducción al Castellano en Revista de Ingeniería, Vol. 1, No. 1, pp. 29-38, Fac. de Ing., U.C.V.

Falcón, M. and Kennedy, J.F. 1983 "Flow in Alluvial-River Curves", Journal of Fluid Mechanics, vol. 133, pp. 1-16.

Fredsoe, J. 1978 "Meandering and Braiding of Rivers", Journal of Fluid Mechanics, vol. 84, part 4, pp. 609-624.

García, M. and Niño, Y. 1993 "Dynamics of Sediment Bars in Straight and Meandering Channels: experiments on the resonance phenomenon", Journal of Hydraulic Research, vol. 31, No. 6.

Gottlieb, L. 1976 "Three-Dimensional Flow Pattern and Bed Topography in Meandering Channels." Series Paper 11, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark.

Haddad, J. y Mattiuzzo, F. 1985 "Investigación Experimental del Flujo en Meandros Incipientes". Trabajo Especial de Grado, Ingeniería, UCAB.

Hasegawa, K. 1989 "Studies on Qualitative and Quantitative Prediction of Meander Channel Shift", River Meandering, American Geophysical Union, Water Resources Monograph 12.

Hayashi, T. 1970 "The Formation of Meanders in Rivers", Proc. Japan Soc. Civ. Engrs, No. 180 (in japanese).

Hayashi, T. and Ozaki, Y. 1976 "On the Meander's Wavelength from the point of view of Bar Instability Theory", Proc. 20th Annual Meeting, Hydraulics, Japan Soc. Civ. Engrs, pp. 89-96 (in japanese).

Hinze, J.O. 1959 "Turbulence, an introduction to its Mechanism and Theory", McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering.

Hooke, L.R. 1974 "Shear Stress and Sediment Distribution in a Meander Bend". Dept. of Physical Geography, Ungi Rapport 30, University of Uppsala.

Ikeda, S., Hino, M. and Kikkawa, H. 1976 "Theoretical Study on the Free Meandering of Rivers", Proc. Japan Soc. Civ. Engrs, No. 255, pp. 63-73 (in japanese).

- Ikeda, S. and Nishimura, T.** 1985 "Flow and Bed Profile in Meandering Sand-Silt Rivers". Dept. on Foundation and Construction Engineering. Faculty of Engineering, vol. 15, Saitama University.
- Ikeda, S., Parker, G. and Sawai, K.** 1981 "Bend Theory of River Meanders. Part I, Linear Development". Journal of Fluid Mechanics, vol. 112, pp. 363-377.
- Ikeda, S. and Parker, G., Editors** 1989 "River Meandering", Water Resources Monograph 12, American Geophysical Union.
- Johannesson, H. and Parker, G.** 1989 "Secondary Flow in Mildly Sinuous Channel", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 115, No. 3, pp.289-308.
- Johannesson H. and Parker, G.** 1989 "Velocity Redistribution in Meandering Rivers", Journal of Hydraulic Engineering, vol. 115, No. 8, pp. 1019-1039.
- Karim, M.F.** 1981 "Computer-based Predictors for Sediment Discharge and Friction Factor of Alluvial Streams", Ph.D. thesis, Dept. Mech. and Hydraul., University of Iowa.
- Kitanidis, P. and Kennedy, J.F.** 1983 "Secondary Current and River-Meander Formation". Journal of Fluid Mechanics, vol. 144, pp. 217-229.
- Langbein, W.B. and Leopold, L.B.** 1966 "River Meanders - Theory of Minimum Variance", Geological Survey Professional Paper 422 - H.
- Lovera, F. and Kennedy, J.F.** 1969 "Friction Factors for Flat Bed Flows in Sand Channels", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 95, No. HY4, Proc. Paper 6678, July, pp. 1227-1234.
- Nori, D. y Sucre, J. G.** 1988 "Verificación Experimental de la Ecuación de Cantidad de Movimiento Angular en Flujos de Canales Cuasirectos", Trabajo Especial de Grado, Facultad de Ingeniería, UCV.
- Odgaard, J.** 1986 "Meander Flow Model I:Development; II Applications", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 112 (12).
- Parker, G., Sawai, K., and Ikeda, S.** 1982 "Bend Theory of River Meanders", Part 2, Nonlinear deformation of finite amplitude bends, Journal of Fluid Mechanics, 115, pp. 303-314.

- Schielen, R., Doelman, A., and de Swart, H.E.** 1993 "On the Nonlinear Dynamics of Free Bars in Straight Channels", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 252, pp. 325-356.
- Shen, H.W. and Komura, S.** 1968 "Meandering Tendencies in Straight Alluvial Channels", *Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division*, vol. 94, No. HY4, July.
- Tamai, N., and Ikeuchi, K.** 1984 "Longitudinal and Transverse Variations of the Depth-Averaged Flow Fields in a Meandering Channel", *Collected Papers*, vol. 23, Dept. Civ. Eng., University of Tokyo.
- Tamai, N. and Ikeya, T.** 1985 "An Analytical Three-Dimensional Approach to the Flow in Rectangular Meandering Channels", *Collected Papers*, vol. 23, Dept. Civ. Eng., Faculty of Engineering, University of Tokyo.
- Tamai, N. and Ikeya, T.** 1986 "Three-Dimensional Flow over Alternating Point Bars in a Meandering Channel", *Collected Papers*, vol. 24, Dept. Civ. Eng., Faculty of Engineering, University of Tokyo.
- Tamai, N. and Mohamed, A.** 1985 "Depth-Averaged Flow Fields in Meandering Channels with Alluvial Equilibrium Bed", *Collected Papers*, vol. 23, Dept. Civ. Eng., Faculty of Engineering, University of Tokyo.
- Tubino, M. and Seminara, G.** 1990 "Free-Forced Interactions in Developing Meanders and Suppression of Free Bars", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 214, pp. 131-159.
- Yeh, K.C. and Kennedy, J.F.** 1993 "Moment Model of Nonuniform Channel-Bend Flow. I: Fixed Beds, II: Erodible Beds", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 119, No. 7, July.
- Yen, B.C.** 1965 "Characteristics of Subcritical Flow in a Meandering Channel", Ph.D. thesis, Dept. Mech. and Hydraul., Univ. of Iowa, Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa City.
- Zimmermann, C. and Kennedy, J.F.** 1978 "Transverse Bed Slopes in Curved Alluvial Streams", *Proc. ASCE, Hyd. Div.*, vol. 104, HY1, January.

ANEXO I

EXPERIMENTO 1

CARACTERISTICAS DEL FLUJO

Profundidad del agua = 8.8 cms

Velocidad media (promedio de todo el canal) = .21 m/s

Angulo de la compuerta ubicada al final = 15 grados respecto
a la horizontal

$$\text{Coeficiente de Nunner} = \frac{V}{\sqrt{8g Rh So}} = 5.72$$

Para obtener las pendientes del fondo y de la superficie libre se usó en todos los experimentos el método de los mínimos cuadrados.

Determinación de la Pendiente del fondo.

| Piezómetro | Diferencia de altura entre N.H y nivel de los piezómetros (canal vacío) (cms) |
|------------|---|
|------------|---|

| | |
|---|------|
| 1 | 7.10 |
| 2 | 7.20 |
| 3 | 7.25 |
| 4 | 7.30 |
| 5 | 7.35 |
| 6 | 7.50 |
| 7 | 7.50 |

Pendiente del fondo = 2.26 E-04

Factor de correlación (R) = .982

Determinación de la Pendiente de la superficie

Piezómetro Diferencia de altura entre N.H y nivel
de los piezómetros (flujo uniforme).
(cms)

| | |
|---|------|
| 1 | 1.70 |
| 2 | 1.55 |
| 3 | 1.50 |
| 4 | 1.50 |
| 5 | 1.45 |
| 6 | 1.35 |
| 7 | 1.20 |

Pendiente de la superficie = $2.32 \text{ E-}04$

Factor de correlación (R) = .956

TABLA V-3

VELOCIDAD MEDIA Y COEFICIENTE DE NUNNER SOBRE
EL EJE CENTRAL PARA TODAS LAS ESTACIONES

| ESTACION | VELOCIDAD MEDIA (m/s) (V) | VALOR MEDIDO DEL COEFICIENTE n |
|----------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1 | 0.20 | 5.05 |
| 2 | 0.203 | 5.48 |
| 2' | 0.207 | 7.73 |
| 3 | 0.21 | 8.30 |
| 3' | 0.212 | 8.14 |
| 4 | 0.214 | 8.10 |
| 4' | 0.217 | 7.86 |
| 5 | 0.219 | 7.52 |
| 5' | 0.212 | 7.83 |
| 6 | 0.212 | 7.70 |
| 7 | 0.215 | 8.66 |

La velocidad media se obtuvo por integracion vertical de la distribucion de velocidad longitudinal en cada estacion.

El coeficiente de Nunner en el eje central se consiguió por ajuste a una curva potencial (por mínimos cuadrados) de

la relación
$$V = V_{\max} \cdot \eta^{(1/n)}$$

TABLA V-4

COEFICIENTE DE NUNNER

| ESTACION | n en el eje central | n a la izq. | n a la der. |
|------------|---------------------|-------------|-------------|
| 1 | 5.05 | 5.42 | 5.11 |
| 2 | 5.48 | 5.60 | 5.56 |
| 2' | 7.73 | 7.55 | 7.65 |
| 3 | 8.30 | 8.72 | 8.51 |
| 3' | 8.14 | 7.71 | 8.84 |
| 4 | 8.10 | 8.07 | 9.12 |
| 4' | 7.86 | 6.71 | 8.35 |
| 5 | 7.52 | 7.13 | 7.97 |
| 5' | 7.83 | 7.65 | 8.98 |
| 6 | 7.70 | 8.45 | 7.13 |
| 7 | 8.66 | 9.10 | 8.18 |
| n promedio | 7.49 | 7.46 | 7.76 |

Dichos coeficientes fueron encontrados por ajuste a una curva potencial (por mínimos cuadrados) de la relación

$$V = V_{\max} \cdot \eta^{(1/n)}$$

COMPARACION TEORICO-EXPERIMENTAL DE LA DISTRIBUCION
 RADIAL DE LA VELOCIDAD LONGITUDINAL

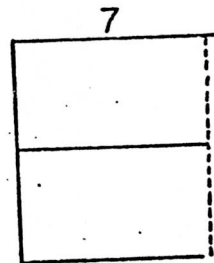
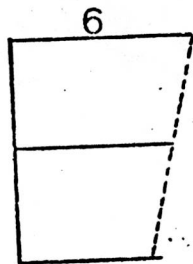
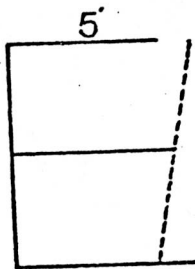
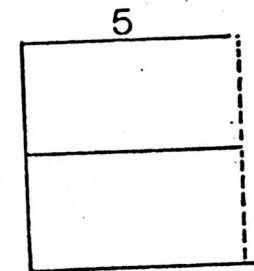
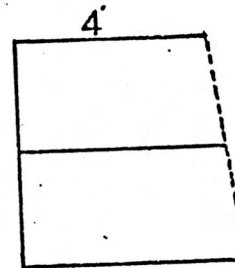
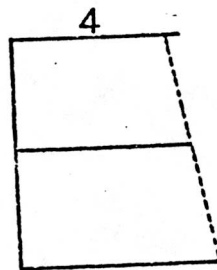
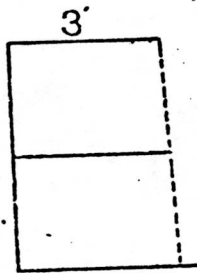
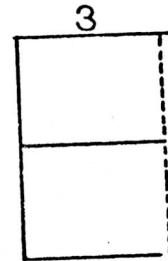
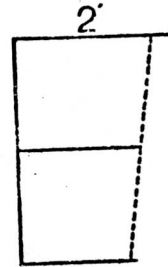
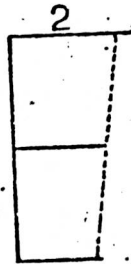
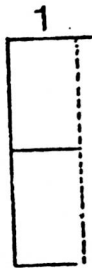
TEORIA

| ESTACION | DV/DR |
|----------|------------|
| 1 | -6.182E-04 |
| 2 | 1.111E-02 |
| 2' | 8.298E-03 |
| 3 | 6.182E-04 |
| 3' | -7.424E-03 |
| 4 | -1.111E-02 |
| 4' | -8.298E-03 |
| 5 | -6.182E-04 |
| 5' | 7.424E-03 |
| 6 | 1.111E-02 |
| 7 | 6.182E-04 |

EXPERIMENTAL

| ESTACION | Vizq | Vcen | Vder |
|----------|------|------|------|
| 1 | .208 | .207 | .205 |
| 2 | .213 | .209 | .208 |
| 2' | .217 | .213 | .212 |
| 3 | .217 | .215 | .214 |
| 3' | .216 | .218 | .220 |
| 4 | .219 | .220 | .222 |
| 4' | .220 | .222 | .224 |
| 5 | .223 | .224 | .226 |
| 5' | .217 | .218 | .221 |
| 6 | .220 | .218 | .216 |
| 7 | .223 | .221 | .220 |

GRAFICO V-1



— Exp.

----- Teor.

Datum = 0.19m/s

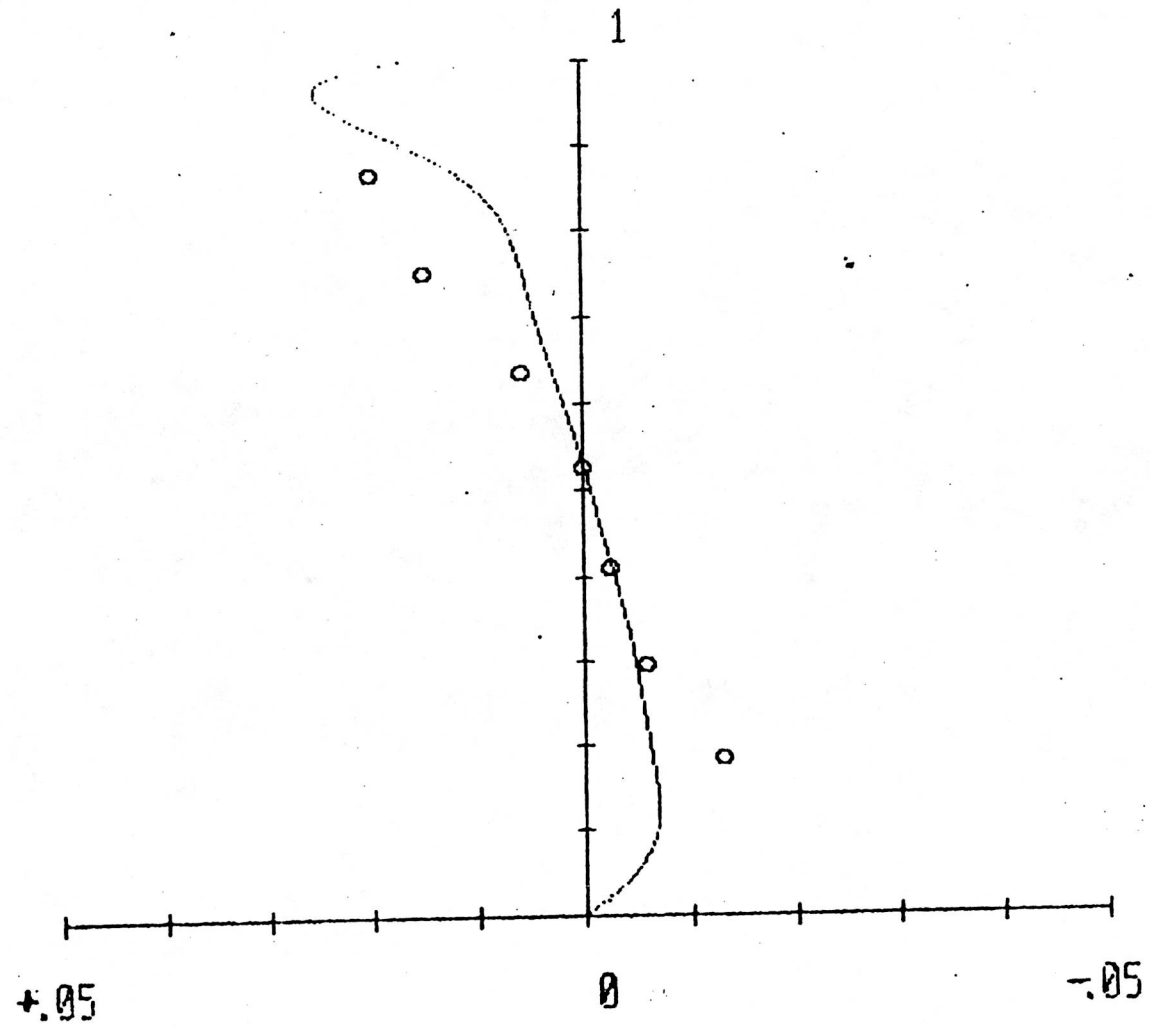
0.25 m.

1 cm/seg.

