PROGRAMACION CON COMPUTADORA IBM 1620
PARA EL AJUSTE DE TRIANGULACIONES
POR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS

Hilda Ystillarte Croes

U. S. M.

UNIVERSIDAD SANTA MARÍA

Para el Dr. Roca Vila,
con el mejor aprecio de
quien fuera alumna suya.
Hilda Ystillarte Croes

TESIS DE GRADO PRESENTADO POR LA
BACHILLER HILDA YSTILLARTE CROES
ANTE LA UNIVERSIDAD SANTA MARIA
PARA OPTAR EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL

Caracas, junio de mil novecientos sesenta y dos

PROGRAMACION CON COMPUTADORA IBM 1620
PARA EL AJUSTE DE TRIANGULACIONES
POR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS

RECONOCIMIENTO:

A mis profesores:

DR. ALFREDO LA FUENTE N.

DR. ENRIQUE CAMPDERA

A los Ingenieros del Centro Electrónico del MOP:

DR. CASTOR S. GOA

DR. M. LLEWELLYN THATCHER

De Cartografía Nacional:

DR. ADOLFO C. ROMERO

DR. CARLOS JOSE DEL CASTILLO

INDICE

PARTE PRIMERA

TEORÍA

INTRODUCCION.-

En una triangulación geodésica, cuando se calculan las coordenadas de los vértices de la red, a partir de unos datos medidos en el campo o bien tomados de una triangulación adyacente, ya calculada, se producen ciertas discrepancias en los resultados inevitables.

Dichas discrepancias son debidas a:

1. Errores de observación en el campo de las mediciones de las direcciones es que hace que la suma de los ángulos de un triángulo no sea exactamente 180°00'00".

2. Cuando se calcula la longitud de una base de la red, resolviendo triángulos por caminos diferentes, los resultados obtenidos son desiguales.

   Si la base fuese medida en el terreno o perteneciera a otra triangulación ya calculada, tampoco se obtendría el valor prefijado.

3. Al calcular las coordenadas de un vértice éstas no coinciden con las medidas en campo de dicho vértice, o al calcular el azimuth geodésico de una dirección éste no concuerda con el observado en el campo.

Estos errores son prácticamente imposible de eliminar y sin embargo es imprescindible obtener valores de ángulos, distancias y coordenadas fijos. Es pues necesario hacer un ajuste en que todos los valores estén relacionados entre sí y todas las discrepancias desaparezcan. Esta compensación debe ser el que dé los valores más probables ya que los verdaderos no pueden ser nunca conocidos.

El método de ajuste usado por la Cartografía Nacional es el descrito en la Publicación No. 138 del U. S. Coast and Geodetic Survey y se llama Método de los Mínimos Cuadrados. Este método involucra la formación y resolución de dos sistemas de ecuaciones llamadas correlativas y normales, lo cual supone una tabulación y una aplicación del método Gauss-Doolittle en los cuales las operaciones deben efectuarse con gran precisión a fin de que los resultados caigan dentro de los límites tolerables.

La utilización de las máquinas electrónicas en el campo de ingeniería puede extenderse también al cálculo y ajuste de redes de triangulación.

Se puede programar para que en una de estas máquinas se puedan efectuar estos cálculos con la ventaja de eliminar la parte laboriosa de dichos cálculos, obteniéndose los resultados en un tiempo mucho más breve y con la precisión requerida, con la absoluta seguridad de no existir errores de cálculo.

En esta tesis se va describir un programa en Fortran para la resolución del Ajuste de una Triangulación por el Método de Mínimos Cuadrados, el cual se ha realizado en la Computadora 1620 del MOP.

BREVE DESCRIPCION DEL SISTEMA PROCESADOR DE DATOS
IBM - 1620

El sistema 1620 ha sido diseñado específicamente para el cálculo de problemas científicos de Ingeniería. Consta de 2 (dos) unidades. La unidad lectora-perforadora y la cónsola o memoria de la máquina. La unidad lectora-perforadora puede ser de cinta o de tarjetas y sirve para la entrada y salida de los datos a la memoria de la máquina.

La cónsola consta de una memoria de 20.000 (veinte mil) posiciones donde puede almacenar igual número de dígitos de información, y acoplada a ella hay una máquina de escribir por la que también puede entrar y salir datos.

La computadora realiza 32 clases distintas de operaciones: aritméticas, como sumar, multiplicar, etc., de bifurcación, de transmisión de campo, de control y de entrada y salida de datos.

Al sistema se le denomina procesador de programa almacenado debido a que, mediante un programa adecuado, se introducen en la memoria las instrucciones necesarias para resolver un problema determinado antes de pasar al cálculo del mismo.

La computadora opera en modo numérico decimal y cada dígito ocupa una posición de memoria. Los caracteres alfabéticos y especiales vienen representados por dos dígitos, según un código especial alfanumérico.

Como cada circuito transistorizado de la memoria sólo tiene dos opciones: que pase o que no pase corriente por él, la computadora trabaja en sistema binario, transformando cada carácter alfanumérico en un conjunto de ceros y unos. En las tarjetas de entrada y salida de datos, la perforación cierra un circuito y equivale a un uno (1) y la no-perforación deja un circuito abierto y equivale a un cero (0). La posición de las perforaciones en cada columna de la tarjeta (o cinta) determina el número binario equivalente a cada carácter alfanumérico. Por esto, el sistema de operaciones recibe el nombre de binario decimal.

La velocidad de cálculo de la máquina es tan grande que se mide en millonésimas de segundo pero la velocidad efectiva de trabajo se ve afectada por la velocidad de entrada y de salida de datos.

SISTEMAS DE PROGRAMACION

Mucho más sencillo que programar en Sistema Absoluto o Numérico, sería hacerlo en S.P.S. (Symbolic Programming System) o en Fortran.

En S.P.S. cada código de operación no viene dado por dos dígitos, sino por un grupo de letras más fácil de memorizar.

La ventaja de programar en S.P.S. es la que uno no necesita programar la división, exponenciación, radicación y las funciones trigonométricas y logarítimicas. Se utilizan para el efecto unos programas ya elaborados que se llaman sub-rutinas.

Como la computadora no entiende directamente el lenguaje S.P.S., es necesario, ante todo, "traducir" el programa del S.P.S. al absoluto. Esto se hace mediante un procesador especial en dos pasadas por la máquina.