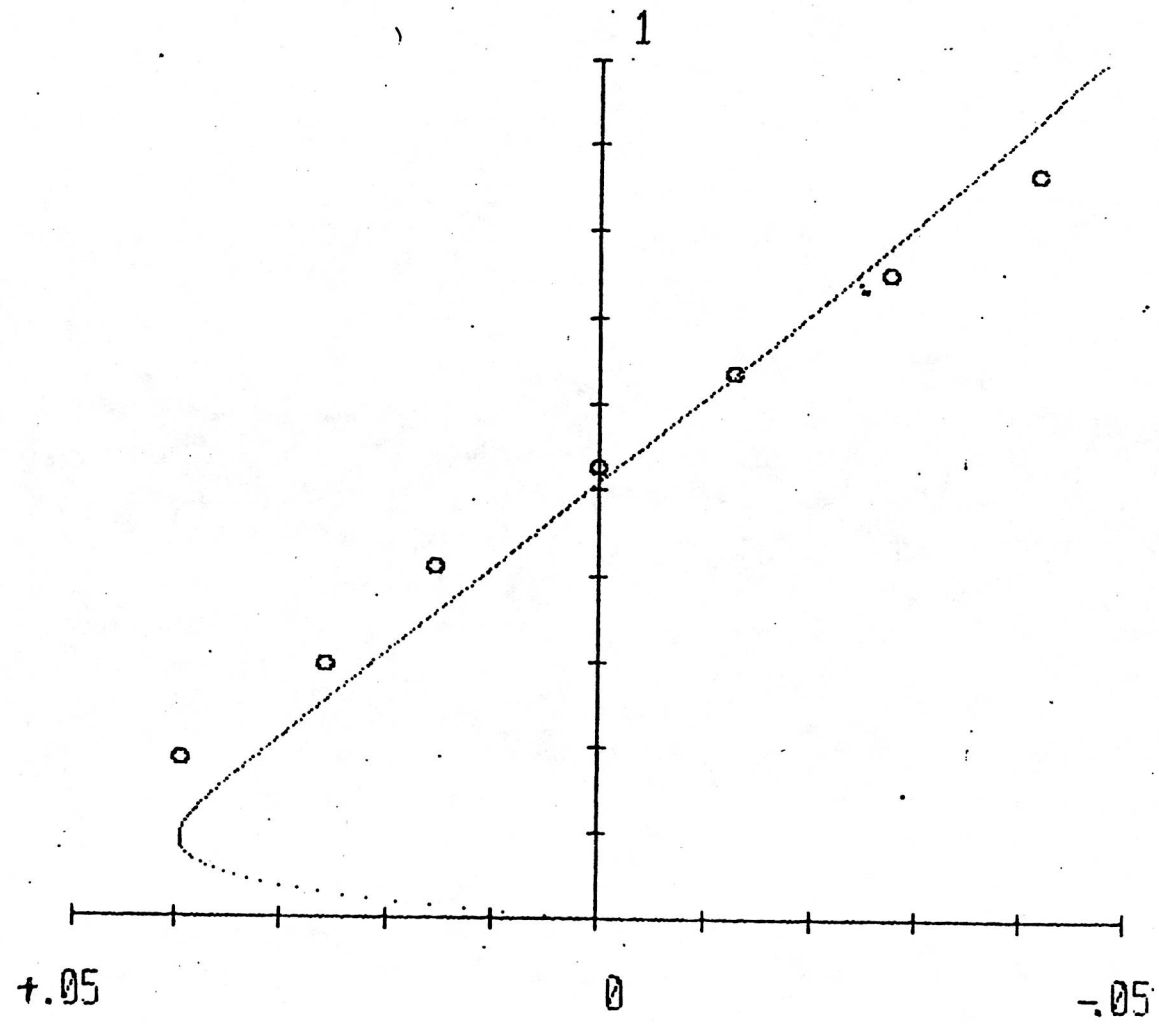
GRAFICOS DE $u(\eta) / \nu$ VS η

EXPERIMENTO NO 1

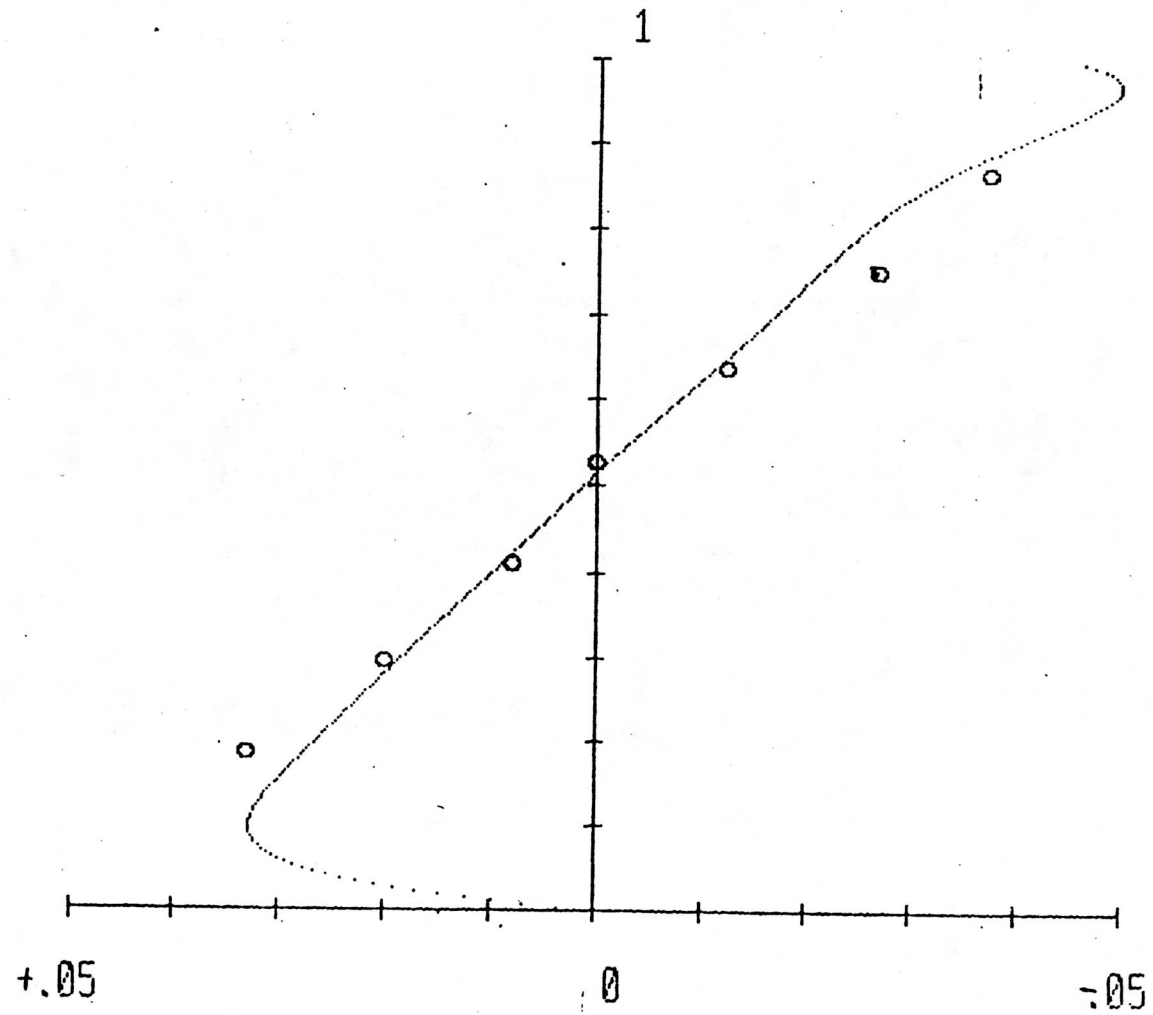
ESTACION 1



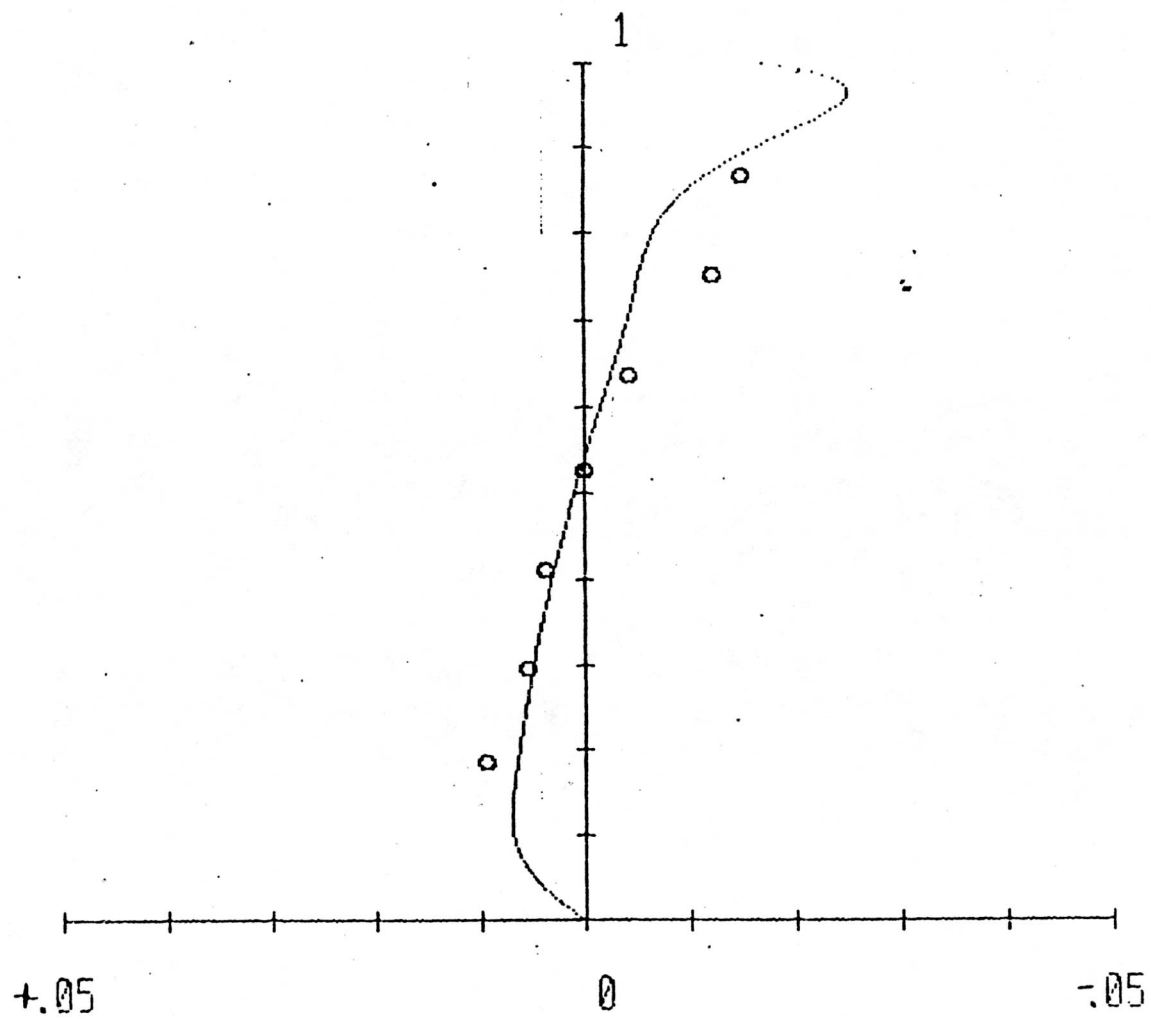
ESTACION 2



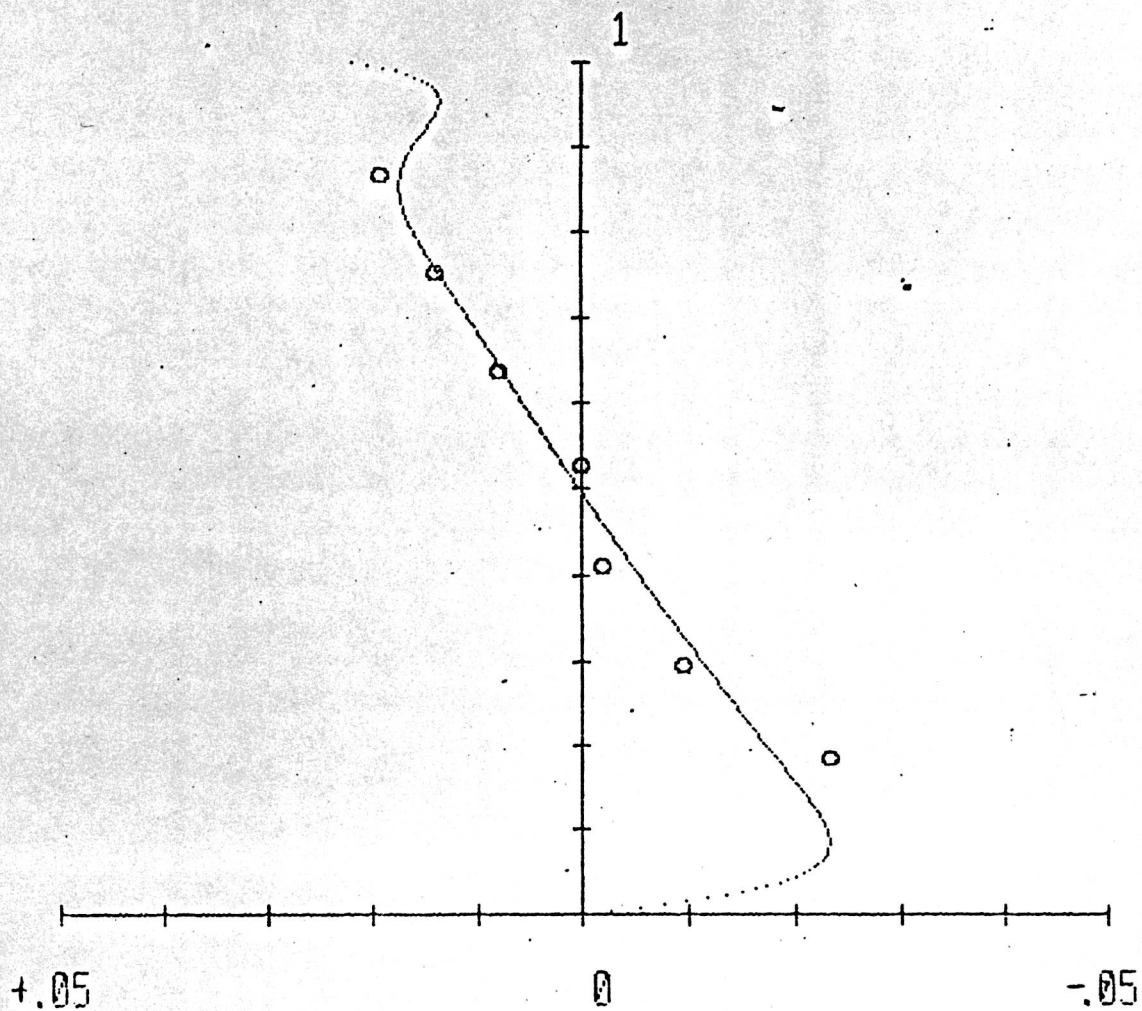
ESTACION 2'



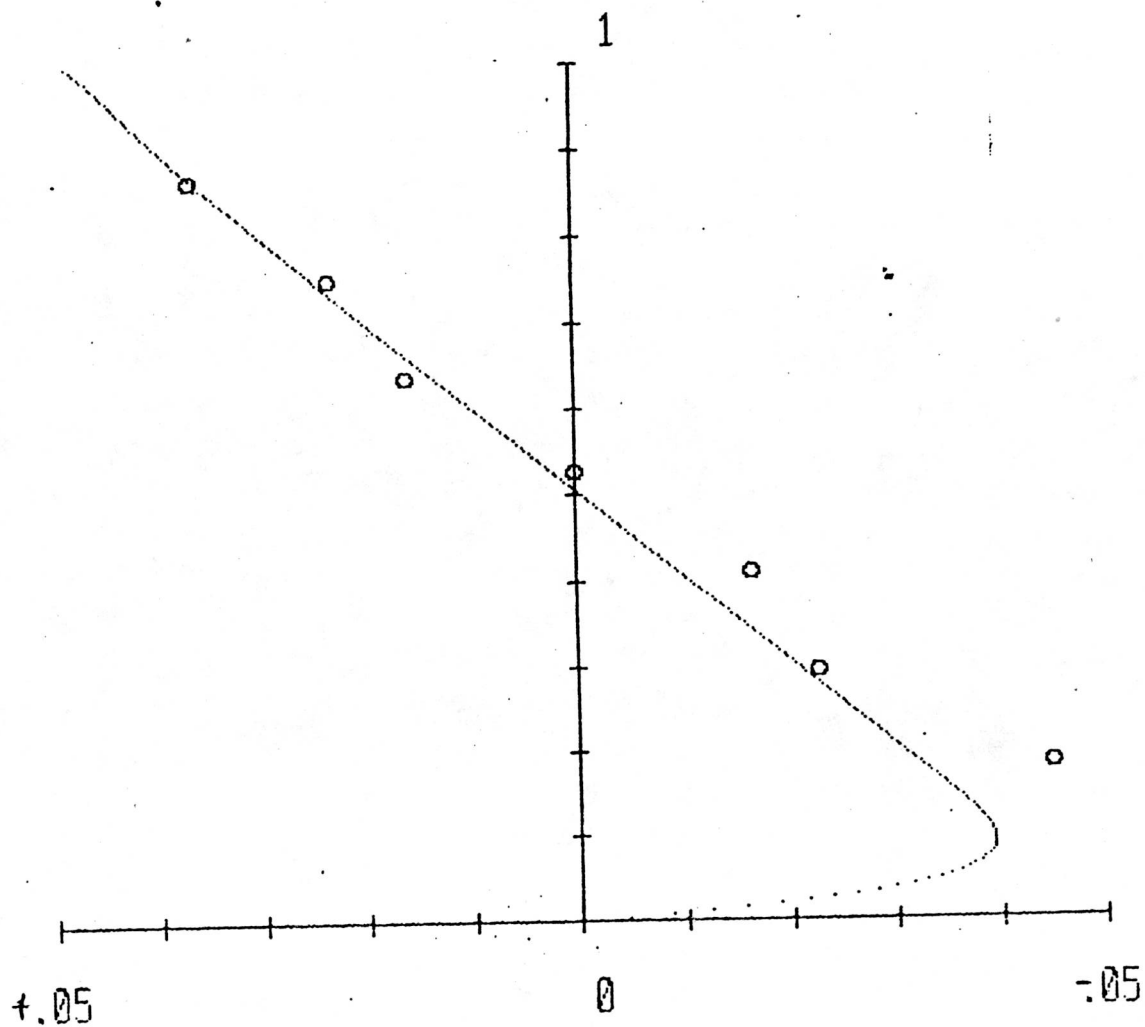
ESTACION 3



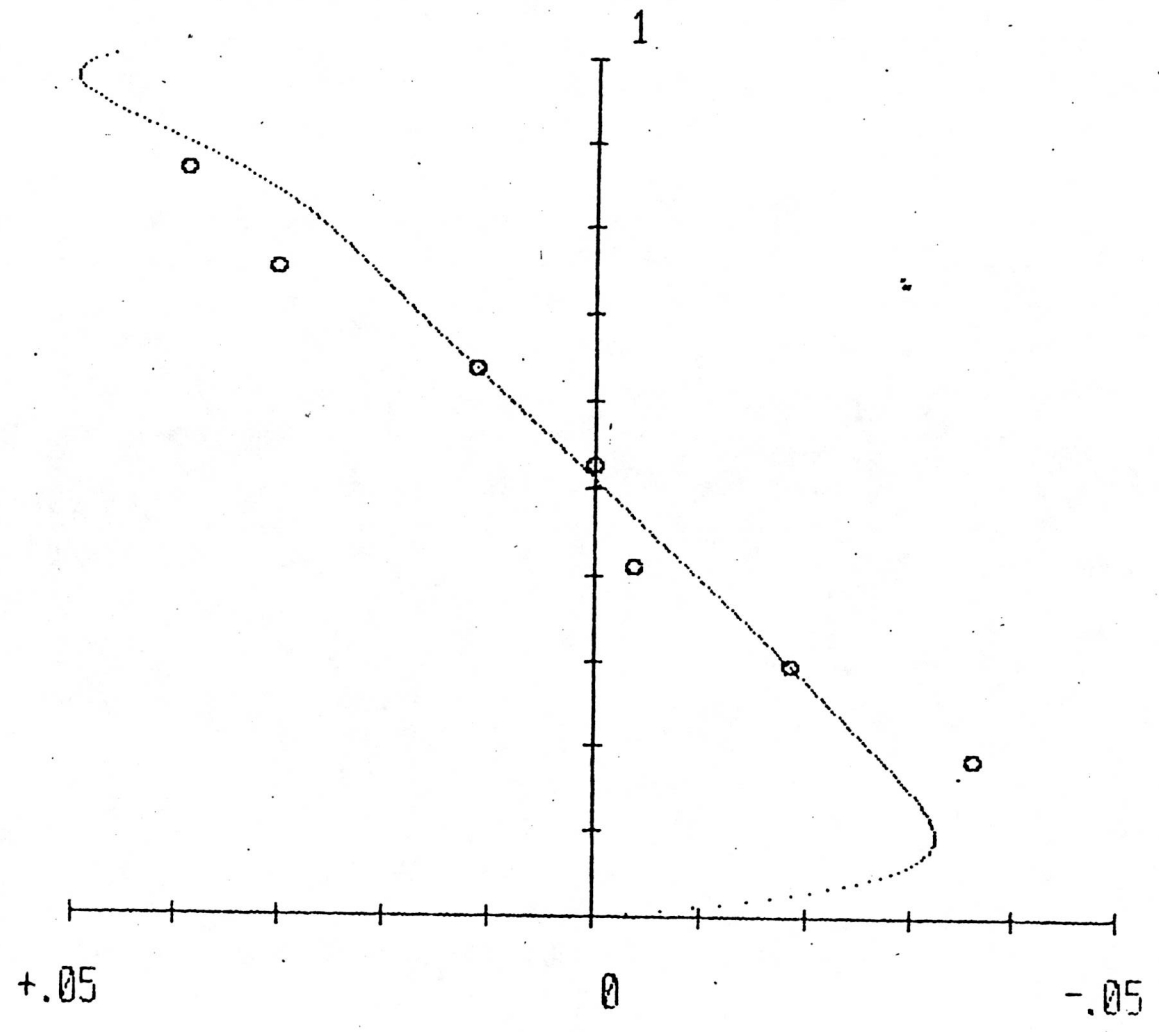
ESTACION 3'



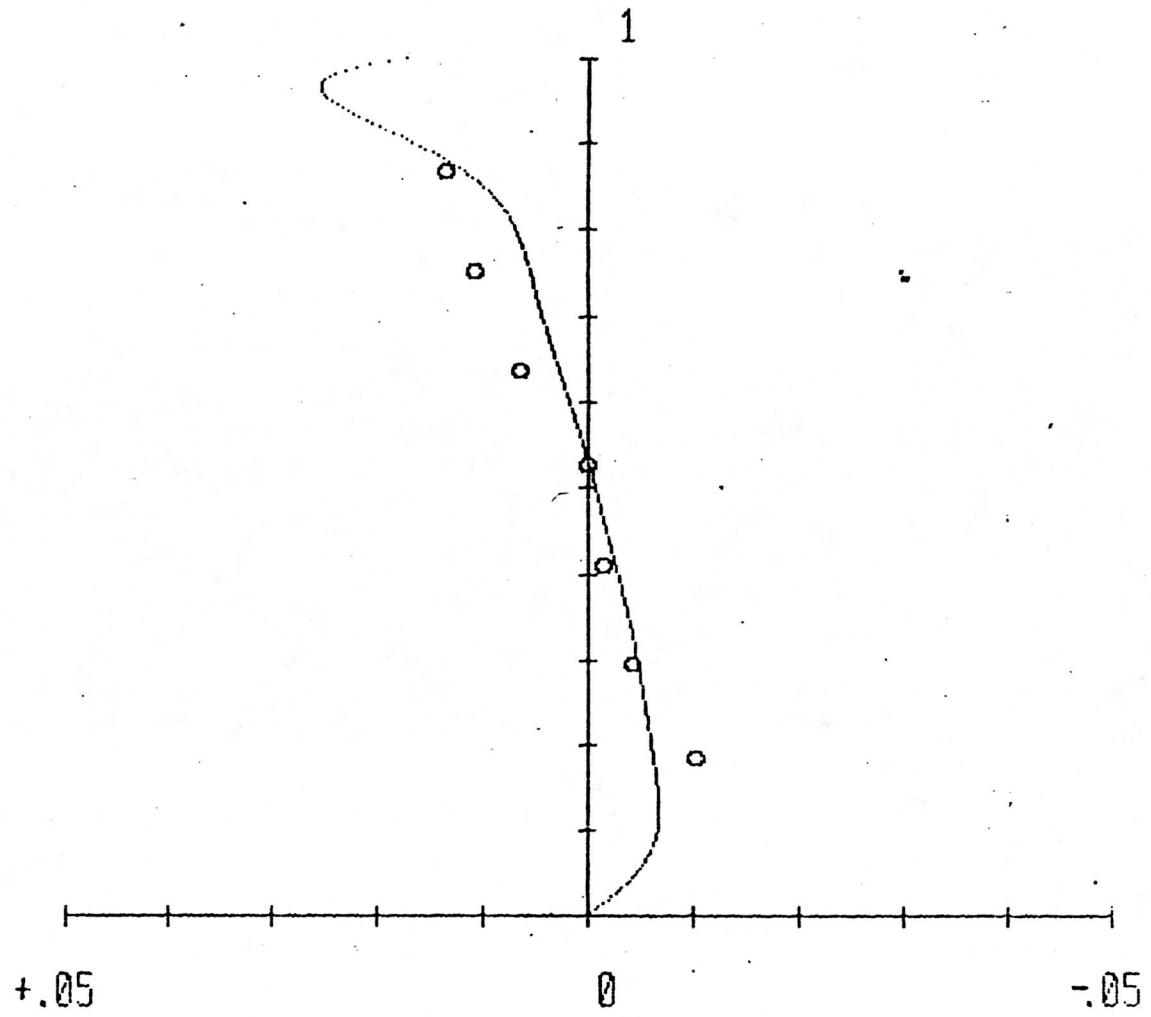
ESTACION 4



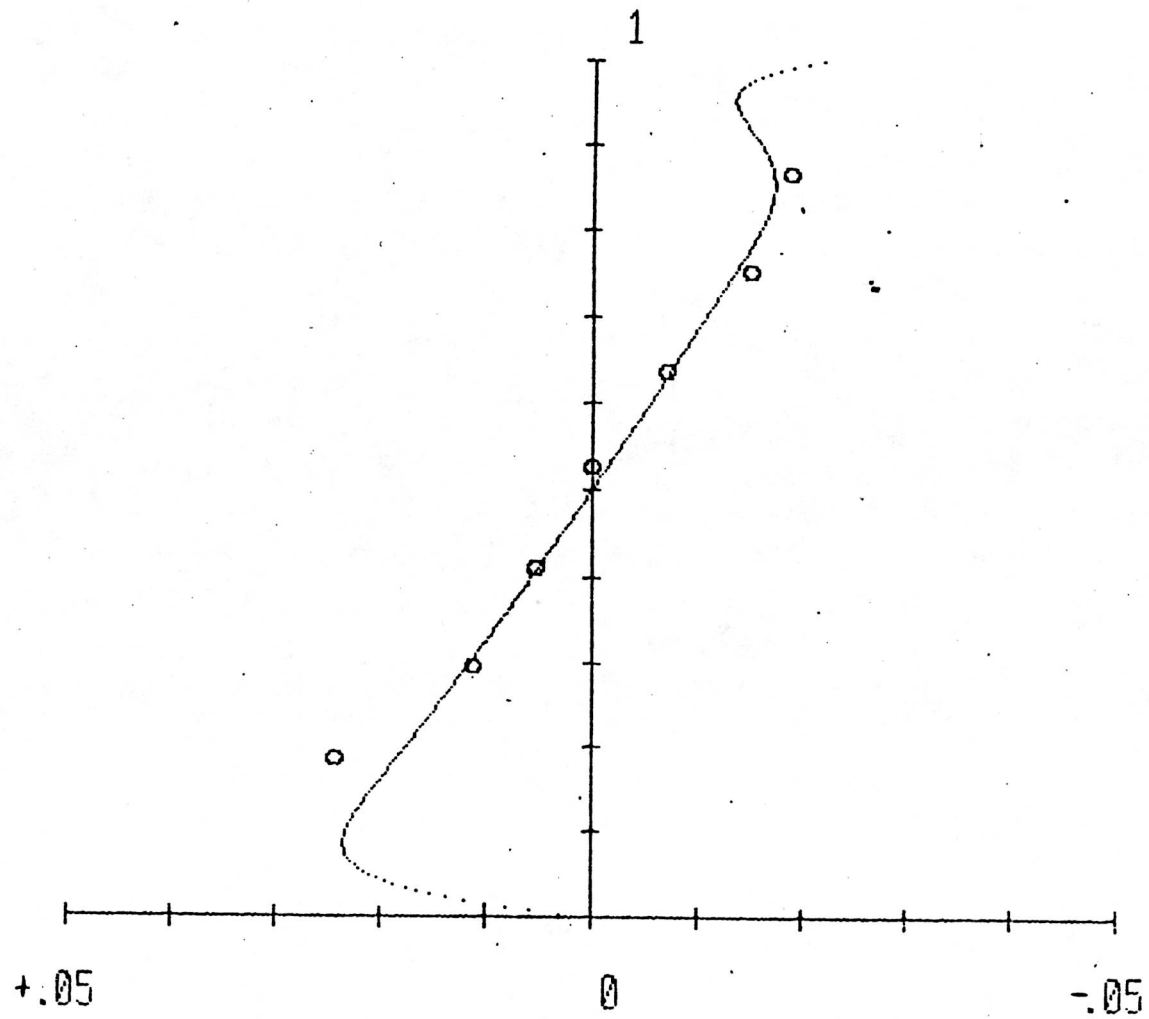
ESTACION 4'



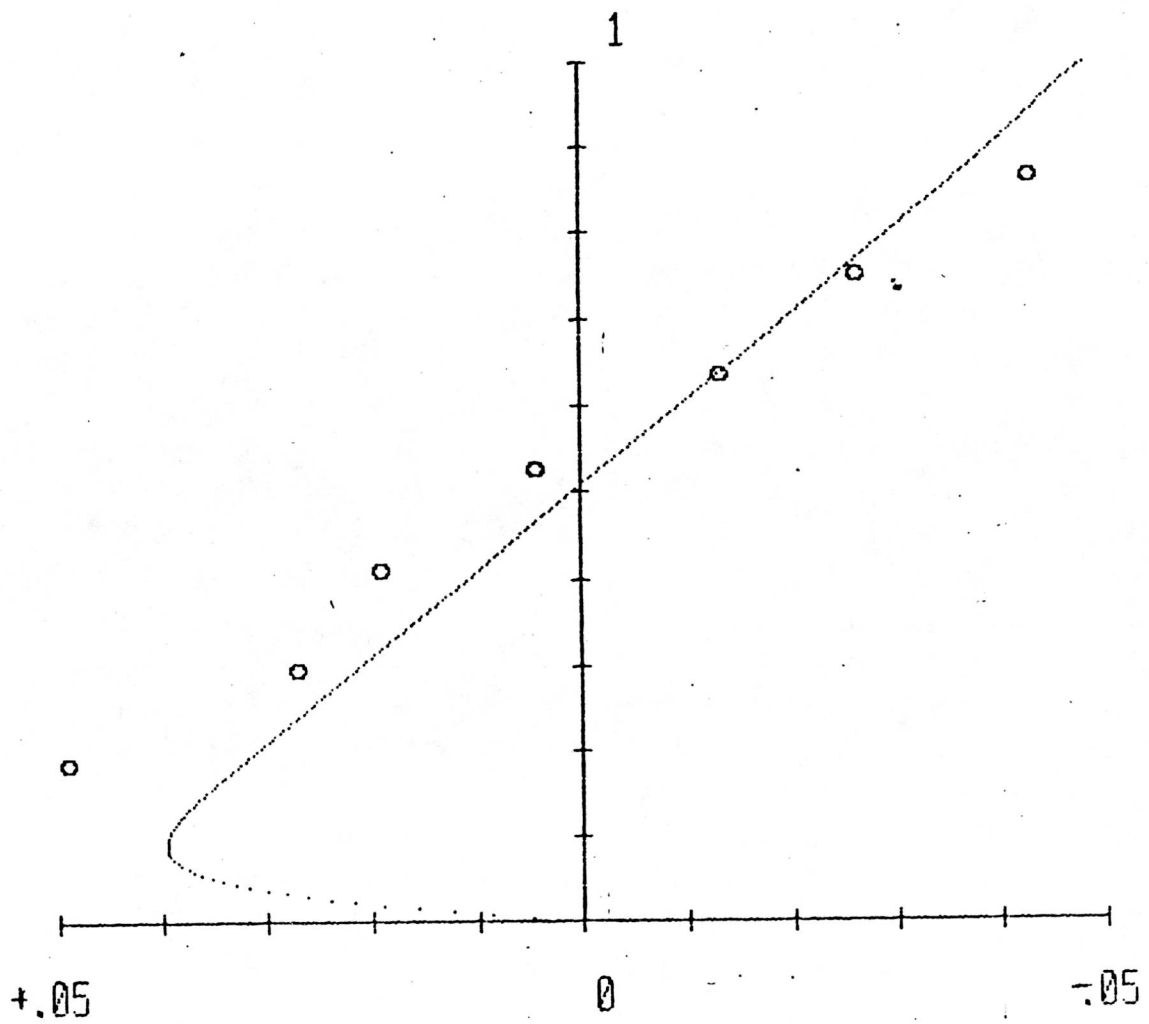
ESTACION 5



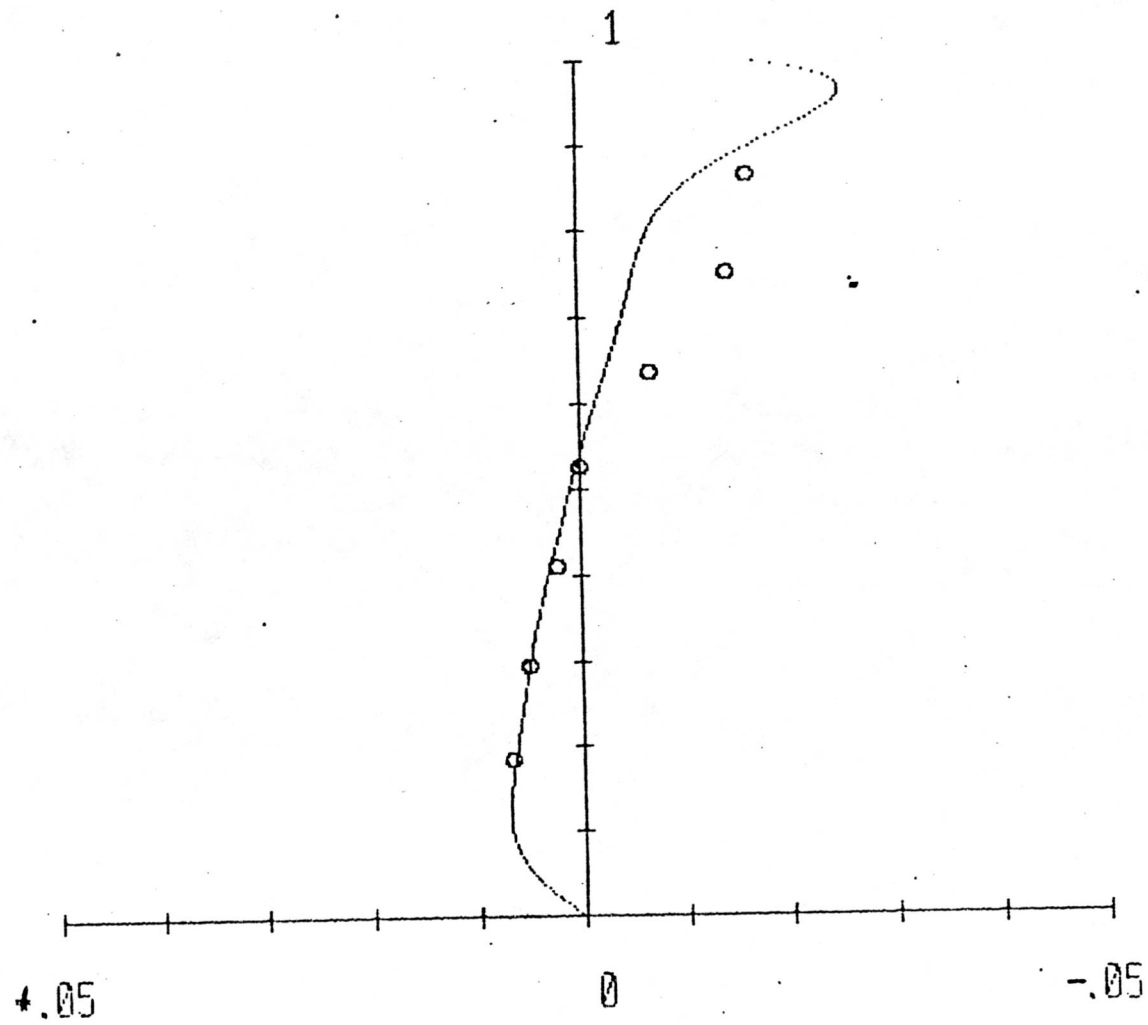
ESTACION 5'



ESTACION 6



ESTACION 7



EXPERIMENTO 2

CARACTERISTICAS DEL FLUJO

Profundidad del agua= 10.3 cms

Velocidad media= .25 m/s

Angulo de la compuerta= 5 grados respecto a la horizontal

Coefficiente de Nunner= 6.63

La Pendiente del fondo fue la misma que la del experimento

No 1 = 2.26 E-04

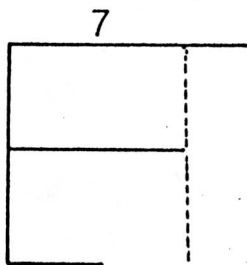
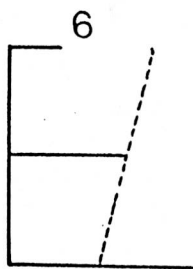
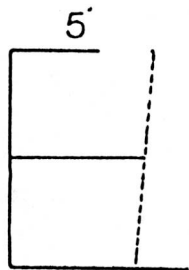
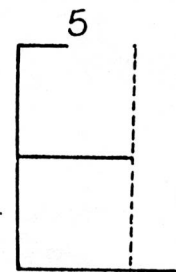
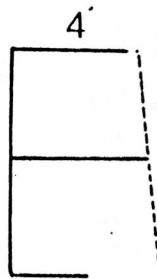
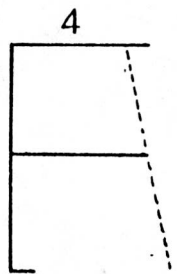
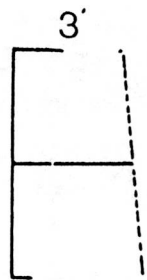
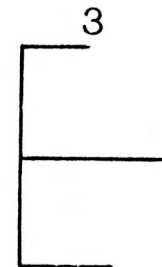
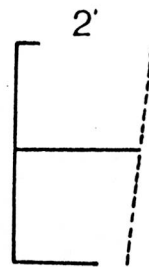
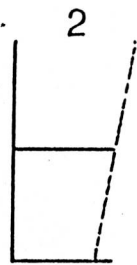
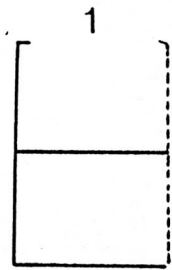
Determinación de la pendiente de la superficie

Piezómetro Diferencia de altura entre N.H y nivel
de los piezómetros (flujo uniforme).
(cms)

| | |
|---|------|
| 1 | 3.10 |
| 2 | 2.95 |
| 3 | 2.95 |
| 4 | 2.80 |
| 5 | 2.80 |
| 6 | 2.75 |
| 7 | 2.60 |

Pendiente de la superficie = 2.44 E-04

Factor de correlación (R) = .969



— Exp.

----- Teor.

Datum = 0.23 m/s

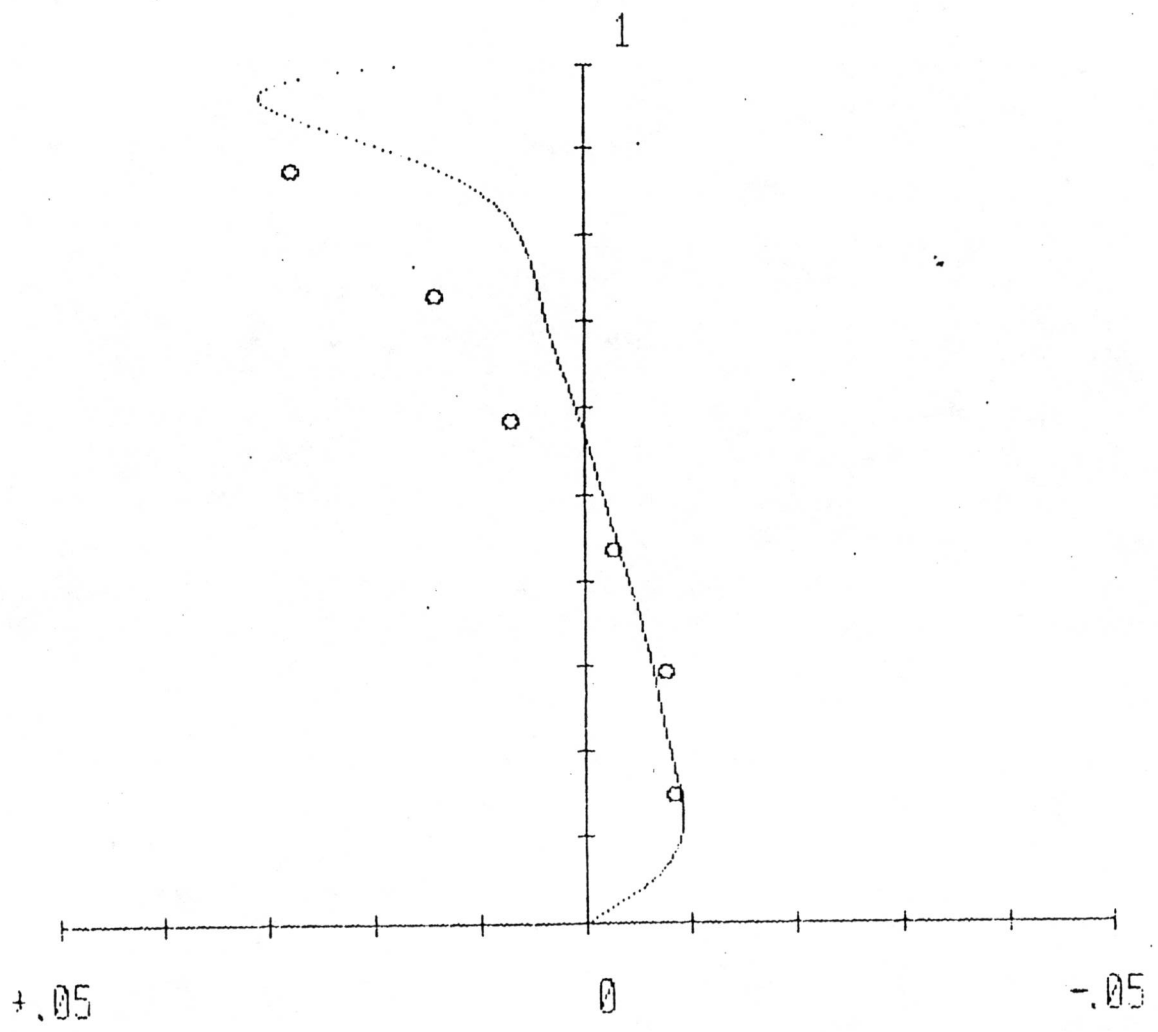
0.25m.