Sin embargo, para comunicarse directamente con la computadora sólo se puede utilizar el lenguaje absoluto.

PROGRAMACION EN FORTRAN

El Fortran tiene además otras ventajas.

Fortran es la abreviatura de "Formula Translator" y es un lenguaje más fácil de aprender por los ingenieros que el lenguaje Simbólico por su gran similitud a las fórmulas matemáticas.

El programador, se limita pués, a dar las instrucciones necesarias para resolver su problema en Fortran, es decir, en fórmulas.

Mediante un programa procesador especial, la propia 1620 traduce el programa en Fortran a lenguaje de máquina. El programa en lenguaje numérico de máquina recibe el nombre de "programa objeto" y es éste el que se "carga" en la memoria de la máquina para proceder al cálculo definitivo del problema.

En Fortran se le puede dar a la computadora instrucciones aritméticas por medio de signos de sumar, restar, multiplicar y dividir.

Instrucciones de control, como el STOP, END, el GO TO y el IF para bifurcar, y el DO para repetir.

Instrucciones de entrada y salida como READ, PRINT y PUNCH.

Instrucciones de especificación, como DIMENSION para reservar un espacio en la memoria y FORMAT para dar formato a la entrada y salida de datos.

Cada instrucción se perfora en una tarjeta con no más de 72 caracteres. La exponenciación, radicación, logarítmos y funciones trigonométricas de las variables se calculan por medio de sub-rutinas que se incorporan al programa original.

Las instrucciones en Fortran se refieren a constantes, variables y números.

Las constantes y variables pueden ser números enteros: positivos o negativos, llamados de punto fijo, o bien, números decimales: positivos o negativos, llamados de punto decimal flotante.

Una constante o una variable puede ser cualquier número hasta de 4 dígitos con su signo, de modo que el mayor número entero que se puede utilizar es $\pm$ 9999. Se utilizan generalmente como sub-índices o para numerar las instrucciones, por ejemplo.

Las constantes y variables en número decimal flotante se expresan en forma exponencial en 10 dígitos, 8 de los cuales son cifras significativas y los otros dos indican la posición del punto decimal en forma exponencial. Como el exponente puede ser $\pm$ 99, cualquier número comprendido entre 10^{-100} y 10^{+100} puede ser expresado con 8 cifras significativas.

La computadora trabaja siempre de esta forma, utilizando 8 cifras significativas en todos los cálculos de punto decimal flotante. De ahí la gran precisión de los resultados.

TEORIA DEL METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

En una red de triangulación se unen siempre dos estaciones por dos o más caminos a fin de obtener una comprobación y un control de los errores cometidos.

Al efectuar los cálculos de la triangulación se obtendrían resultados diferentes para los mismos valores si no se hiciera previamente un ajuste. Una vez eliminados los errores obvios y corregidos los errores sistemáticos, la única discrepancia en la determinación de las redundantes provienen de los errores accidentales durante las observaciones de campo. Como los errores accidentales obedecen únicamente a las leyes del azar, su corrección deberá hacerse según el cálculo de probabilidades.

La ecuación de la curva de probabilidad es según Kissam:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2} \qquad [1]$$

donde:

h= es una constante que indica la medida de la precisión

x= magnitud del error considerado

y= probabilidad de que suceda este error.

Como en nuestro caso tenemos una serie de errores $x_1, x_2, \ldots, x_n,$ en las direcciones, la probabilidad y_s de que suceda la serie, es el producto de sus probabilidades individuales, que viene dado por la fórmula:

$$y_s = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \cdot e^{-h^2 \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)} \qquad [2]$$

donde:

n = número de errores de la serie, es decir, número de direcciones a corregir.

El valor de esta función será menor, siendo h, π y n constantes cuando $\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)$ seá mínimo, es decir, la probabilidad de que haya error es menor cuando la suma de los cuadrados de los errores sea menor.

En nuestro caso, la triangulación estará ajustada de la mejor manera, cuando la suma de los cuadrados de los ajustes de las direcciones sea menor.

El método de determinación de estos valores es el método conocido por ajuste por mínimos cuadrados descrito a continuación brevemente.

FORMACION DE ECUACIONES DE CONDICION

El ajuste de los ángulos de una red se compone de 2 partes. Primero, el ajuste de las discrepancias que resultan en cada estación por separado, y segundo, el ajuste de la red en conjunto.

A esta última parte es al que se refiere nuestro trabajo y ello es lo que ha sido programado.

El ajuste de la red en conjunto se hace mediante las ecuaciones de condición, cuyas incógnitas son las correcciones a las direcciones medidas en segundos. Las direcciones son los ángulos observados en cada estación.

Se forma una ecuación de condición de ángulo para que en un triángulo no haya discrepancia entre 180° más el exceso esférico, y la suma de los 3 ángulos observados.

De los 4 triángulos que tiene un cuadrilátero sólo hay 3 ecuaciones de condición de ángulos independientes, pues, se cierran 3 triángulos; el 4to. obligatoriamente cerrará y la ecuación de condición formada por los ángulos de este cuarto triángulo sería combinación lineal de las otras 3.

El número de ecuaciones de condición de ángulo viene dada por:

$$N_a = \ell' - s' + 1 \qquad [3]$$

donde:

ℓ' = número de líneas visadas en las 2 direcciones

s' = número de estaciones ocupadas.

Se forma la ecuación de condición de lado para que no haya discrepancia en la medida de un arco calculado por diferente camino.

El número de ecuaciones de condición de lado viene dado por la fórmula:

$$N_\ell = \ell - 2S + 3 \qquad [4]$$

donde:

ℓ = número total de líneas

S = número total de estaciones.

La ecuación de condición de largo de la base resulta de la discrepancia que existe entre el largo de la base calculado a travez de los ángulos de la red con el mismo largo medido en el campo o dado en una triangulación adyacente.

Se forma una ecuación de condición de ángulo para eliminar la discrepancia que existe entre el azimuth geódesico de una dirección calculado a travez de la red, y el valor de ese mismo azimuth medido directamente en el campo o tomado de una triangulación adyacente.

Se forman las ecuaciones de condición de longitud y latitud para eliminar las discrepancias que existen entre la longitud y latitud calculadas y las medidas en el campo o perteneciente a otra triangulación.

Para establecer las ecuaciones de condición se hace necesario un cálculo preliminar de los triángulos.

FORMACION DE LAS ECUACIONES NORMALES

En general, el sistema de ecuaciones de condición es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas que son las correcciones a las direcciones.

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + \ldots + a_{1n} V_n - a_{1,n+1} = 0 \\
a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + \ldots + a_{2n} V_n - a_{2,n+1} = 0 \\
\vdots \\
a_{m1} V_1 + a_{m2} V_2 + \ldots + a_{mn} V_n - a_{m,n+1} = 0
\end{array}\right\} \text{Sistema Núm. 1}$$

Este sistema es indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Nosotros vamos a hallar los valores de las V's tales que:

$$\Sigma\, V_i^2 = \text{mínimo}.$$

es decir:

$$\begin{aligned}
y = {} & V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2 + \\
& + C_1 (a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + \ldots + a_{1n} V_n - a_{1,n+1}) + \\
& + C_2 (\ldots) + \ldots + \\
& + C_m (a_{m1} V_1 + a_{m2} V_2 + \ldots + a_{mn} V_n - a_{m,n+1}) = \\
= {} & \text{mínimo}.
\end{aligned}$$

donde:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots,\ C_m$$

son unos multiplicadores, los valores de los cuales pueden ser determinados.

Para que esta función sea mínima su derivada tiene que ser nula, es decir:

$$y' = 2V_1 + 2V_2 + \dots + 2V_n + C_1(a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) +$$
$$+ \dots + C_m(a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn}) = 0$$

lo cual puede escribirse así:

$$\begin{array}{l}
2V_1 + C_1 a_{11} + C_2 a_{21} + \dots + C_m a_{m,1} = 0 \\
2V_2 + C_1 a_{12} + C_2 a_{22} + \dots + C_m a_{m,2} = 0 \\
\vdots \\
2V_n + C_1 a_{1n} + C_2 a_{2n} + \dots + C_m a_{m,n} = 0
\end{array}$$

Se forma así un nuevo sistema en el cual se despejan los valores de las V's.

Dividiendo los coeficientes C's por 2 y cambiándoles de signo, se obtiene :

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = a_{11}C_1 + a_{21}C_2 + a_{31}C_3 + \dots + a_{m1}C_m \\ V_2 = a_{12}C_1 + a_{22}C_2 + a_{32}C_3 + \dots + a_{m2}C_m \\ \vdots \\ V_n = a_{1n}C_1 + a_{2n}C_2 + a_{3n}C_3 + \dots + a_{mn}C_m \end{array}\right\} \text{Sistema Núm. 2}$$

Sistema éste que recibe el nombre de Ecuaciones Correlativas..

La ley de formación de una ecuación correlativa es la siguiente:

$$V_j = \sum_{i=1}^{i=m} a_{i,j} C_i \qquad [5]$$

donde j toma sucesivamente los valores de 1 a n.

Es decir, para el cálculo de Vj se hace la suma de los productos de la columna j de la matriz del sistema número 1 por las C's correspondientes.

Los valores de las C's se obtienen de la resolución de un sistema de m ecuaciones con m incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l}
b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + b_{13}C_3 + \ldots + b_{1m}C_m = a_{1,n+1} \\
b_{21}C_1 + b_{22}C_2 + b_{23}C_3 + \ldots + b_{2m}C_m = a_{2,n+1} \\
\vdots \\
b_{m1}C_1 + b_{m2}C_2 + b_{m3}C_3 + \ldots + b_{mm}C_m = a_{m,n+1}
\end{array}\right\}$$ Sistema Núm. 3

en el cual los términos independientes son los términos independientes del sistema número 1 de ecuaciones de condición :

$$b_{i,m+1} = a_{i,n+1} \qquad [6]$$

Los coeficientes $b_{i,j}$ se forman de la manera siguiente:

$$b_{i,j} = \sum_{l=1}^{l=n} \left(a_{i,l} \times a_{j,l} \right) \qquad [7]$$

donde:

i toma valores sucesivos de 1 a m , y

j toma valores sucesivos de 1 a n

es decir, el cálculo de $b_{i,j}$ se hace efectuando la suma de los productos de los términos correspondientes de las columnas i y j en la matriz del sistema número 1.

Se observa que sale el mismo valor para $b_{i,j}$ que para $b_{j,i}$, es decir, que la matriz del sistema número 3 sale siempre simétrica respecto a su diagonal principal.

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES NORMALES

El sistema de ecuaciones normales se resuelve por el Método de Gauss-Doolittle.

Sea el sistema número 3:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
b_{11}C_1 & + & b_{12}C_2 & + & b_{13}C_3 & + & \cdots & + & b_{1m}C_m & = & a_{1,n+1} \\
b_{21}C_1 & + & b_{22}C_2 & + & b_{23}C_3 & + & \cdots & + & b_{2,m}C_m & = & a_{2,n+1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
b_{m1}C_1 & + & b_{m2}C_2 & + & b_{m3}C_3 & + & \cdots & + & b_{m,m}C_m & = & a_{m,n+1}
\end{array}$$