1 cm/seg.

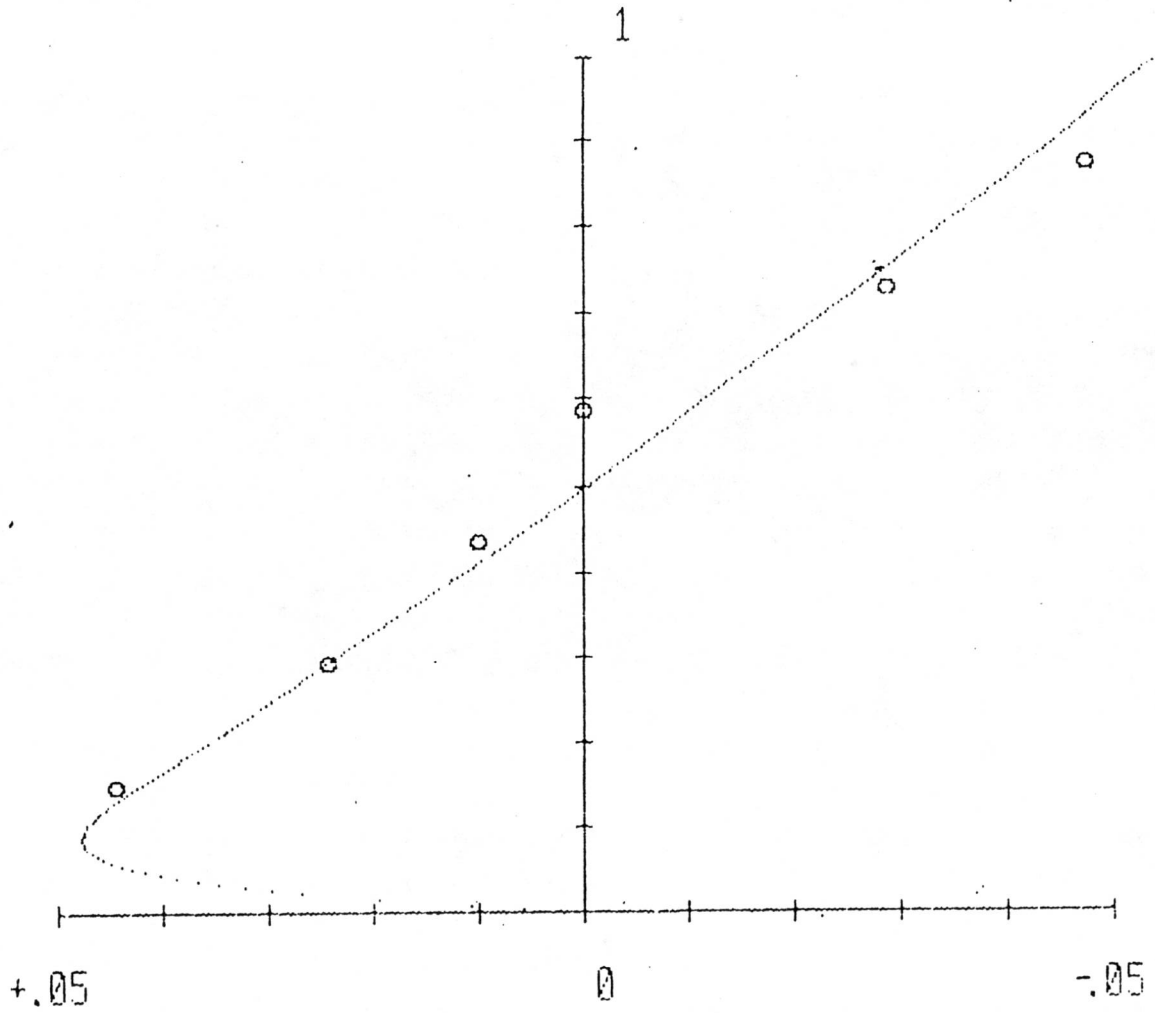
GRAFICOS DE $U(\eta) \checkmark$ VS η

EXPERIMENTO NO 2

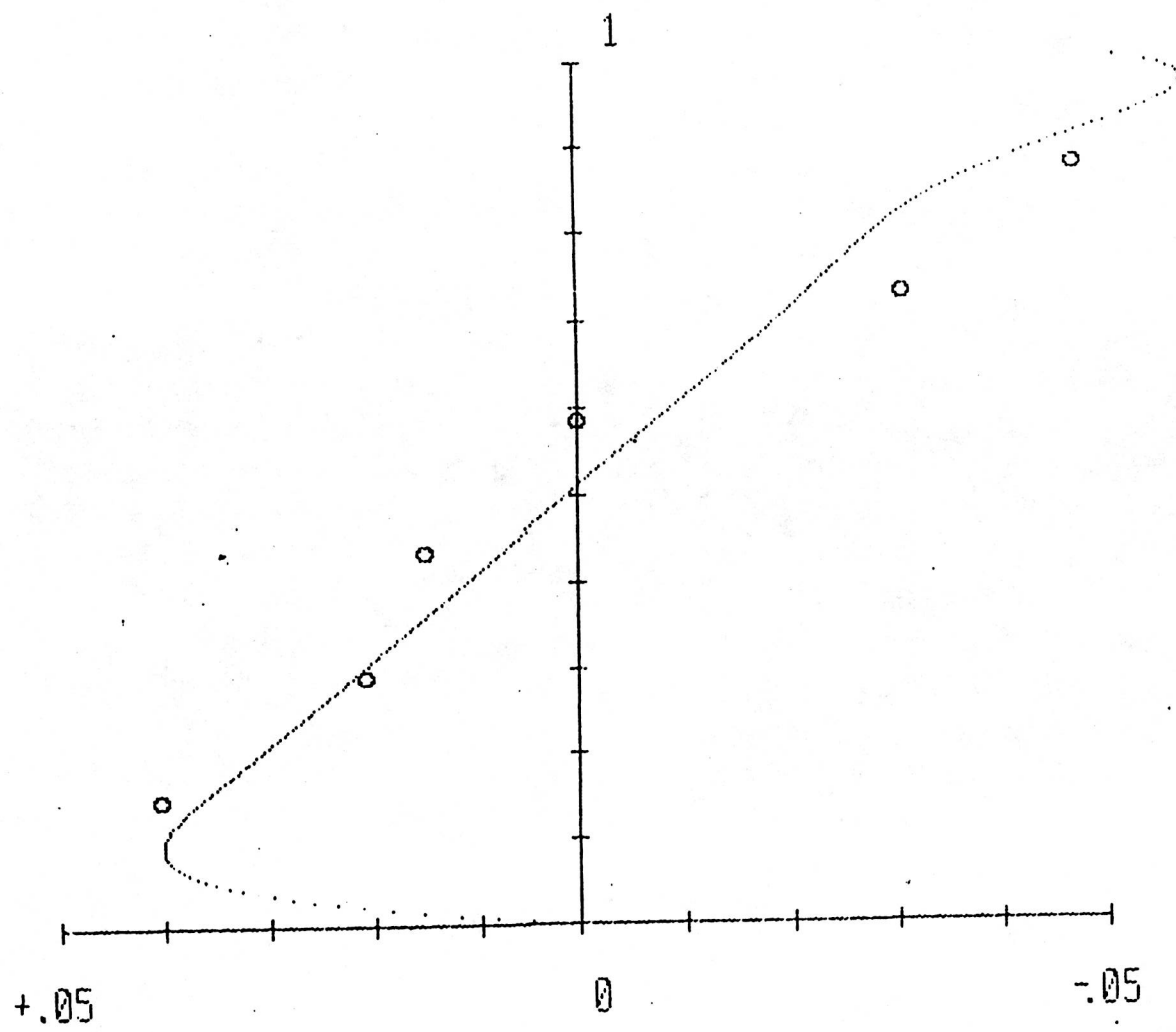
ESTACION 1



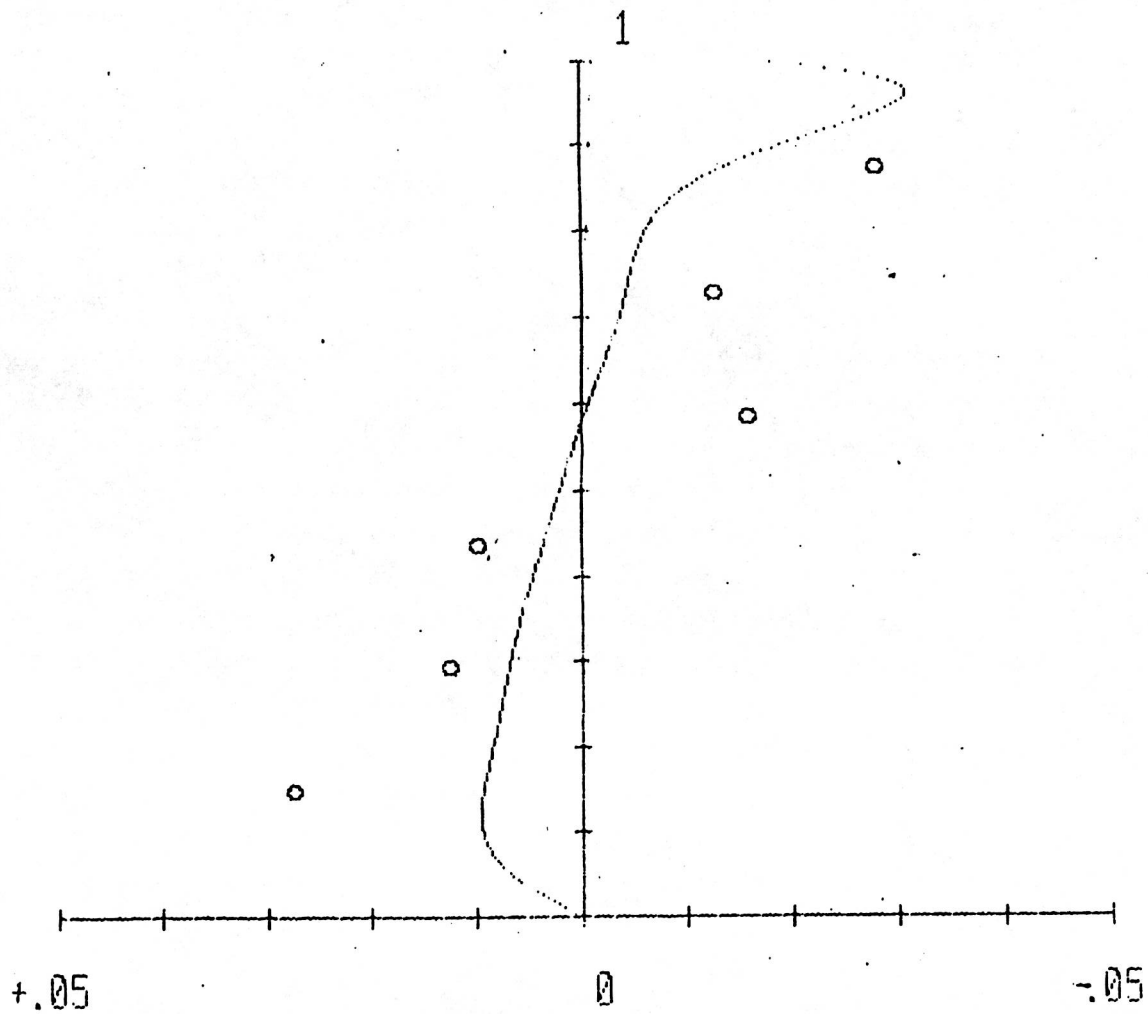
ESTACION 2



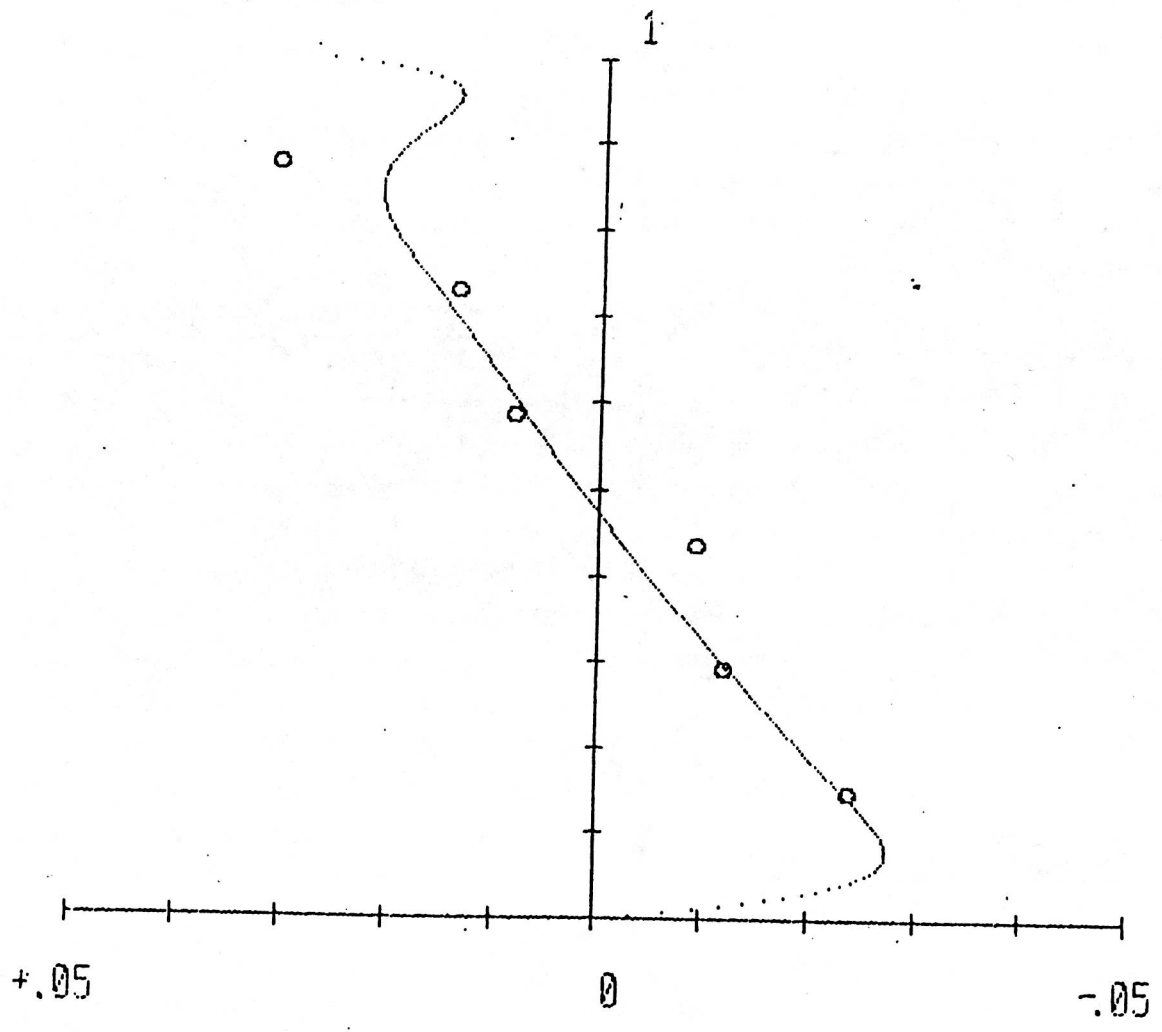
ESTACION 2'



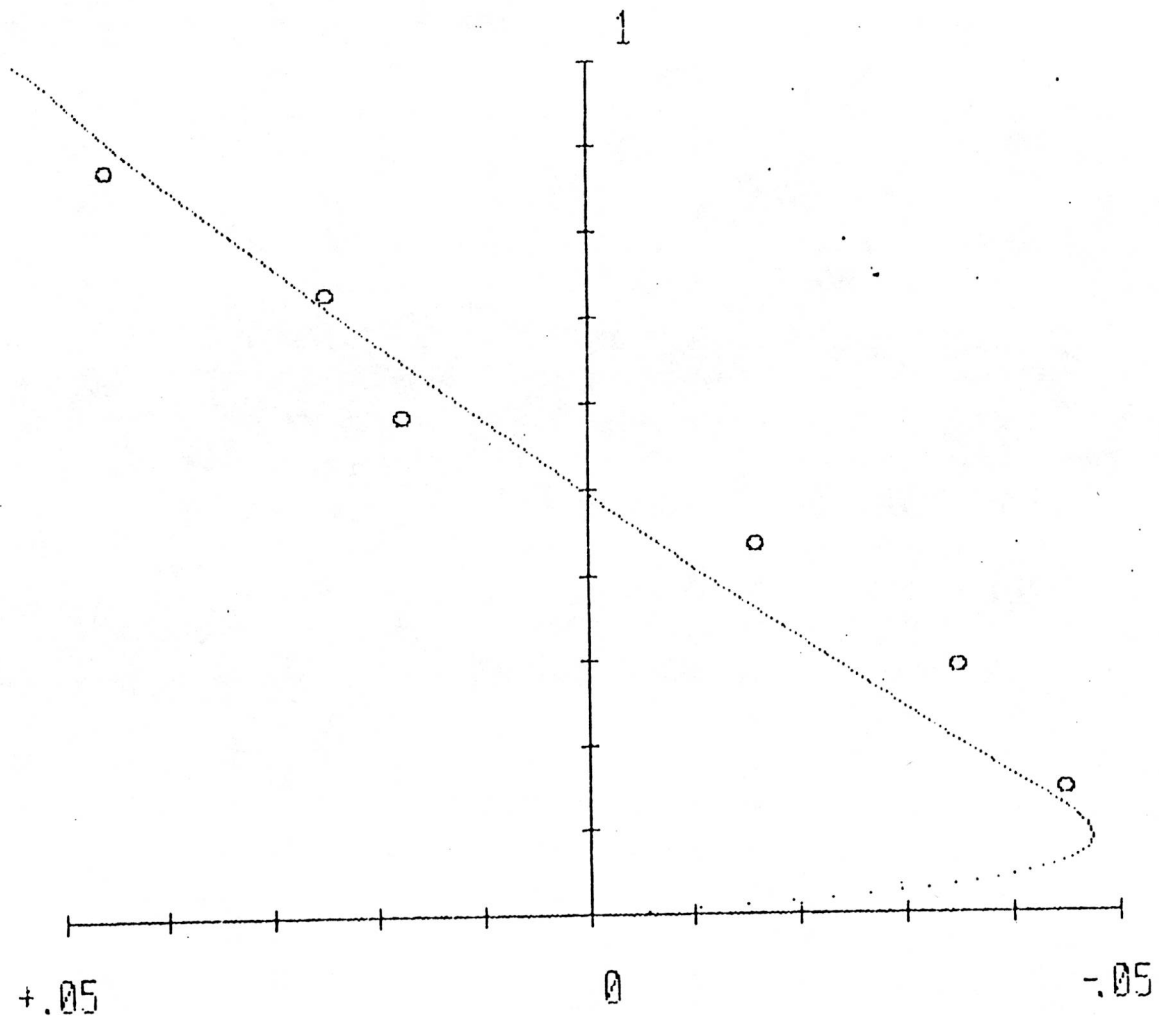
ESTACION 3



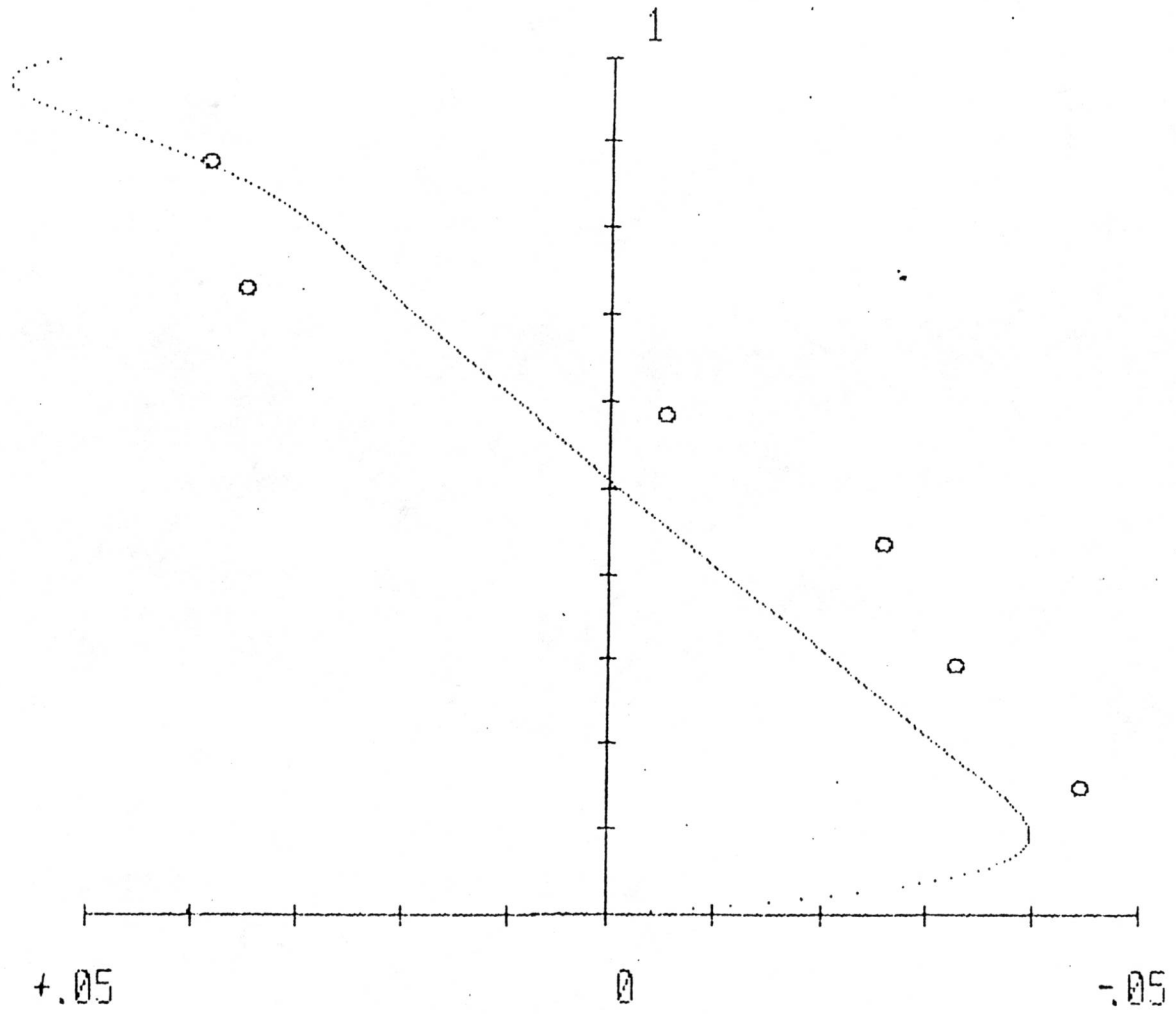
ESTACION 3'



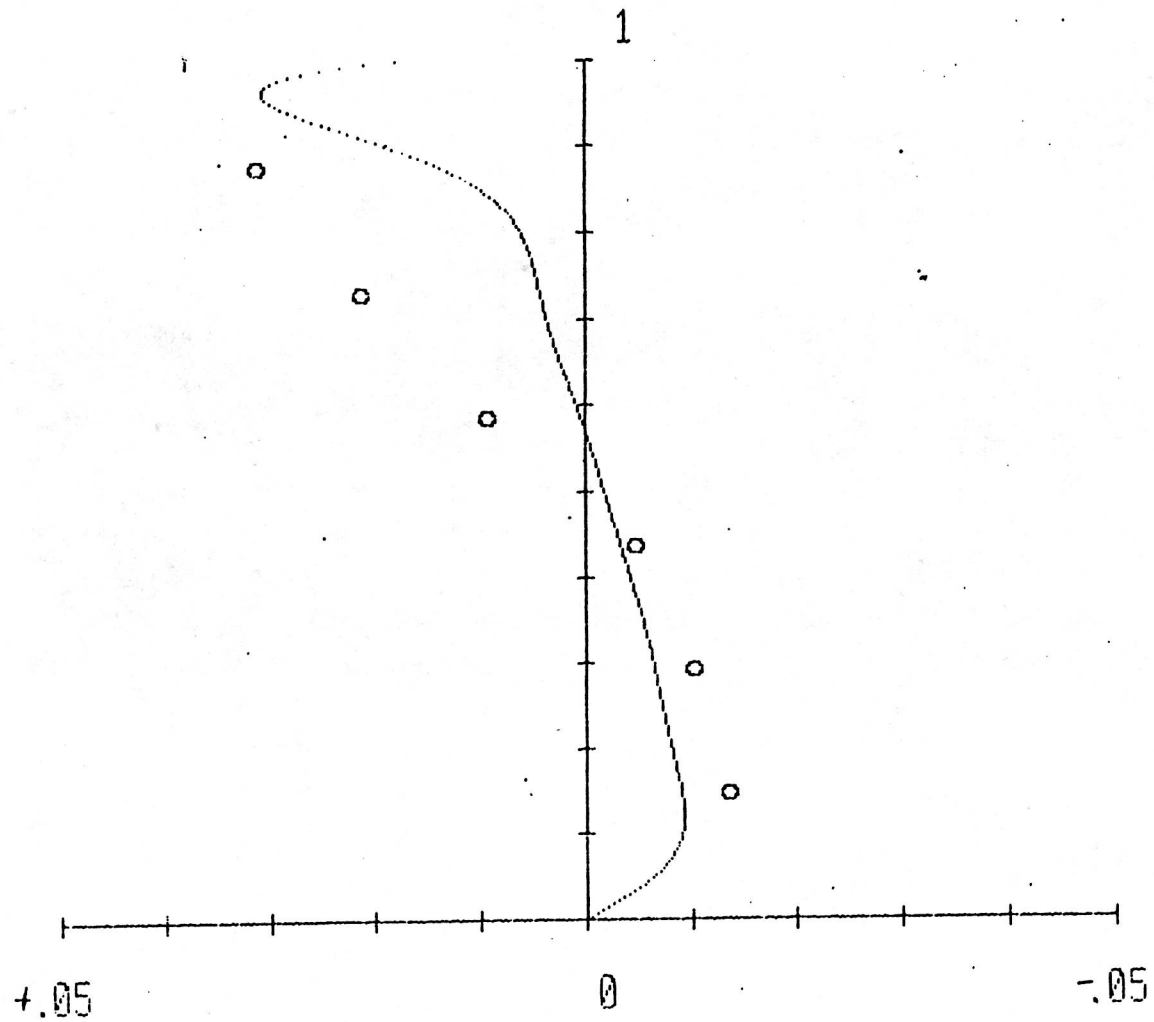
ESTACION 4



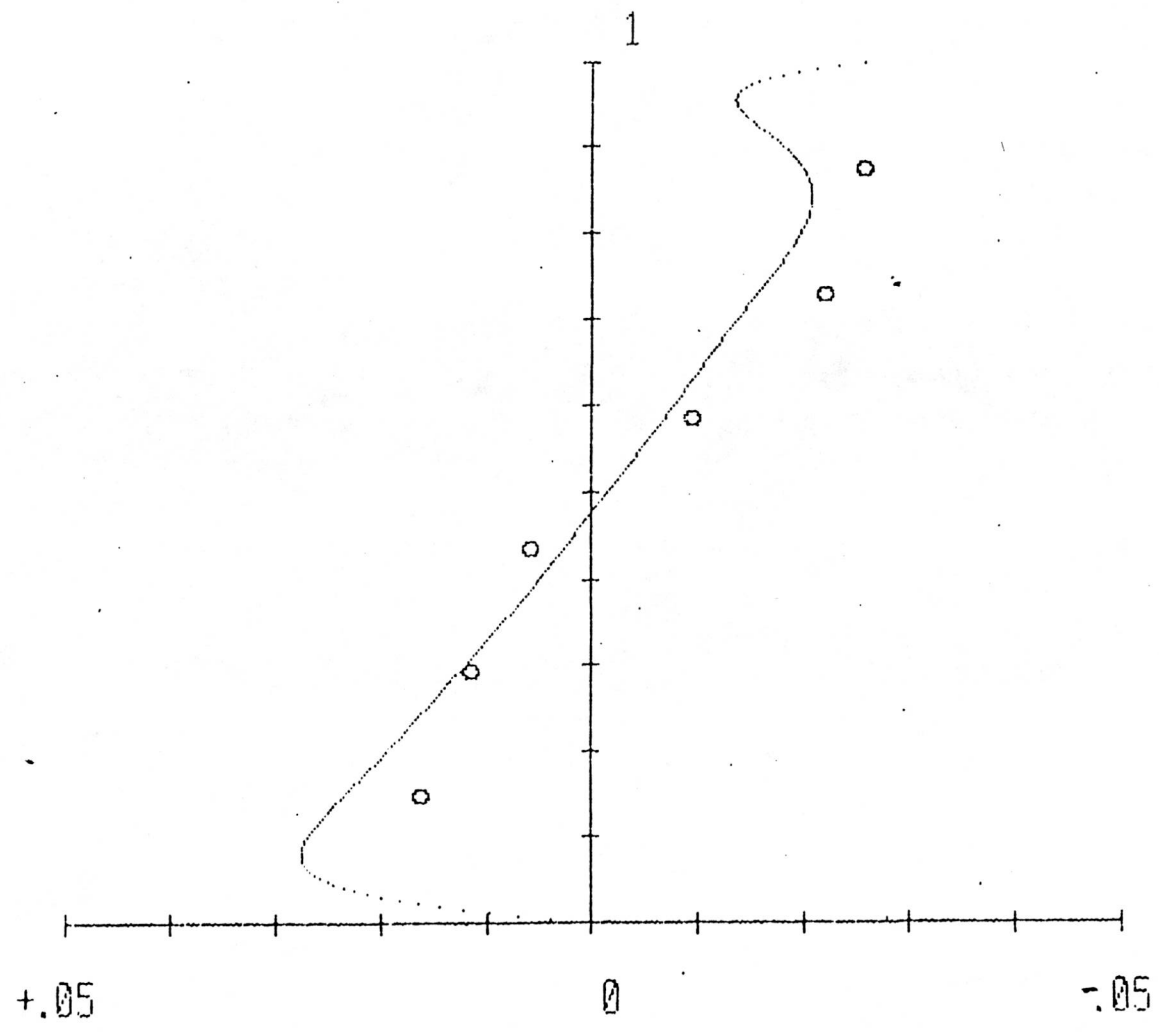
ESTACION 4'



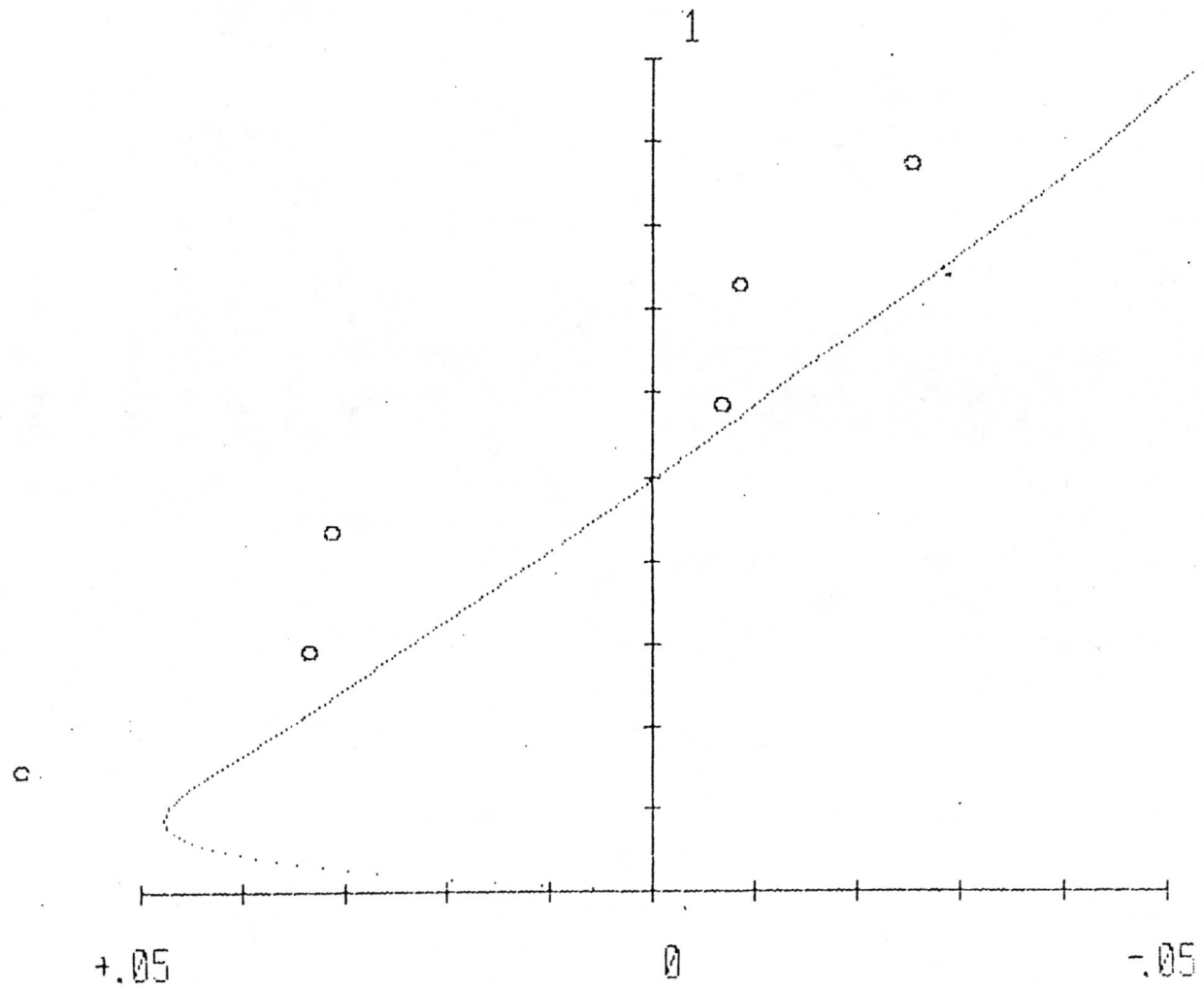
ESTACION 5



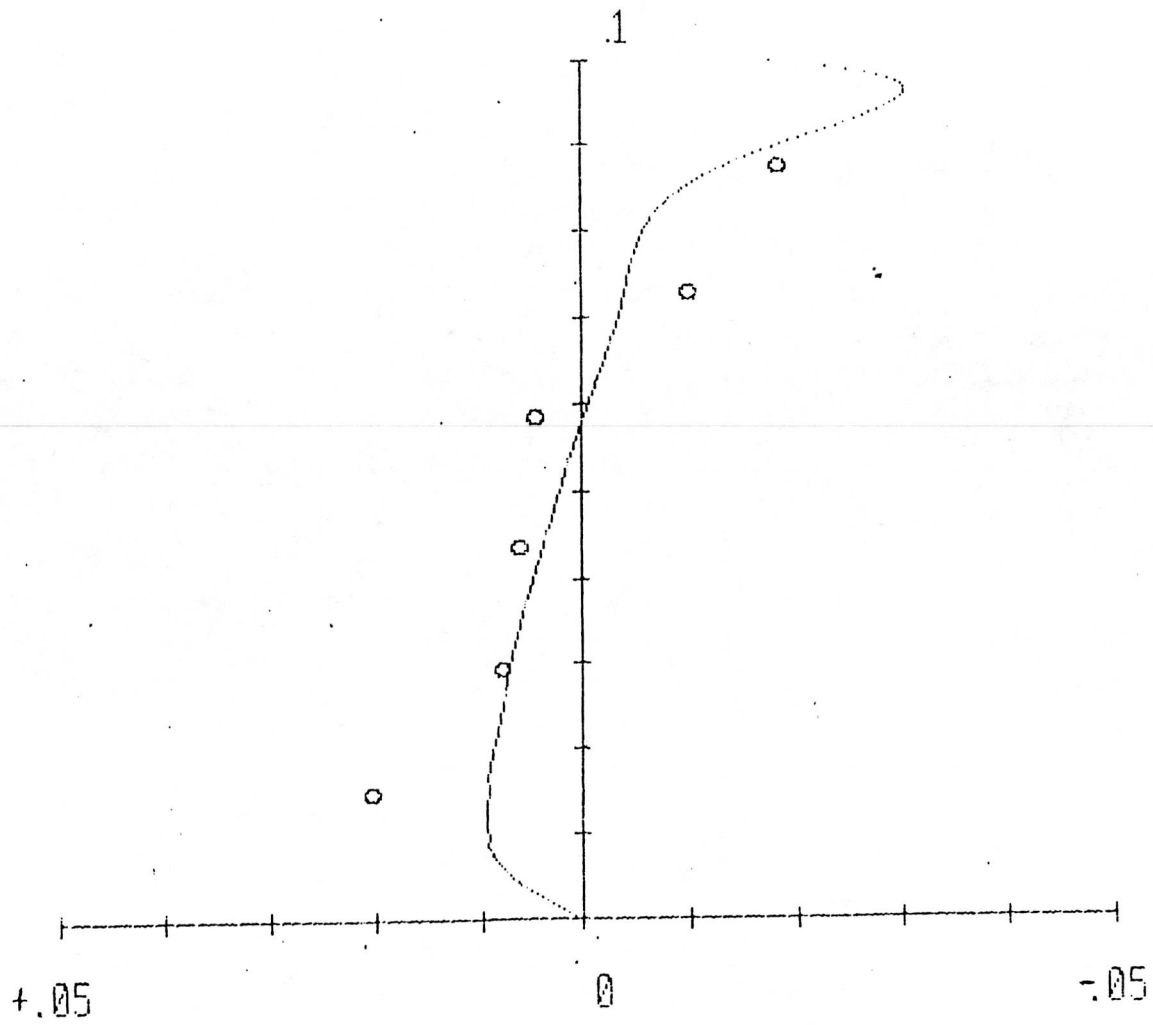
ESTACION 5'



ESTACION 6



ESTACION 7



EXPERIMENTO 3

CARACTERISTICAS DEL FLUJO

Profundidad del agua = 10.5 cms

Velocidad media = .18 m/s

Angulo de la compuerta = 25 grados respecto a la horizontal

Coefficiente de Nunner = 4.55

La Pendiente del fondo fue la misma que la del experimento
No 1 = $2.26 \text{ E-}04$

Determinación de la pendiente de la superficie

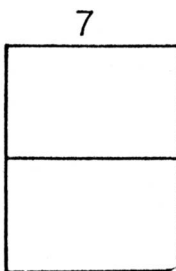
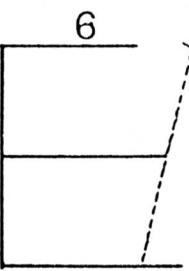
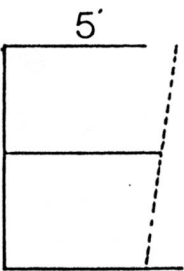
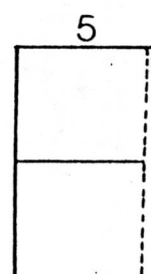
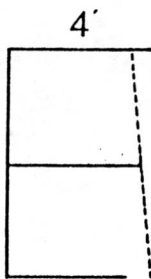
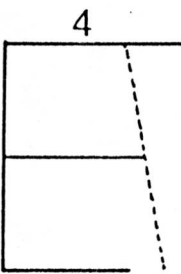
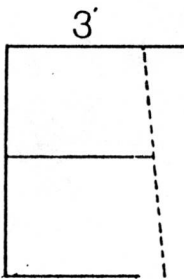
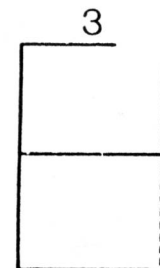
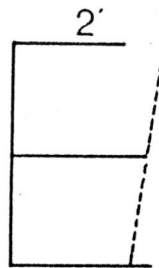
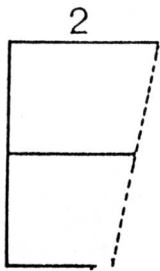
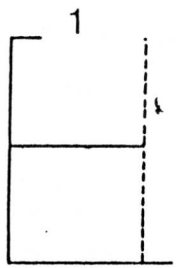
Piezómetro

Diferencia de altura entre N.H y nivel
de los piezómetros (flujo uniforme).
(cms)

| | |
|---|------|
| 1 | 3.40 |
| 2 | 3.30 |
| 3 | 3.25 |
| 4 | 3.25 |
| 5 | 3.20 |
| 6 | 3.00 |
| 7 | 1.95 |

Pendiente de la superficie = $2.38 \text{ E-}04$

Factor de correlación (R) = .953



— Exp.