RESOLUCION DE ECUACIONES NORMALES POR GAUSS - DOOLITTLE

N	OPERACION	C_1	C_2	C_3	C_4	. . . .	C_m	1
1		b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	. . . .	$b_{1,m}$	$a_{1,n+1}$
I = 1		d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	. . . .	$d_{1,m}$	$d_{1,m+1}$
2			b_{22}	b_{23}	b_{24}	. . . .	$b_{2,m}$	$a_{2,n+1}$
	$-I \times \left(\frac{d_{12}}{d_{11}}\right)$		$-\left(\frac{d_{12}}{d_{11}}\right) d_{12}$	$-\left(\frac{d_{12}}{d_{11}}\right) d_{13}$	$-\left(\frac{d_{12}}{d_{11}}\right) d_{14}$	. . . .	$-\left(\frac{d_{12}}{d_{11}}\right) d_{1,m}$	$-\left(\frac{d_{12}}{d_{11}}\right) d_{1,m+1}$
II			d_{22}	d_{23}	d_{24}	. . . .	$d_{2,m}$	$d_{2,m+1}$
3				b_{33}	b_{34}	. . . .	$b_{3,m}$	$a_{3,n+1}$
	$-I \times \left(\frac{d_{13}}{d_{11}}\right)$			$-\left(\frac{d_{13}}{d_{11}}\right) d_{13}$	$-\left(\frac{d_{13}}{d_{11}}\right) d_{14}$	. . . .	$-\left(\frac{d_{13}}{d_{11}}\right) d_{1,m}$	$-\left(\frac{d_{13}}{d_{11}}\right) d_{1,m+1}$
	$-II \times \left(\frac{d_{23}}{d_{22}}\right)$			$-\left(\frac{d_{23}}{d_{22}}\right) d_{23}$	$-\left(\frac{d_{23}}{d_{22}}\right) d_{24}$	. . . .	$-\left(\frac{d_{23}}{d_{22}}\right) d_{2,m}$	$-\left(\frac{d_{23}}{d_{22}}\right) d_{2,m+1}$
III				d_{33}	d_{44}		$d_{3,m}$	$d_{3,m+1}$
4					b_{44}	. . . .	$b_{4,m}$	$a_{4,n+1}$
	$-I \times \left(\frac{d_{14}}{d_{11}}\right)$				$-\left(\frac{d_{14}}{d_{11}}\right) d_{14}$	. . . .	$-\left(\frac{d_{14}}{d_{11}}\right) d_{1,m}$	$-\left(\frac{d_{14}}{d_{11}}\right) d_{1,m+1}$
	$-II \times \left(\frac{d_{24}}{d_{22}}\right)$				$-\left(\frac{d_{24}}{d_{22}}\right) d_{24}$	. . . .	$-\left(\frac{d_{24}}{d_{22}}\right) d_{2,m}$	$-\left(\frac{d_{24}}{d_{22}}\right) d_{2,m+1}$
	$-III \times \left(\frac{d_{34}}{d_{33}}\right)$				$-\left(\frac{d_{34}}{d_{33}}\right) d_{34}$	. . . .	$-\left(\frac{d_{34}}{d_{33}}\right) d_{3,m}$	$-\left(\frac{d_{34}}{d_{33}}\right) d_{3,m+1}$
IV					d_{44}		$d_{4,m}$	$d_{4,m+1}$
	⋮ ⋮					⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮
							$b_{m,m}$	$a_{m,n+1}$
	$-I \times \left(\frac{d_{1,m}}{d_{11}}\right)$						$-\left(\frac{d_{1,m}}{d_{11}}\right) d_{1,m}$	$-\left(\frac{d_{1,m}}{d_{11}}\right) d_{1,m+1}$
	$-II \times \left(\frac{d_{2,m}}{d_{22}}\right)$						$-\left(\frac{d_{2,m}}{d_{22}}\right) d_{2,m}$	$-\left(\frac{d_{2,m}}{d_{22}}\right) d_{2,m+1}$
	$-III \times \left(\frac{d_{3,m}}{d_{33}}\right)$						$-\left(\frac{d_{3,m}}{d_{33}}\right) d_{3,m}$	$-\left(\frac{d_{3,m}}{d_{33}}\right) d_{3,m+1}$
	$-IV \times \left(\frac{d_{4,m}}{d_{44}}\right)$						$-\left(\frac{d_{4,m}}{d_{44}}\right) d_{4,m}$	$-\left(\frac{d_{4,m}}{d_{44}}\right) d_{4,m+1}$
	⋮ ⋮						⋮	⋮
	$-(M-1)\left(\frac{d_{m-1,m}}{d_{m-1,m-1}}\right)$						$-\left(\frac{d_{m-1,m}}{d_{m-1,m-1}}\right) d_{m-1,m}$	$-\left(\frac{d_{m-1,m}}{d_{m-1,m-1}}\right) d_{m-1,m+1}$
M							$d_{m,m}$	$d_{m,m+1}$

SOLUCION REGRESIVA O INVERSA

$$C_m = \frac{d_{m,m+1}}{d_{m,m}}$$

$$C_4 = \frac{d_{4,m+1} - d_{4,m} \times C_m - d_{4,m-1} \times C_{m-1} - \ldots\ldots - d_{4,5} \times C_5}{d_{4,4}}$$

$$C_3 = \frac{d_{3,m+1} - d_{3,m} \times C_m - d_{3,m-1} \times C_{m-1} - \ldots\ldots - d_{3,4} \times C_4}{d_{33}}$$

$$C_2 = \frac{d_{2,m+1} - d_{2,m} \times C_m - \ldots\ldots - d_{2,4} \times C_4 - d_{2,3} \times C_3}{d_{2,2}}$$

$$C_1 = \frac{d_{1,m+1} - d_{1,m} \times C_m - \ldots\ldots - d_{1,4} \times C_4 - d_{1,3} \times C_3 - d_{1,2} \times C_2}{d_{1,1}}$$

Como vemos, el método consta de dos fases. En la primera, se calculan los coeficientes auxiliares $d_{i,j}$ y en la última o solución regresiva se calculan los valores de los multiplicadores C_i.

Los coeficientes $d_{i,j}$ se forman de la siguiente manera:
Para $d_{1,j}$ se toman los mismos valores que los coeficientes de las ecua-

ciones normales $b_{1,j}$, y para el término independiente $d_{1,m+1}$, se toma el valor del término independiente de la primera ecuación de condición $a_{1,n+1}$.

Los demás términos $d_{i,j}$ se forman así:

$$d_{i,j} = b_{i,j} - \sum_{\ell=1}^{\ell=i-1} \left(\frac{d_{\ell,i}}{d_{\ell,\ell}} \right) d_{\ell,j} \qquad [8]$$

sea, haciendo variar la i desde 2 hasta m.

$$i \Big|_{2}^{m}$$

La jota, varía desde i hasta m+1.

$$j \Big|_{i}^{m+1}$$

Siendo el término $d_{i,\ m+1}$ el correspondiente a los términos independientes de las ecuaciones de condición.