----- Teor.

Datum = 0.16 m

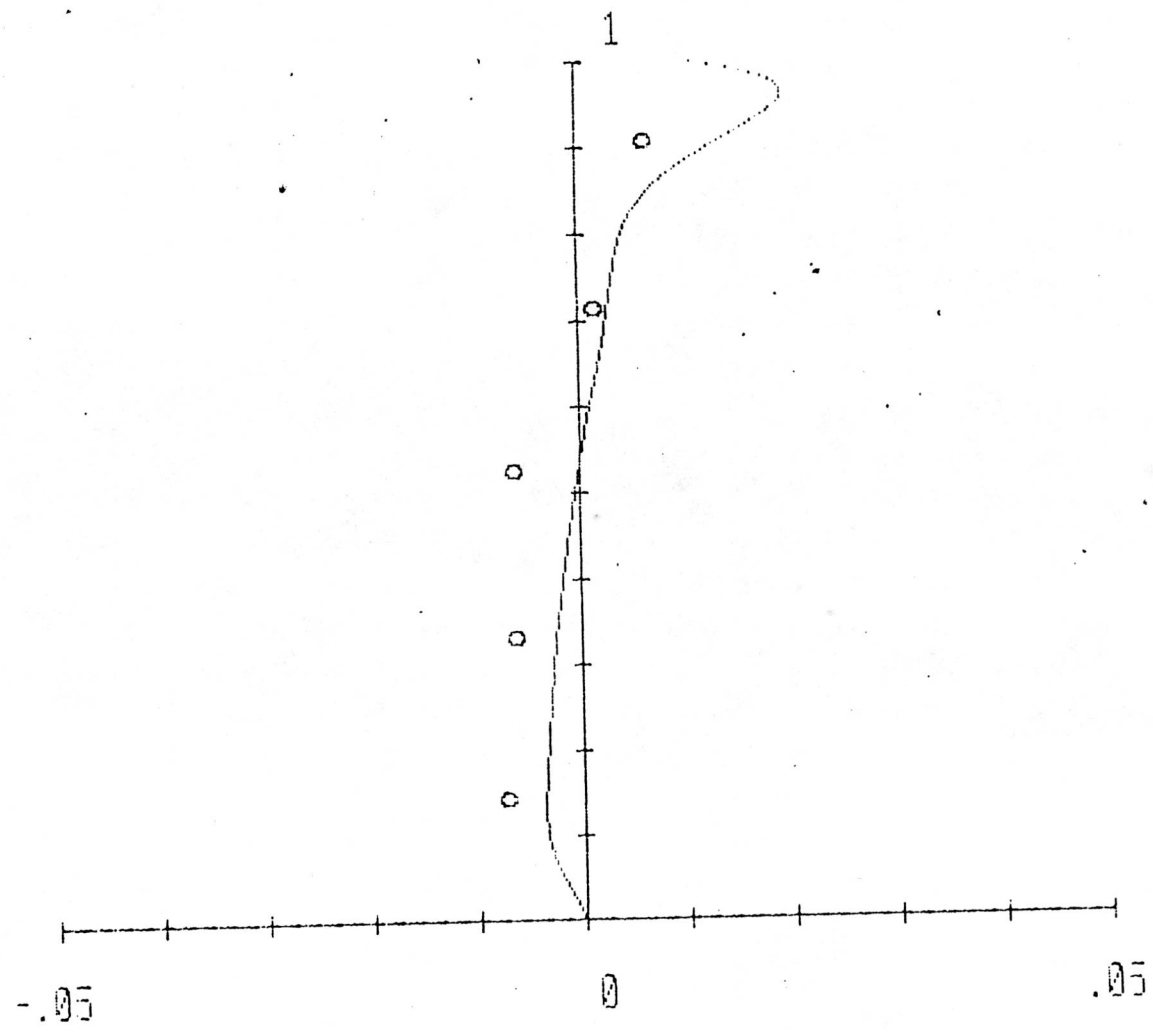
0.25m.

1 cm/seg.

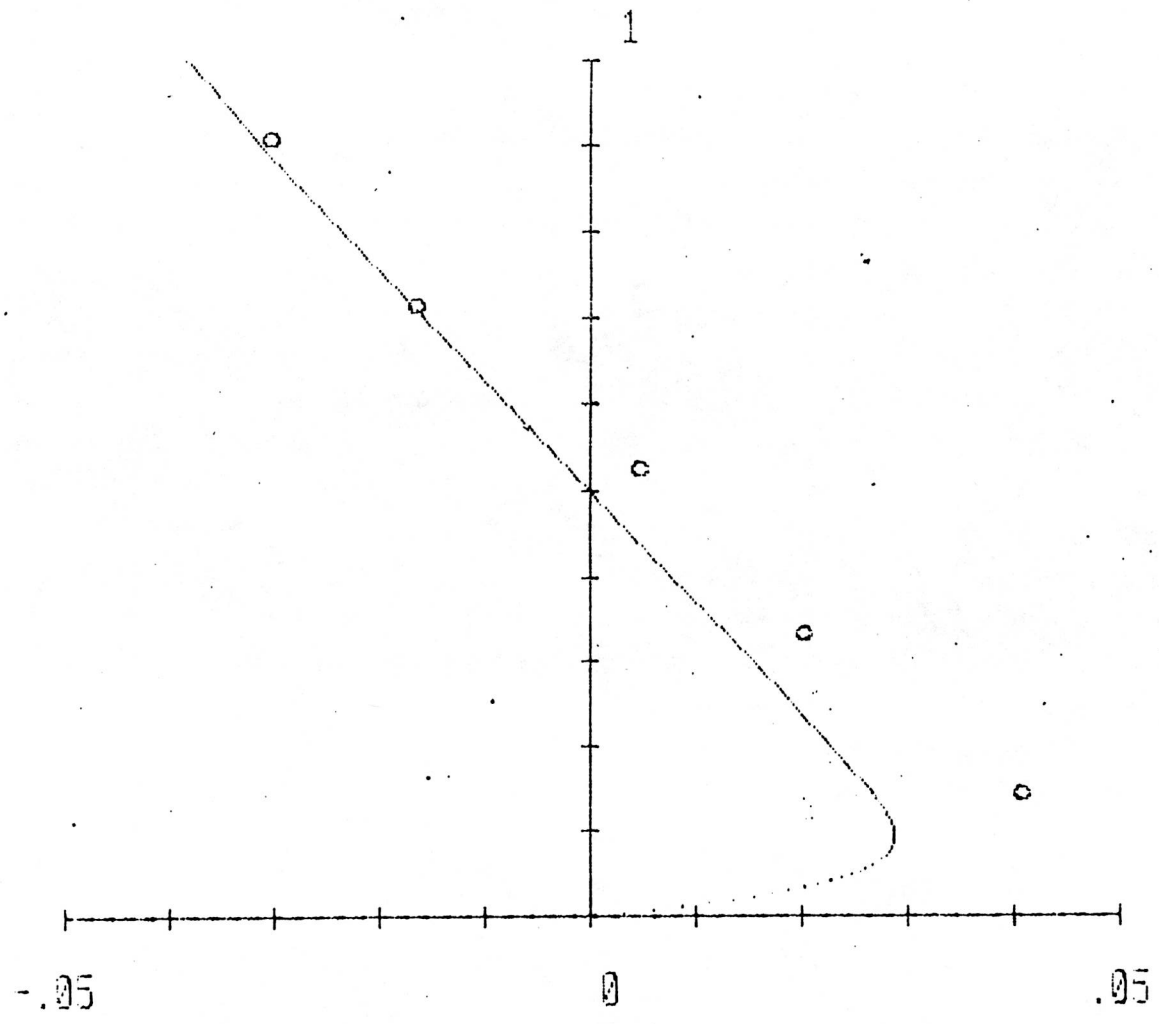
GRAFICOS DE $U(\eta) / \bar{v}$ VS η

EXPERIMENTO NO 3

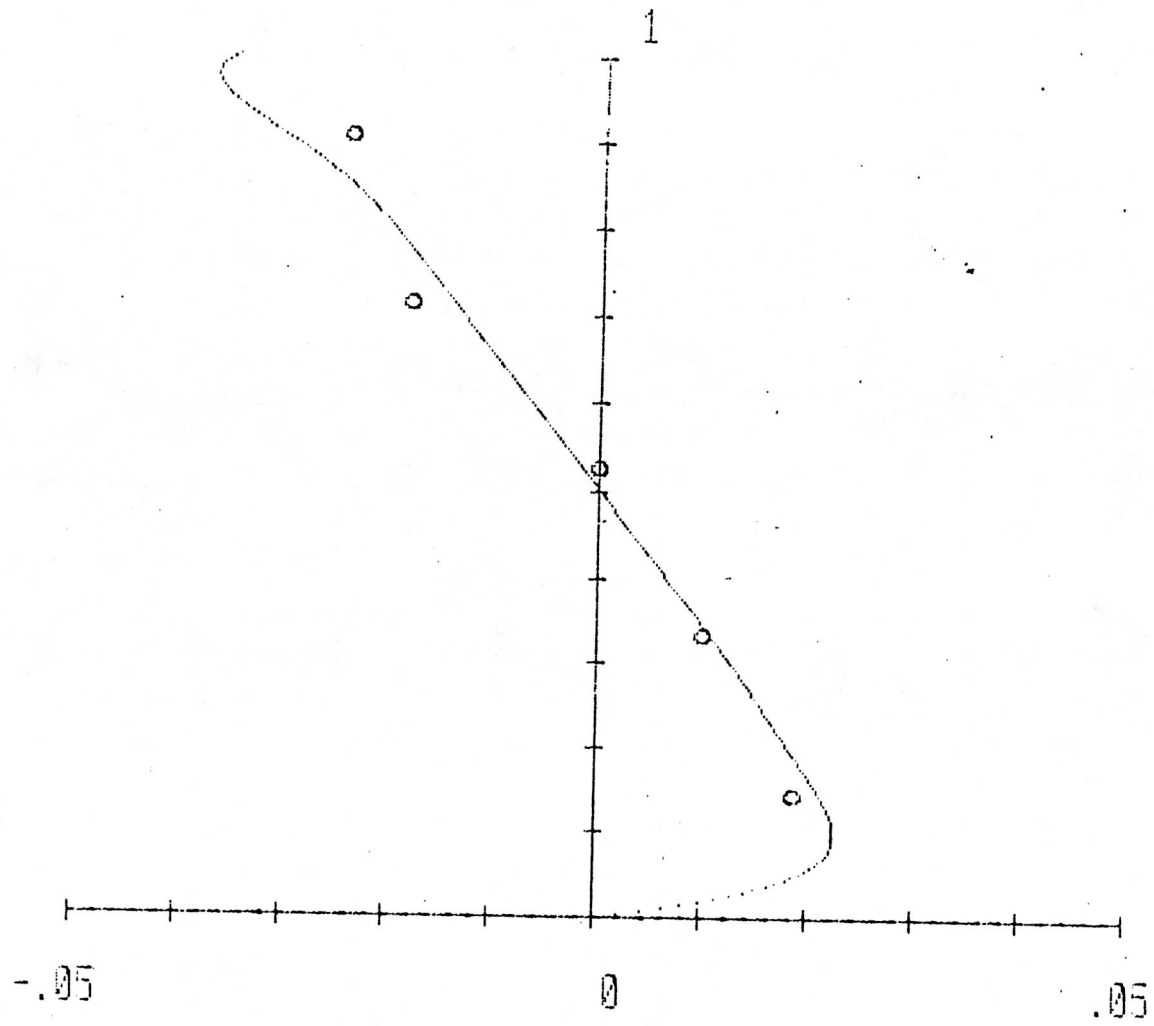
ESTACION 1



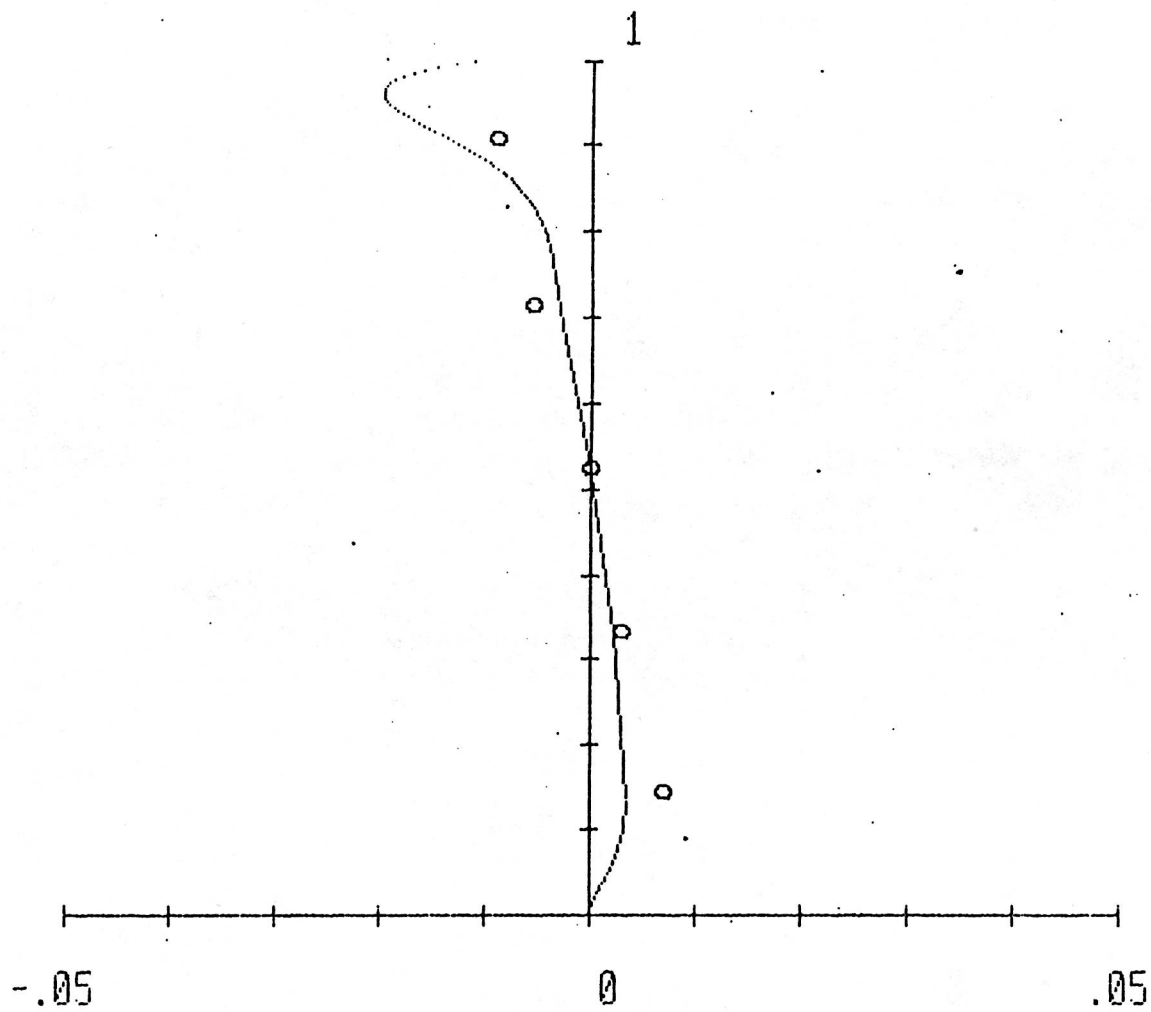
ESTACION 2



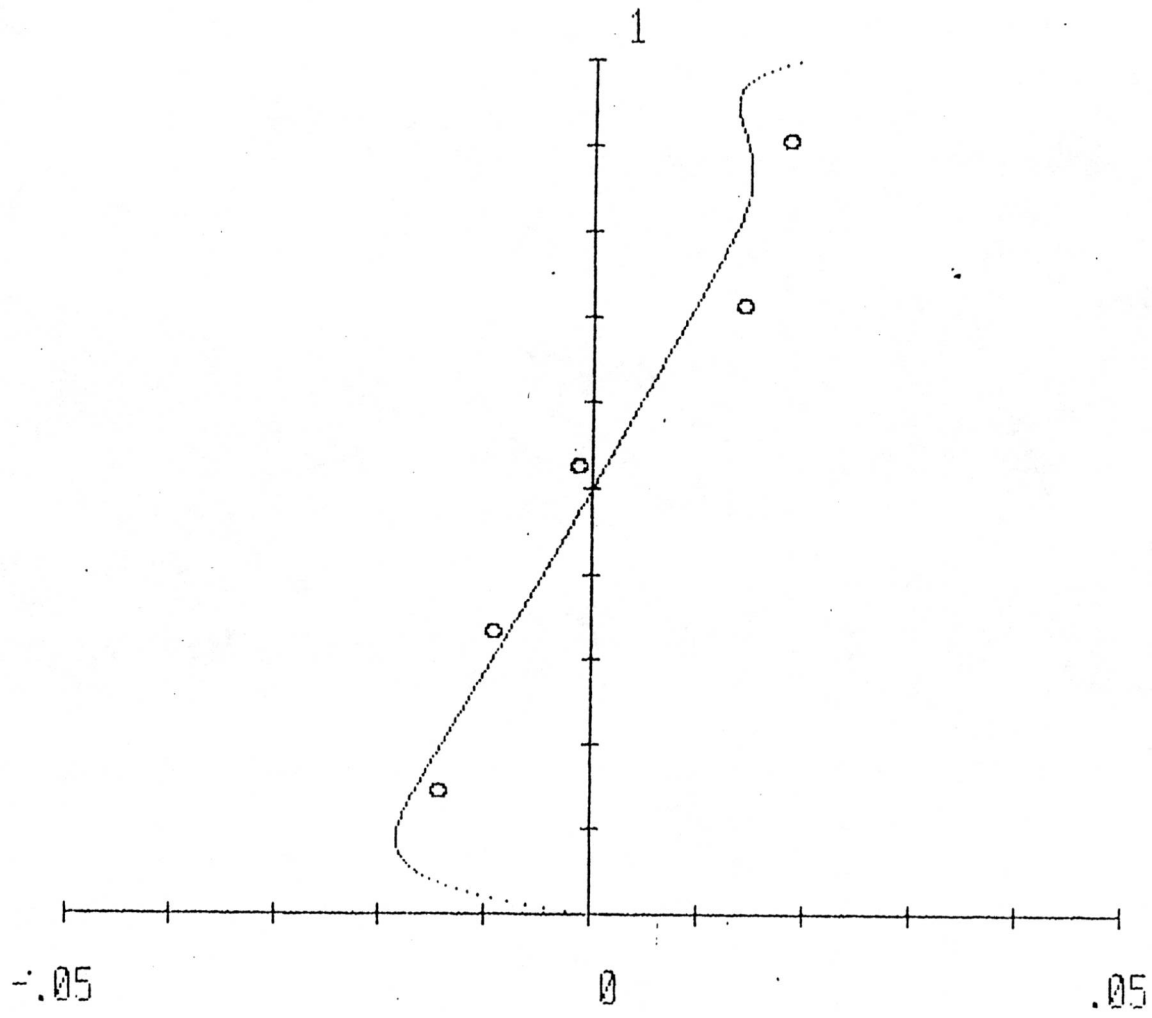
ESTACION 2'