La solución regresiva se efectúa así:

El último multiplicador C_m se calcula primero, según la fórmula:

$$C_m = \frac{d_{m,m+1}}{d_{m,m}} \qquad [9]$$

Los demás vienen dados:

$$C_i = \frac{d_{i,m+1} - \sum_{k=i+1}^{k=m} d_{i,k} \cdot C_k}{d_{i,i}} \qquad [10]$$

donde i toma sucesivamente los valores desde m-1 hasta 1.

$$i \Big|_{m-1}^{1}$$

-o-

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES CORRELATIVAS

Una vez hallado los multiplicadores C_i de las correlativas que son las incógnitas de las ecuaciones normales, para hallar las correcciones V_i de las direcciones, se reemplazan los valores hallados en el sistema 2 de ecuaciones correlativas.

El valor de V_j viene dado por la ecuación 11.

$$V_j = \sum_{i=1}^{i=m} a_{i,j} \, C_i \qquad [11]$$

CALCULO DEL ERROR PROBABLE

El error probable se define como el error de tal magnitud que la mitad de los errores sean menores y la otra mitad mayores. Es decir, es aquel cuya probabilidad sea 1/2.

Según Pierce, el error probable que corresponde a una probabilidad de 1/2:

$$E_P = 0,6745 \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{m}} \qquad [12]$$

donde ΣVi^2 = suma de los cuadrados de los ajustes
m = número de ecuaciones de condición.

En el caso de triangulaciones de primer orden los valores de las V's se redondean en dos lugares decimales. Se toma la segunda cifra decimal (centésimas de segundo) de tal manera, que dicho valor redondeado convenga al cierre de los triángulos. De esta manera obtenemos los valores de las correcciones adoptadas.

PROGRAMACION PARA EL AJUSTE DE TRIANGULACIONES

El problema tiene tres partes definidas:

1a. Formación, a partir de las Ecuaciones de Condición (sistema núm.1) del sistema de Ecuaciones Normales (sistema núm. 3).

2a. Resolución de las Ecuaciones Normales y obtención de los multiplicadores correlativos (C_i).

3a. Resolución de las Ecuaciones Correlativas, y la obtención de los ajustes (V_i) de las direcciones.

Si se hubiese elaborado un único programa para resolver el problema con una sola pasada en la computadora, el número de redundantes se hubiese visto más limitado que haciendo tres programas para tres pasadas sucesivas en la máquina. La capacidad de memoria de ésta es limitada a 20.000 posiciones y el programa ocupa ya de por sí, una parte considerable de élla.

Por este motivo se hicieron tres programas, uno para cada una de las partes del cálculo.

La memoria se borra luego de cada una de las pasadas.

Los datos de entrada para el programa Núm. 1 - INPUT - es la matriz del sistema Núm. 1 $(a_{i,j})$. Los de salida - OUTPUT - es la matriz de las ecuaciones normales $(b_{i,j})$.

Los datos de entrada del Programa Núm. 2 son la matriz de las ecuaciones normales que salió del Programa Núm. 1, más el vector formado con los términos independientes de las ecuaciones de condición $(a_{i,\ m+1})$. Los datos de salida son los multiplicadores de las correlativas (C).

La entrada para el Programa Núm. 3 está formada por la matriz del sistema Núm. 1 $(a_{i,j})$ y los multiplicadores C_i obtenidos como salida del Programa Núm. 2.

La salida de este tercer programa son las correcciones V_j a las direcciones y el error probable cometido en el ajuste.