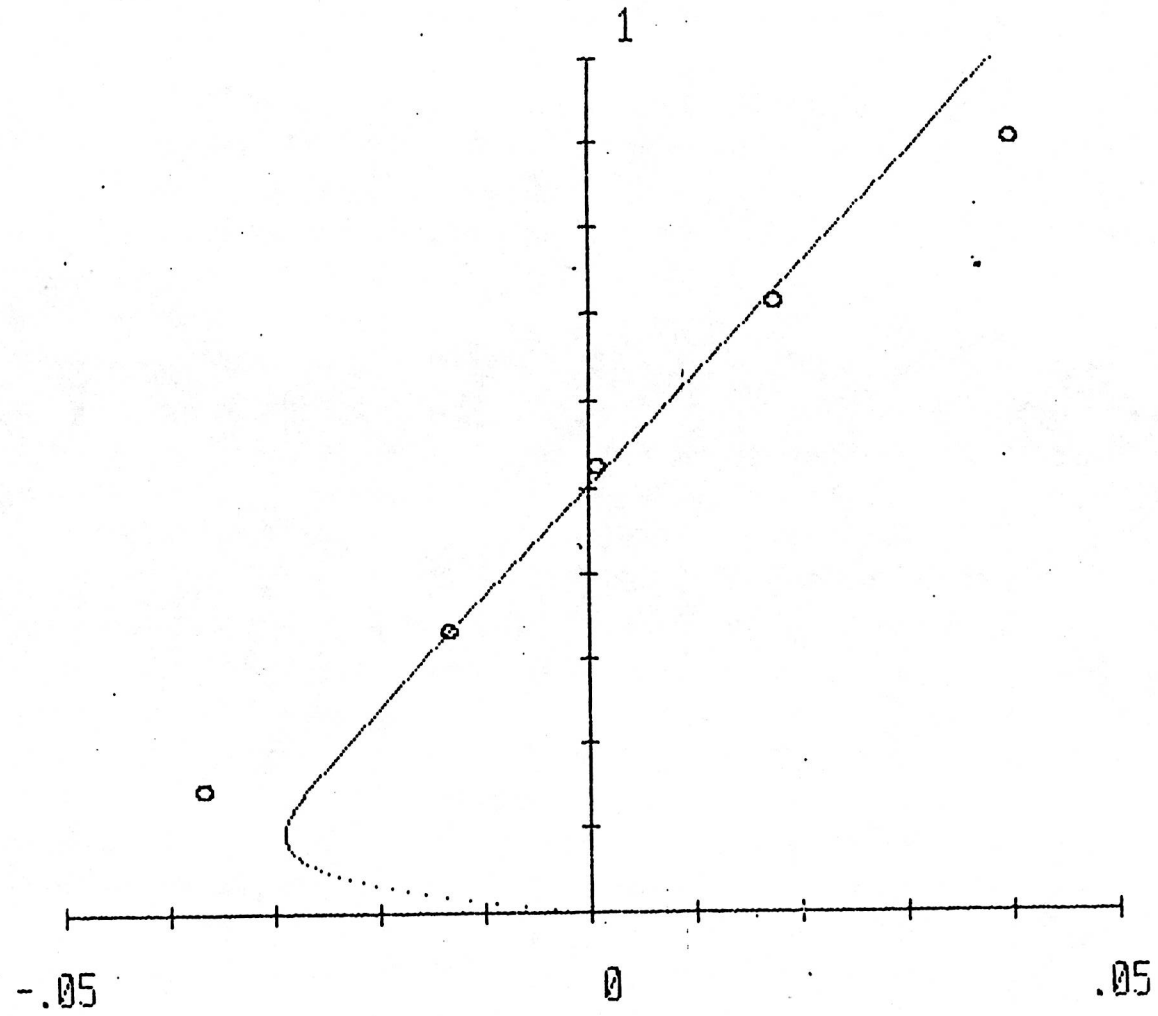
ESTACION 3



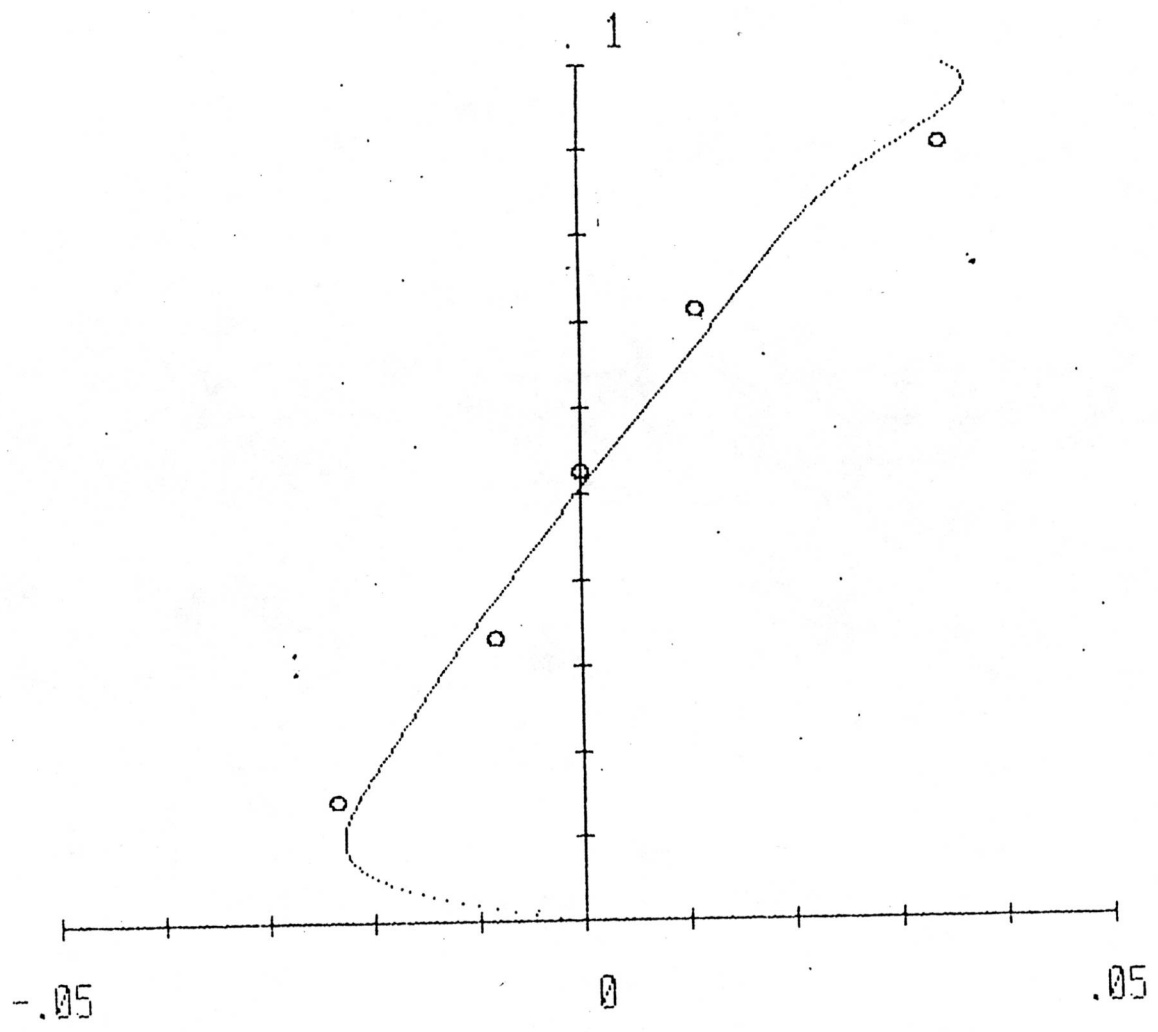
ESTACION 3'



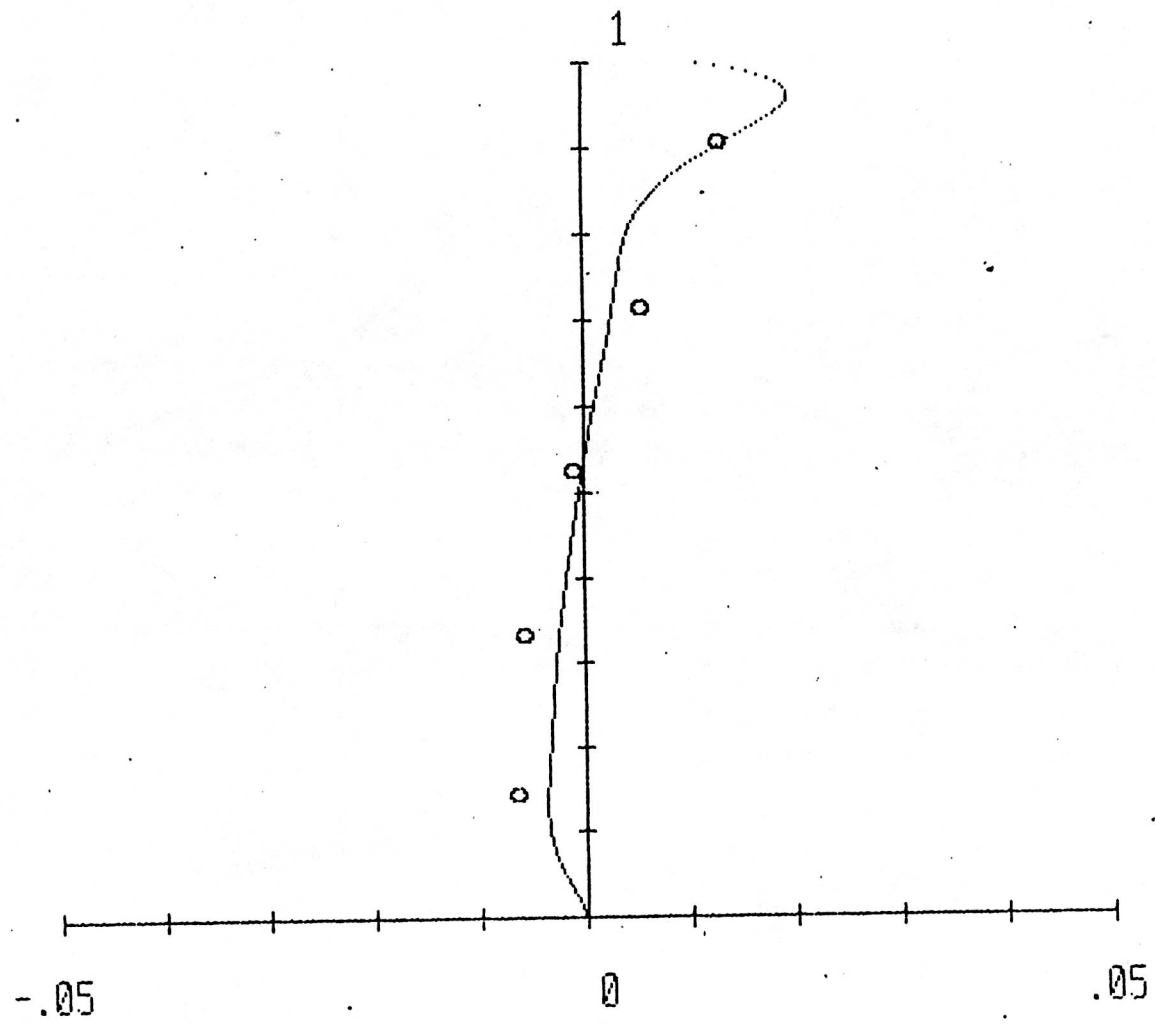
ESTACION 4



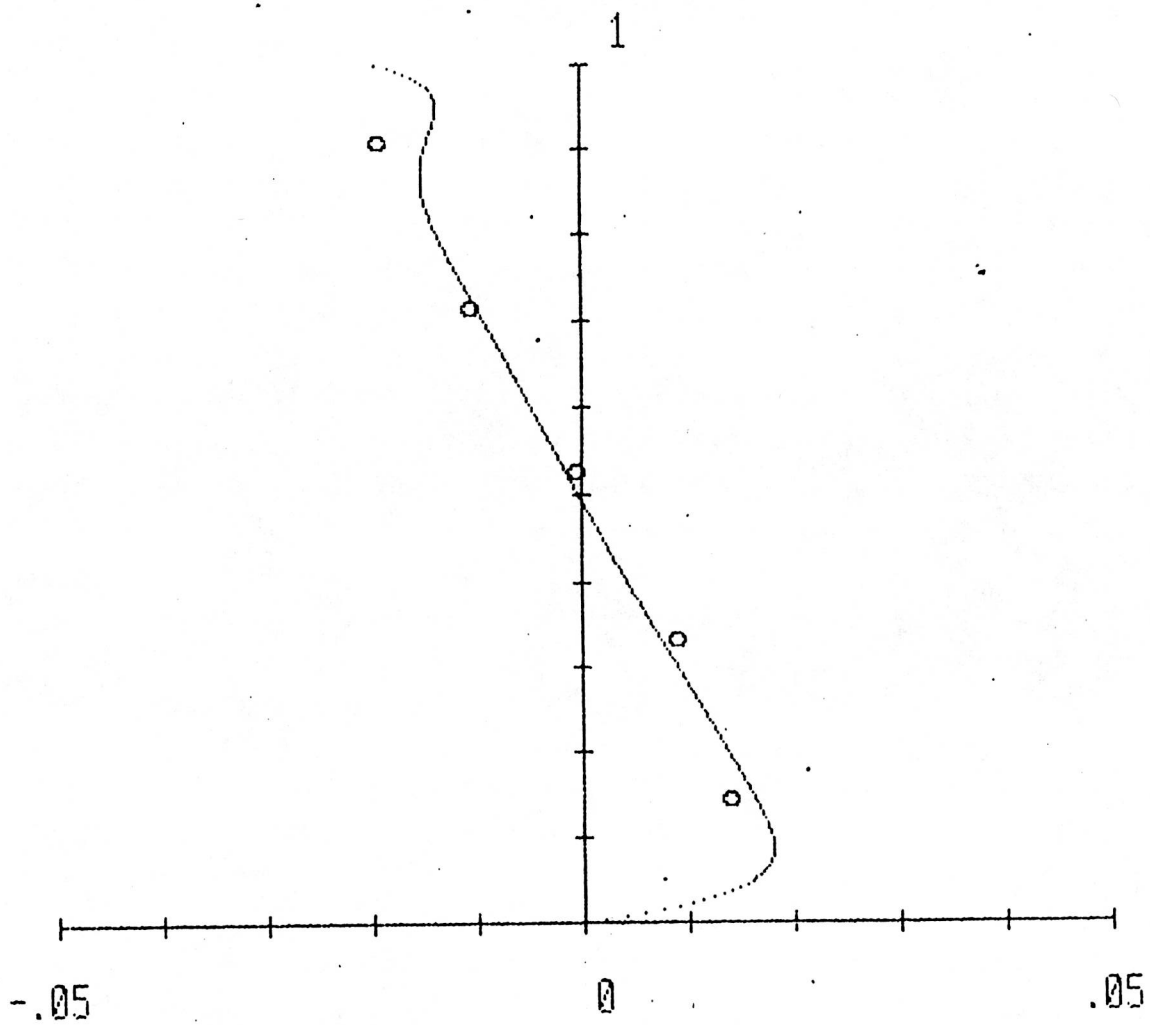
ESTACION 4'



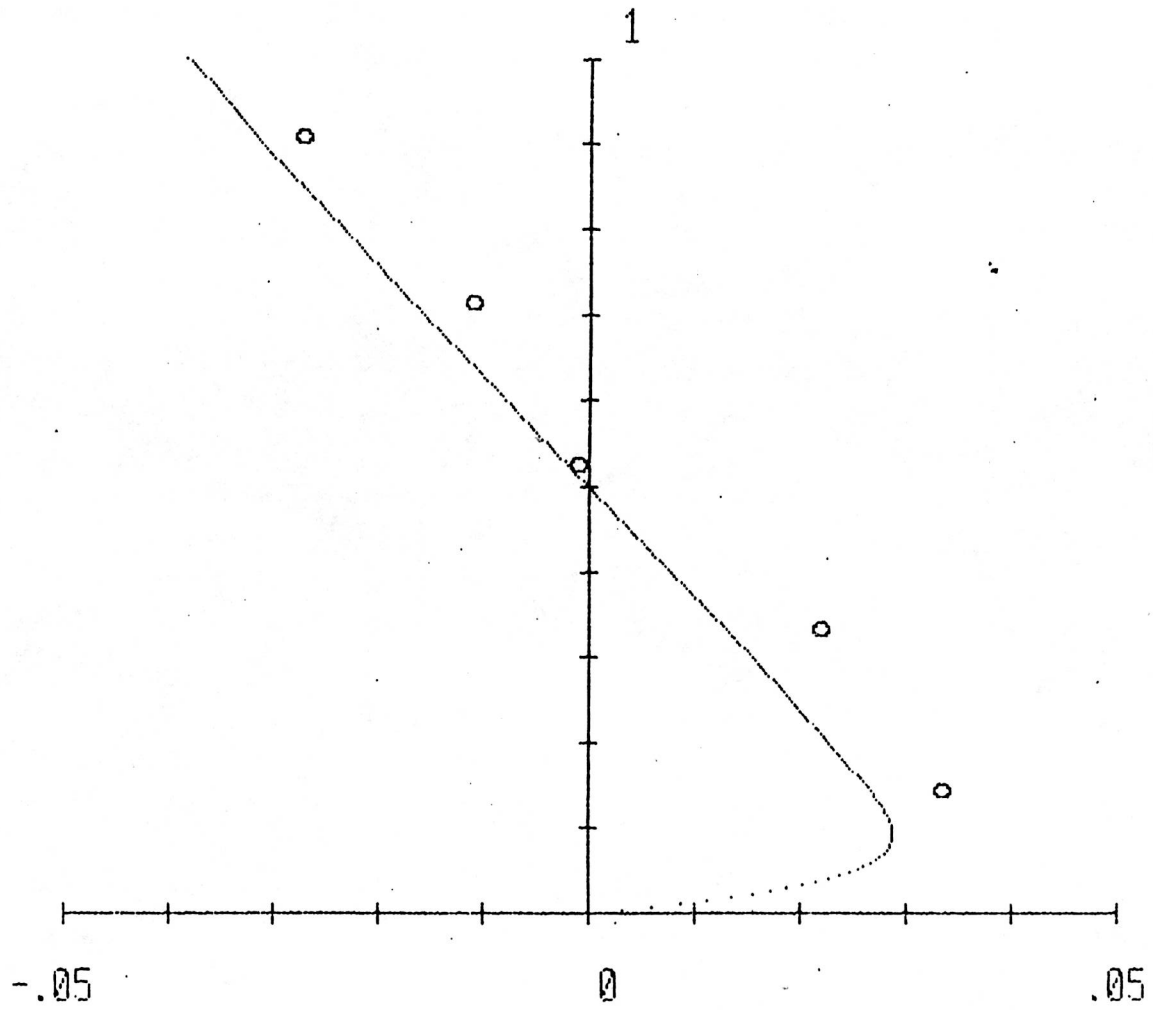
ESTACION 5



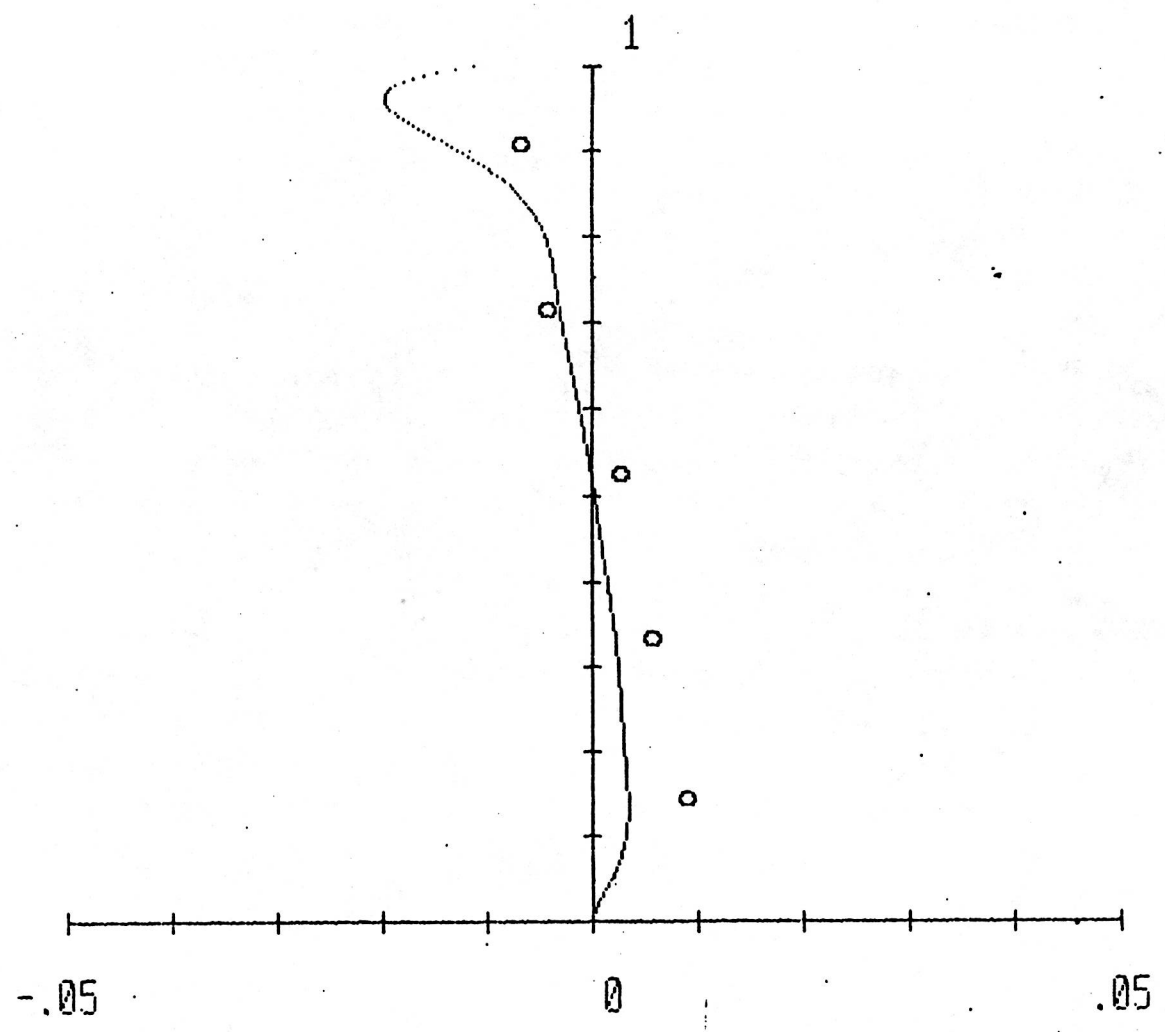
ESTACION 5'



ESTACION 6



ESTACION 7



ANEXO II

EXPLICACION DEL PROGRAMA

El programa resuelve un sistema de 4 ecuaciones con 4 incognitas las cuales estan relacionadas con la variacion radial de la velocidad y de la profundidad y con el desfase con respecto al apice de la pendiente transversal maxima del fondo. Con estas incognitas y sumando las series de potencias de η se calcula la distribucion de velocidad transversal desde $\eta = 0$ (nivel del lecho) hasta $\eta = 1$ (superficie libre) con incrementos de 0.1. Para mejorar la convergencia de las series en los puntos correspondientes a $\eta = 0.9$ y $\eta = 1$ se aumento el numero de terminos de 27 (utilizado para los demas valores de η) a 300 para $\eta = 0.9$ y 400 para $\eta = 1$.

LISTA DE SIMBOLOS DEL PROGRAMA

| | | |
|------|------------|--|
| DC | = d_c | Profundidad del agua en eje central |
| RMIN | = | Radio minimo de curvatura (apice) |
| WM | = M | Longitud de onda |
| BW | = B | Ancho del canal |
| SO | = S_o | Pendiente longitudinal del canal |
| VC | = V_c | Velocidad longitudinal en el eje central |
| FZ | = n | Coficiente de Nunner |
| PQ | = p' | |
| FF | = f | Factor de friccion |
| DP | = D_{50} | Diametro medio del sedimento del fondo |

LISTADO DEL PROGRAMA

```

5 DEFDBL C-D,P-S,W-X
10 DIM A(10,10),B(10),D(10,10),X(10),DU(11),S1(11),S2(11),
S10(11),ETA(11)
11 DIM DU1(11),DU2(11)
15 DEFDBL C-D,P-S,W-X
18 ANGLE 1
20 PRINT "MM=NUMERO DE DATOS FIJOS"
30 MM=1
40 LM=0
50 LK=0
60 INPUT "DC=";DC
70 INPUT "RMIN=";RMIN
80 INPUT "WM=";WM
90 INPUT "W=";W
100 INPUT "BW=";BW
110 INPUT "SO=";SO
120 INPUT "VC=";VC
130 INPUT "FZ=";FZ
140 INPUT "PQ=";PQ
150 INPUT "FF=";FF
160 INPUT "DP=";DP
170 SG=2.65
180 Q3=PQ*3.141593*(BW/2)^2/WM
190 Q5=FF*FZ*(FZ+2)/(8*DC*(FZ+1)^2)
200 Q6=3.141593/WM
210 Q7=VC*.785398*BW^2/WM
220 Q8=30.787608*FZ*(FZ+2)/(WM*VC^2*(FZ+1)^2)
230 Q9=Q7/(1000*DC*SO)
240 T1=1/FZ
250 T2=1+T1
260 T3=3/FZ+1
270 T4=3/FZ+2
280 S3=1/(T1*T2)-1/(T3*T4)
290 T5=2/FZ+1
300 T6=T5+1
310 S4=1/(T1*T2)-1/(T5*T6)
320 T7=4/FZ+2
330 S5=1/(T1*T5)-1/(T3*T7)
340 S6=1/(T1*T5)-1/(T5*T4)
350 T8=T7+1
360 S7=1/(T1*T6)-1/(T3*T8)
370 T9=T4+1
380 S8=1/(T1*T6)-1/(T5*T9)
390 FOR I=1 TO 175

```

```

400 S3=S3+1/((T1+I)*(T2+I))-1/((T3+I)*(T4+I))
410 S4=S4+1/((T1+I)*(T2+I))-1/((T5+I)*(T6+I))
420 S5=S5+1/((T1+I)*(T5+I))-1/((T3+I)*(T7+I))
430 S6=S6+1/((T1+I)*(T5+I))-1/((T5+I)*(T4+I))
440 S7=S7+1/((T1+I)*(T6+I))-1/((T3+I)*(T8+I))
450 S8=S8+1/((T1+I)*(T6+I))-1/((T5+I)*(T9+I))
460 NEXT I
470 S12=S7
480 S13=S8
490 T1=1/FZ-1
500 T2=2/FZ
510 T3=T1+T2
520 T4=4/FZ
530 T5=5/FZ
540 T6=6/FZ+1
550 T7=3/FZ
560 T8=T4+1
570 T9=1+T2
580 T10=1+T4
590 T11=1+T6
600 T12=1/FZ
610 T13=1+T5
620 S11=0
630 S14=0
640 SS15=0
650 FOR K=1 TO 50
660 FOR J=1 TO 50
670 S11=S11+(1/((T1+K)*(T2+K))-1/((T3+J+K)*(T4+J+K)))/((T1+J)*
*(T2+J))-1/((T1+K)*(T2+K))-1/((T5+J+K)*(T6+J+K)))/((T7+J)*
(T8+J))
680 S14=S14+(1/((T1+K)*(T9+K))-1/((T3+J+K)*(T10+J+K)))/
((T1+J)*(T2+J))-1/((T1+K)*(T9+K))-1/((T5+J+K)*(T11+J+K)))/
((T7+J)*(T8+J))
690 SS15=SS15+(1/((T1+K)*(T12+K))-1/((T3+K+J)*(T7+K+J)))/
((T1+J)*(T2+J))-1/((T1+K)*(T12+K))-
1/((T5+J+K)*(T13+K+J)))/((T7+J)*(T8+J))
700 NEXT J,K
710 YP=6.283185*DC*VC/WM
720 H=DC*(VC*(1+1/FZ))^2*(FZ/(FZ+2))/RMIN
730 YK=1.282283*VC*(FZ+1)/(WM*(2*FZ+1))
740 PA1=VC*3.141593*(BW/2)^2/WM
750 PA2=30.787608*(FZ+2)/((FZ+1)*WM*VC^2)
760 CC1=.641141*VC^2*(1+1/FZ)/(WM*SO*FZ)
770 CC2=(VC*(1+1/FZ))^2/(9.8*SO*FZ)
780 CC3=6.283185*VC*(FZ+1)/(WM*SO*(FZ+2))
790 CC4=.641141*(VC*(1+1/FZ))^3/(WM*RMIN*SO*(FZ+2))
800 CC5=CC2*CC3

```

810 $CC6=CC2*CC4$
820 $CC7=1.282283*VC*(1+1/FZ)/WM$
830 $CC8=YP*(1+1/FZ)$
840 $U1=1-CC7*CC5*S12+CC7*S13*CC5*S3/S4$
850 $U2=CC7*VC*(FZ+1)/(S0*(2*FZ+2))-CC7*S13*VC/(S4*S0)$
860 $U3=.204082*VC*CC4*(S12-S13*S3/S4)$
870 $U6=-CC7*CC2*CC4*S14+CC7*CC6*SS15*S13/S4+VC^2*(1+1/FZ)/(9.8*RMIN)$
880 $U7=U1^2+U2^2$
890 $U8=U6*U1+U3*U2$
900 $U5=YK-CC7*(FZ/(2*FZ+1))+CC7*S13/S4$
910 $U9=-U5*U1$
920 $U10=U5*U2$
930 $U11=U8/U7$
940 $U12=U9/U7$
950 $U13=U10/U7$
960 $U14=(U3-U2*U11)/U1$
970 $U15=-U2*U12/U1$
980 $U16=(U5-U2*U13)/U1$
990 $U17=(-9.8*DC+CC8*CC2*CC3*S5-CC8*S6*CC5*S3/S4)*102.04$
1000 $U18=-102.04*(CC8*VC*(FZ+1)/((FZ+2)*S0)-CC8*S6*VC/(S4*S0)$
1010 $U20=-102.04*(CC8*(FZ/(FZ+1))-S6/S4)-YP$
1020 $U21=CC4*DC*VC*(1+1/FZ)*102.04*(S5-S6*S3/S4)$
1030 $U22=U14*U17+U18*U11+U21$
1040 $U23=U15*U17+U12*U18$
1050 $U24=U16*U17+U13*U18+U20$
1060 $U25=(CC8*VC*(FZ+1)/(S0*(FZ+2))-CC8*S6*VC/(S4*S0))*102.04$
1070 $U26=(CC8*CC2*CC3*S5-CC8*S6*CC5*S3/S4-9.8*DC)*102.04$
1080 $U27=(CC8*FZ/(FZ+1)-CC8*S6/S4-YP)*102.04$
1090 $U29=(H+CC8*S6*CC6*SS15/S4-CC8*S11*CC4*CC2)*102.04$
1100 $U30=U14*U25+U11*U26+U29$
1110 $U31=U15*U25+U12*U26+U27$
1120 $U32=U16*U25+U13*U26$
1130 $A(1,1)=Q7*Q8*U13-Q5$
1140 $A(1,2)=2*Q6-Q7*Q8*U12$
1150 $A(1,3)=Q7*Q8*U13+Q5/2$
1160 $A(1,4)=Q6-Q7*Q8*U12$
1170 $A(2,1)=-Q7*Q8*U16-2*Q6$
1180 $A(2,2)=Q7*Q8*U15-Q5$
1190 $A(2,3)=A(2,1)+Q6$
1200 $A(2,4)=A(2,2)+1.5*Q5$
1210 $A(3,1)=Q9*U24$
1220 $A(3,4)=-Q9*U23$
1230 $A(3,2)=Q3+A(3,4)$
1240 $Q1=2*(SG-1)*DP/3/S0$
1250 $A(3,3)=Q1+A(3,1)$
1260 $A(4,1)=-Q3+Q9*U32$

```

1270 A(4,2)=-Q9*U31
1280 A(4,3)=Q9*U32
1290 A(4,4)=Q1-Q9*U31
1300 B(1)=-Q8*U11
1310 B(2)=Q8*U14
1320 B(3)=-U22/(1000*DC*SD)
1330 B(4)=-U30/(1000*DC*SD)
1340 N=4
1350 FOR I=1 TO N
1360 FOR J=1 TO N
1370 LPRINT "A(";I;",";J;") = ";A(I,J)
1375 NEXT J
1380 LPRINT :LPRINT "B(";I;") = ";B(I) : LPRINT
1390 NEXT I
1400 DEL=.0001
1410 NI=N-1
1420 FOR K=1 TO NI
1430 C=A(K,K)
1440 KI=K
1450 KK=K+1
1460 FOR I=KK TO N
1470 IF ABS(C)>=ABS(A(I,K))THEN 1500 ELSE 1480
1480 C=A(I,K)
1490 KI=I
1500 NEXT I
1510 IF(ABS(C)<=DEL)THEN 1520 ELSE 1540
1520 PRINT"NO EXISTE SOLUCION DE LAS ECUACIONES"
1530 GOTO 2740
1540 IF((KI-K)=0)THEN 1630 ELSE 1550
1550 FOR J=1 TO N
1560 B1=A(K,J)
1570 A(K,J)=A(KI,J)
1580 A(KI,J)=B1
1590 NEXT J
1600 B2=B(K)
1610 B(K)=B(KI)
1620 B(KI)=B2
1630 NEXT K
1640 FOR I=1 TO N
1650 FOR J=1 TO N
1660 D(I,J)=A(I,J)
1670 NEXT J,I
1680 FOR I=1 TO N
1690 FOR J=1 TO N
1700 A(I,J)=D(I,J)
1710 NEXT J,I
1720 FOR I=1 TO N
1730 N1=N+1

```

```

1740 N2=2*N
1750 FOR J=N1 TO N2
1760 IF((J-N-I)=0) THEN 1770 ELSE 1790
1770 A(I,J)=1
1780 GOTO 1800
1790 A(I,J)=0
1800 NEXT J,I
1810 FOR K=1 TO N
1820 C=A(K,K)
1830 FOR J=1 TO N2
1840 A(K,J)=A(K,J)/C
1850 NEXT J
1860 FOR I=1 TO N
1870 C=A(I,K)
1880 FOR J=1 TO N2
1890 IF((I-K)=0) THEN 1920 ELSE 1900
1900 A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
1910 NEXT J
1920 NEXT I
1930 NEXT K
1940 K=0
1950 FOR L=1 TO N
1960 M=L+N
1970 B(M)=B(L)
1980 NEXT L
1990 FOR I=1 TO N
2000 X(I)=0
2010 FOR J=N1 TO N2
2020 TX=A(I,J)*B(J)
2030 X(I)=TX+X(I)
2040 NEXT J
2050 IF(K>0) GOTO 2060
2060 NEXT I
2070 PV=ATN(X(1)/X(2))
2080 VO=X(1)/SIN(PV)
2090 PE=ATN(X(3)/X(4))
2100 EO=X(3)/SIN(PE)
2110 SD=EO*SIN(PE)+VO*SIN(PV)
2120 SN=-(EO*COS(PE)+VO*COS(PV))
2130 PU=ATN(SN/SD)
2140 UA=(VC*3.141593*(BW/2)^2/WM)*((EO*SIN(PE)+VO*SIN(PV))/
COS(PU))
2150 SN=U14+U15*UA*SIN(PU)+U16*UA*COS(PU)
2160 SD=U11+U12*UA*SIN(PU)+U13*UA*COS(PU)
2170 P=ATN(SN/SD)
2180 HM=SN/SIN(P)
2190 SN=U22+U23*UA*SIN(PU)+U24*COS(PU)*UA
2200 SD=U30+U31*UA*SIN(PU)+U32*UA*COS(PU)

```

```

2210 PT=ATN(SN/SD)
2220 TA=SN/SIN(PT)
2230 LPRINT "DC=";DC; "RMIN=";RMIN; "WM=";WM ;"W=";W";
BW=";BW
2240 LPRINT "SO=";SO; "VC=";VC; "FZ=";FZ; "PQ=";PQ; "DP=";DP
2250 LPRINT "PV=";PV; "PE=";PE; "PU=";PU; "P=";P; "PT=";PT
2260 LPRINT "VO=";VO; "EO=";EO; "UA=";UA; "TA=";TA; "HM=";HM
2270 FOR I=1 TO 11
2280 S1(I)=0
2290 S2(I)=0
2300 S10(I)=0
2310 NEXT I
2320 NC=65
2330 T1=1/FZ-1
2340 T2=3/FZ
2350 T3=2/FZ
2360 T4=3/FZ-1
2370 T5=5/FZ
2380 T6=4/FZ+1
2390 T7=T2-T1
2400 T8=T3-T1
2410 FOR I=2 TO 11
2420 ETA(I)=(I-1)/10
2430 IF(I=11)GOTO 2530
2440 IF(I<7)GOTO 2480
2450 NC=300
2460 IF(I<10)GOTO 2480
2470 NC=300
2480 FOR J=1 TO NC
2490 S1(I)=S1(I)+ETA(I)^(T1+J)/(T1+J)-ETA(I)^(T2+J)/(T2+J)
2500 S2(I)=S2(I)+ETA(I)^(T1+J)/(T1+J)-ETA(I)^(T3+J)/(T3+J)
2510 NEXT J
2520 GOTO 2570
2530 FOR J=1 TO 600
2540 S1(I)=S1(I)+T7/((T1+J)*(T2+J))
2550 S2(I)=S2(I)+T8/((T1+J)*(T3+J))
2560 NEXT J
2570 NEXT I
2580 NC=27
2590 FOR I=2 TO 11
2600 IF(I=10)GOTO 2630
2610 IF(I=11)GOTO 2690
2620 GOTO 2640
2630 NC=80
2640 FOR J=1 TO NC
2650 FOR K=1 TO NC
2660 S10(I)=S10(I)+(ETA(I)^(T1+K)/(T1+K)-ETA(I)^(T4+J+K)/
(T4+J+K))/((T1+J)*(T3+J))-(ETA(I)^(T1+K)/(T1+K)-
ETA(I)^(T5+J+K)/(T5+J+K))/((T2+J)*(T6+J))

```

```

2670 NEXT K,J
2680 GOTO 2730
2690 FOR J=1 TO 60
2700 FOR K=1 TO 60
2710     S10(I)=S10(I)+(1/(T1+K)-1/(T4+J+K))/((T1+J)*(T3+J))-
(1/(T1+K)-1/(T5+J+K))/((T2+J)*(T6+J))
2720 NEXT K,J
2730 NEXT I
2740     CA=(CC6*SS15-UA*SIN(PU)-VC*HM*SIN(P)/SO+CC1*S4*UA*
COS(PU)-CC5*S3*HM*COS(P))/(S4*VC)
2750     CB=(-VC*HM*COS(P)/SO+WM*CC4*S3/6.2832-UA*COS(PU)-
CC1*S4*UA*SIN(PU)+CC5*S3*HM*SIN(P))/(S4*VC)
2760 L=0
2770 ETA(1)=0
2780 S=L*WM/16
2790 FOR I=1 TO 11
2800 DU1(I)=-((1+1/FZ)*HM*ETA(I)^(1/FZ)*COS(6.2832*S/WM-P)/SO
2805     DU2(I)=WM*CC4*S1(I)*COS(6.2832*S/WM)/(6.2832*VC)+CC1*
S2(I)*SIN(6.2832*S/WM-PU)*UA/VC-HM*CC2*CC3*S1(I)*SIN(6.2832*
S/WM-P)/VC-CA*S2(I)*SIN(6.2832*S/WM)-
CB*S2(I)*COS(6.2832*S/WM)+CC2*CC4*S10(I)*SIN(6.2832*S/WM)/VC
2806 DU(I)=DU1(I)+DU2(I)
2807 NEXT I
2820 LPRINT "L=";L
2830 FOR I=1 TO 11
2840 LPRINT , ETA(I), DU(I)
2860 NEXT I
2870 L=L+4
2880 IF(L>7)GOTO 2910
2890 GOTO 2780
2910 LM=LM+1
2920 IF(LM<MM)GOTO 50
2930 END

```