PROGRAMA NUMERO 1

FORMACION DE LAS ECUACIONES NORMALES

DIAGRAMA DE FLUJO

FORMACION DE ECUACIONES NORMALES

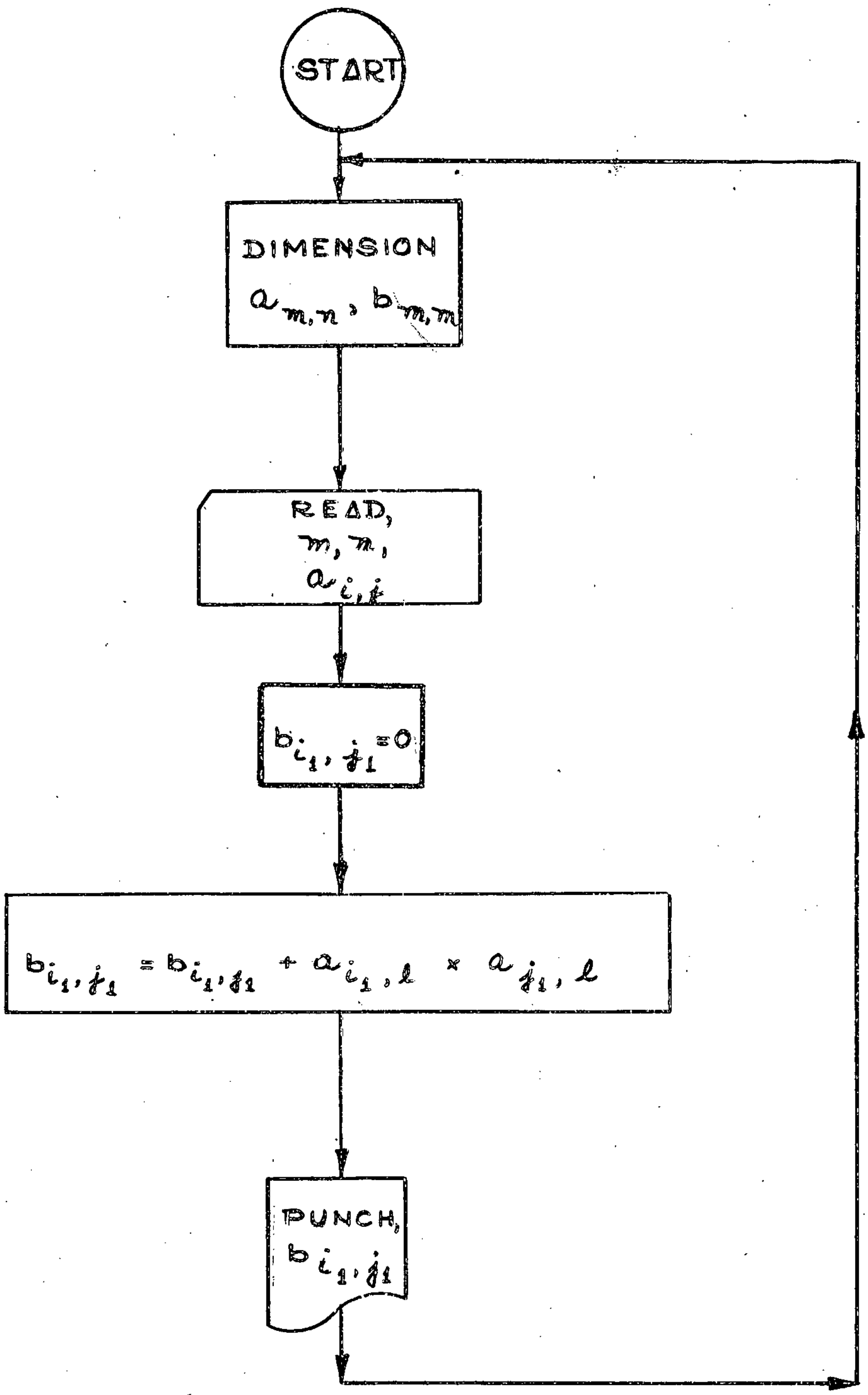
Bloque Núm. 1

Bloque Núm. 2

Bloque Núm. 3

Bloque Núm. 4

Bloque Núm. 5



DESCRIPCION DE LOS BLOQUES DEL DIAGRAMA DE FLUJO

Bloque Núm. 1 - Sirve para reservar un espacio en la memoria para almacenar en él la matriz del sistema Núm. 1 de entrada y la matriz del sistema Núm. 3 de salida.

Bloque Núm. 2 - Hace que la computadora lea el número de ecuaciones de condición - m - el número de correcciones a las direcciones - n - y la matriz $a_{i,j}$ del sistema de ecuaciones de condición, lo cual almacena en el espacio de memoria reservado al efecto.

Bloque Núm. 3 - Da al término b_{i_1,j_1} el valor cero como medio de iniciar una sumatoria.

Bloque Núm. 4 - Calcula los términos b_{i_1,j_1} de la matriz del sistema Núm. 3.

Bloque Núm. 5 - Ordena perforar los resultados calculados según el bloque anterior almacenados en el lugar de la memoria reservado anteriormente para ello.

Después del bloque Núm. 5 se pasa al bloque Núm. 1 para formar nuevamente las ecuaciones normales de otro sistema perteneciente a otra triangulación.

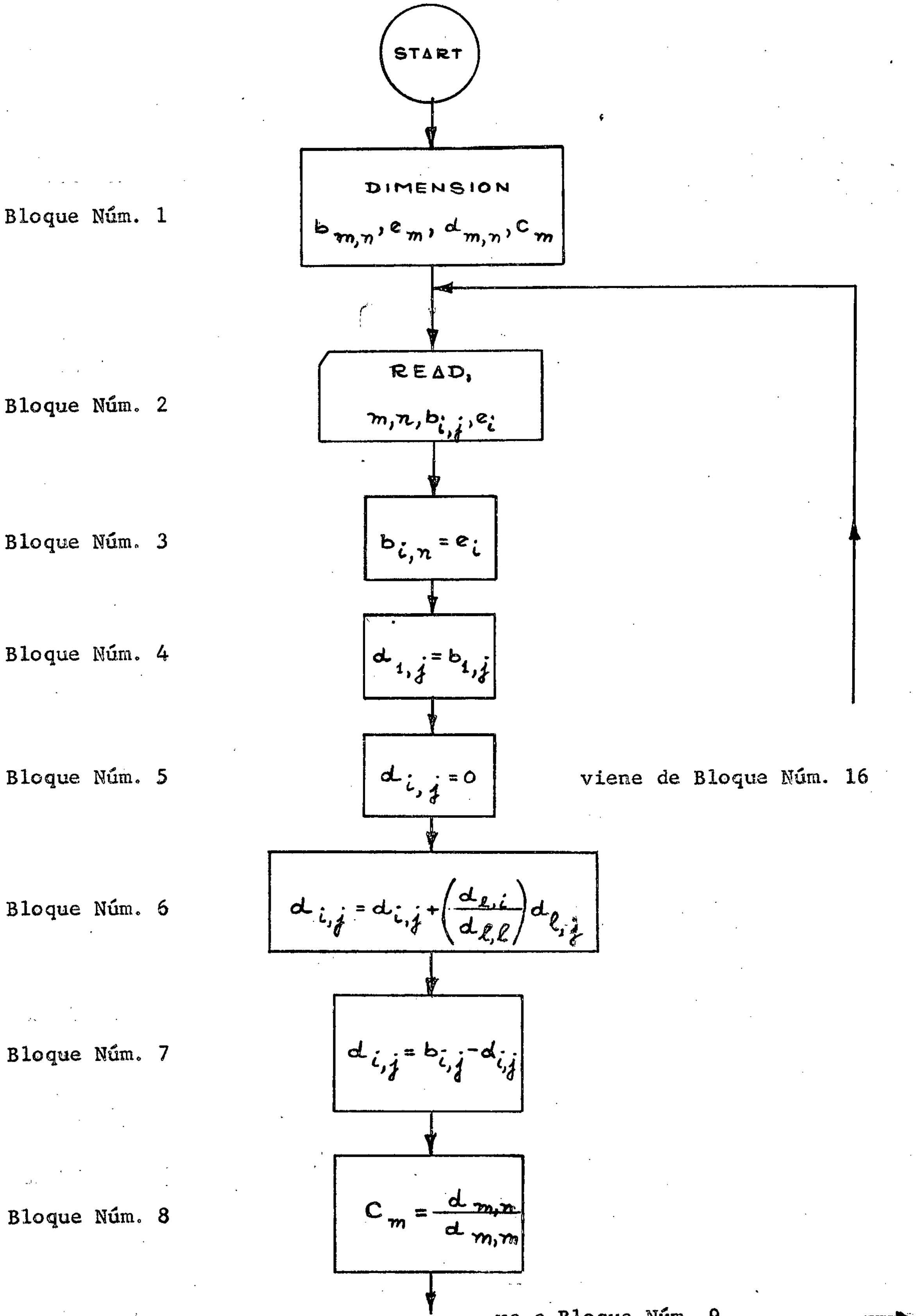
```
C     FORMACION DE LAS ECUACIONES NORMALES
C     POR HILDA YSTILLARTE CROES  **ENERO 1962**
      DIMENSION A(15,36),B(15,15)
    4 READ,M,N
      DO1 I=1,M
      DO1 J=1,N
 1    READ,A(I,J)
      DO2 I1=1,M
      DO2 J1=I1,M
      B(I1,J1)=0.
      DO2 L=1,N
    2 B(I1,J1)=B(I1,J1)+A(I1,L)*A(J1,L)
      DO5 I1=1,M
      DO5 J1=I1,M
    5 PUNCH,B(I1,J1)
      GOTO 4
      END
```

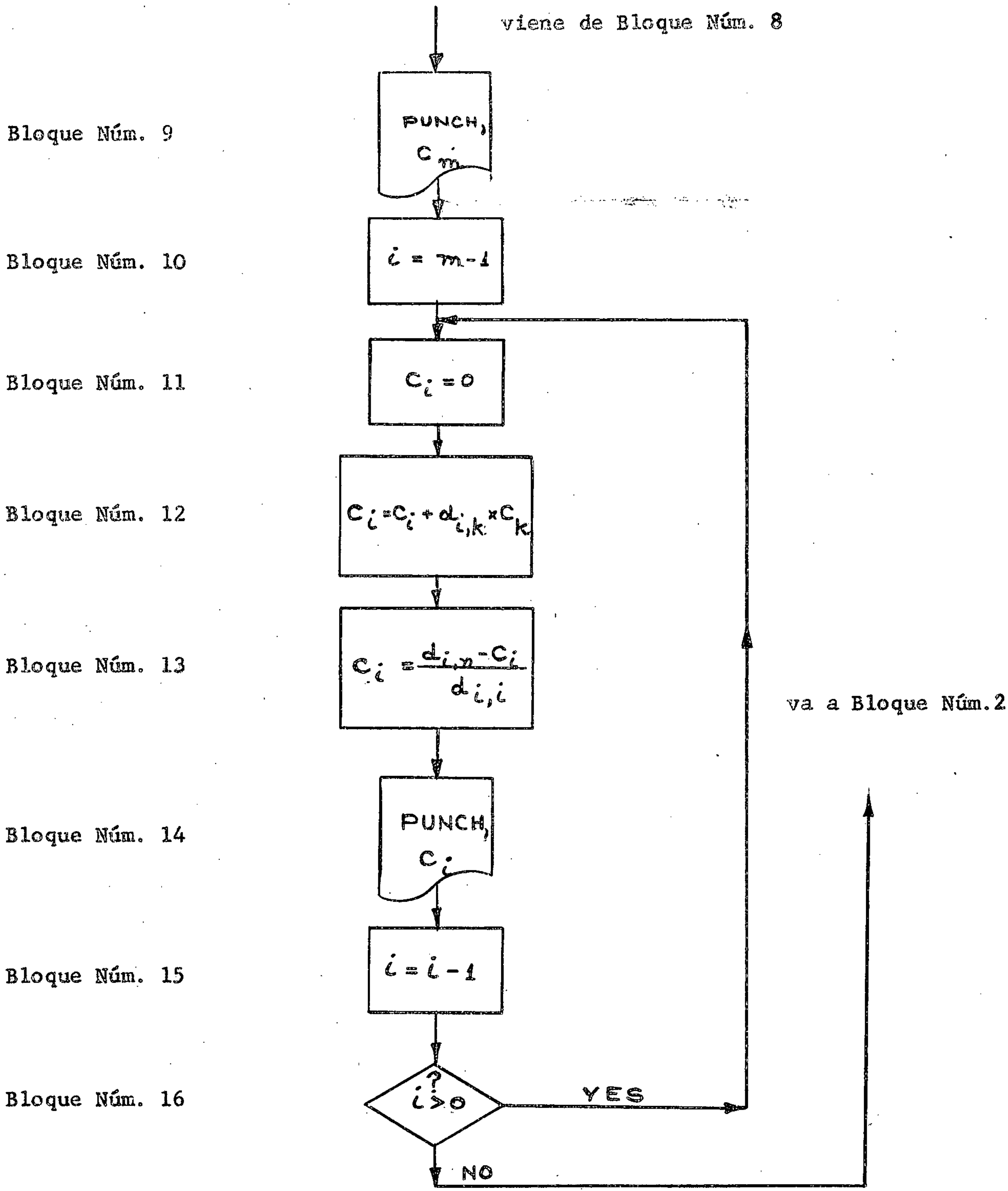
PROGRAMA NUMERO 2

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES NORMALES

DIAGRAMA DE FLUJO

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES NORMALES




viene de Bloque Núm. 8
Bloque Núm. 9
PUNCH, C_m
Bloque Núm. 10
$i = m-1$
Bloque Núm. 11
$C_i = 0$
Bloque Núm. 12
$C_i = C_i + d_{i,k} \times C_k$
Bloque Núm. 13
$C_i = \frac{d_{i,n} - C_i}{d_{i,i}}$
va a Bloque Núm. 2
Bloque Núm. 14
PUNCH, C_i
Bloque Núm. 15
$i = i-1$
Bloque Núm. 16
¿$i>0$?
YES
NO

DESCRIPCION DE LOS BLOQUES DEL DIAGRAMA DE FLUJO

Bloque Núm. 1 - Sirve para reservar un espacio en la memoria donde almacena la matriz $b_{i,j}$ del sistema Núm. 3 de entrada. Los términos independientes $a_{i,n+1}$ de las ecuaciones de condición, las coeficientes auxiliares $d_{i,j}$, para la resolución de las ecuaciones normales y las incógnitas C_i de dicho sistema.

Bloque Núm. 2 - Hace que la Computadora lea el número de filas m y el número de columnas n de la matriz del sistema más los términos independientes y el valor de los términos $b_{i,j}$ y e_i de dicha matriz.

Bloque Núm. 3 - Almacena el valor de los términos independientes e_i en el lugar $b_{i,n}$ reservado al efecto.

Bloque Núm. 4 - Hace que los coeficientes $d_{i,j}$ de la primera fila tomen los valores $b_{1,j}$.

Bloque Núm. 5 - Da a los términos subsiguientes $d_{i,j}$, el valor cero como medio de iniciar una sumatoria.

Bloques Núms. 6 y 7 - Calculan el valor de los coeficientes auxiliares $d_{i,j}$ por el método de Gauss-Doolittle.

Bloque Núm. 8 - Calcula el valor Cm del último multiplicador correlativo.

Bloque Núm. 9 - Ordena perforar dicho valor.

Bloque Núm.10 - Hace que el sub-índice i del multiplicador correlativo tome el penúltimo valor m-1.

Bloque Núm.11 - Da al multiplicador C_i el valor cero como medio de iniciar una sumatoria.

Bloques Núms. 12 y 13 - Calculan los valores de los multiplicadores C_i.

Bloque Núm.14 - Ordena perforar los resultados obtenidos según los bloques anteriores y almacenados en la memoria en el lugar reservado al efecto anteriormente

Bloque Núm.15 - Disminuye en una unidad el valor i del sub-índice de los multiplicadores para calcular el siguiente.

Bloque Núm.16 - Averigua si el valor del sub-índice i es positivo, cero o negativo. En el primero de los casos ordena bifurcar al bloque Núm. 11 para calcular el valor del multiplicador siguiente. En el caso de que el valor del sub-índice sea cero o negativo, bifurca al principio del programa para resolver nuevamente otro sistema de ecuaciones normales perteneciente a otra triangulación.

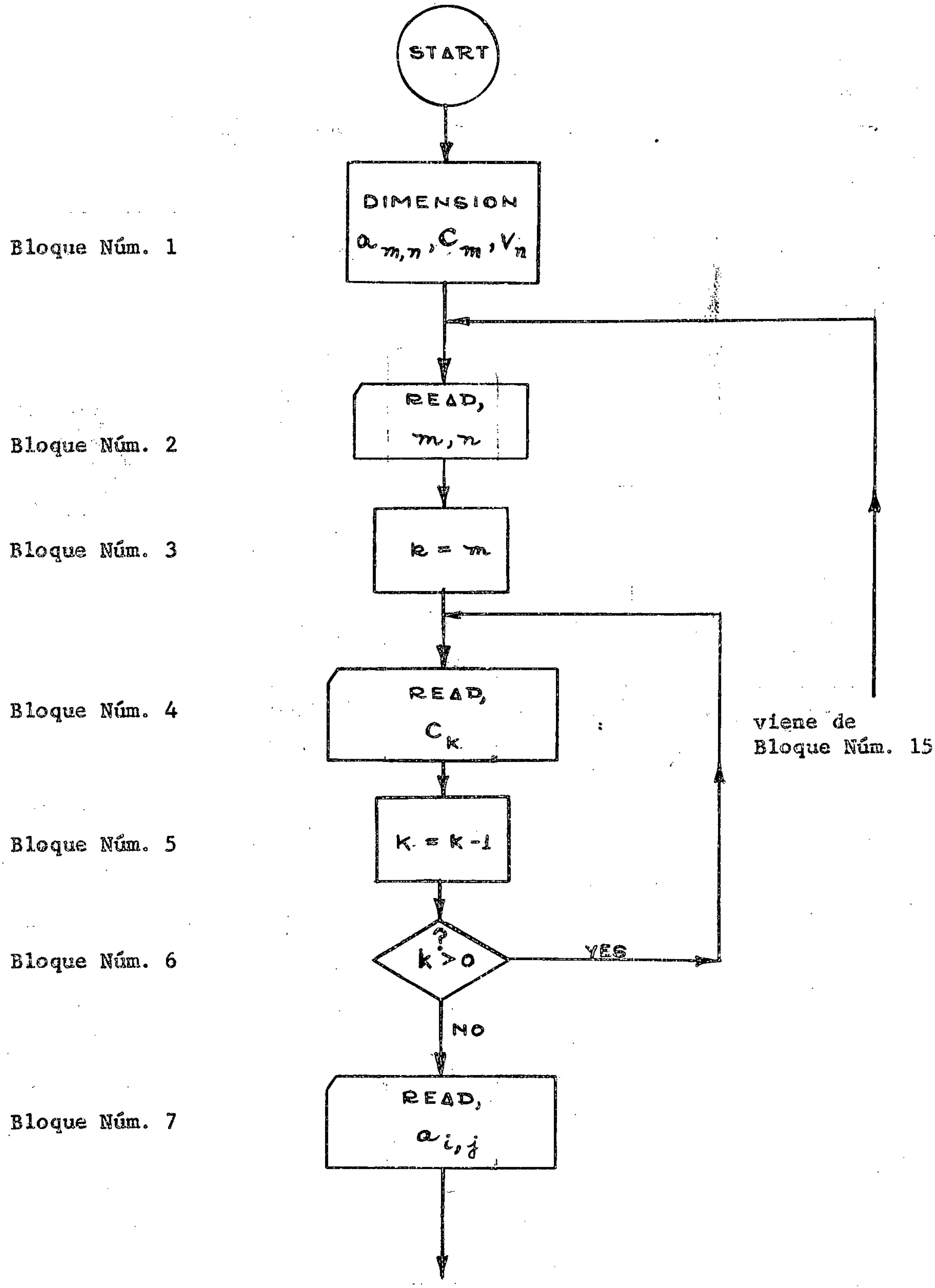
```
C     RESOLUCION ECUACIONES NORMALES
C     POR HILDA YSTILLARTE CROES  **FEBRERO 1962**
      DIMENSION B(20,21),E(20),D(20,21),C(20)
    9 READ,M,N
      DO1 I=1,M
      DO 1 J=I,M
    1 READ,B(I,J)
      DO 8 I=1,M
      READ,E(I)
    8 B(I,N)=E(I)
      DO 2 J=1,N
    2 D(1,J)=B(1,J)
      DO3 I=2,M
      DO3 J=I,N
      D(I,J)=0.
      I1=I-1
      DO 6 L=1,I1
    6 D(I,J)=D(I,J)+D(L,J)*D(L,I)/D(L,L)
    3 D(I,J)=B(I,J)-D(I,J)
      C(M)=D(M,N)/D(M,M)
      PUNCH,C(M)
      I=M-1
    5 I2=I+1
      C(I)=0.
      DO4 K=I2,M
    4 C(I)=C(I)+D(I,K)*C(K)
      C(I)=(D(I,N)-C(I))/D(I,I)
      PUNCH,C(I)
      I=I-1
      IF(I)7,7,5
    7 GOTO 9
      END
```

PROGRAMA NUMERO 3

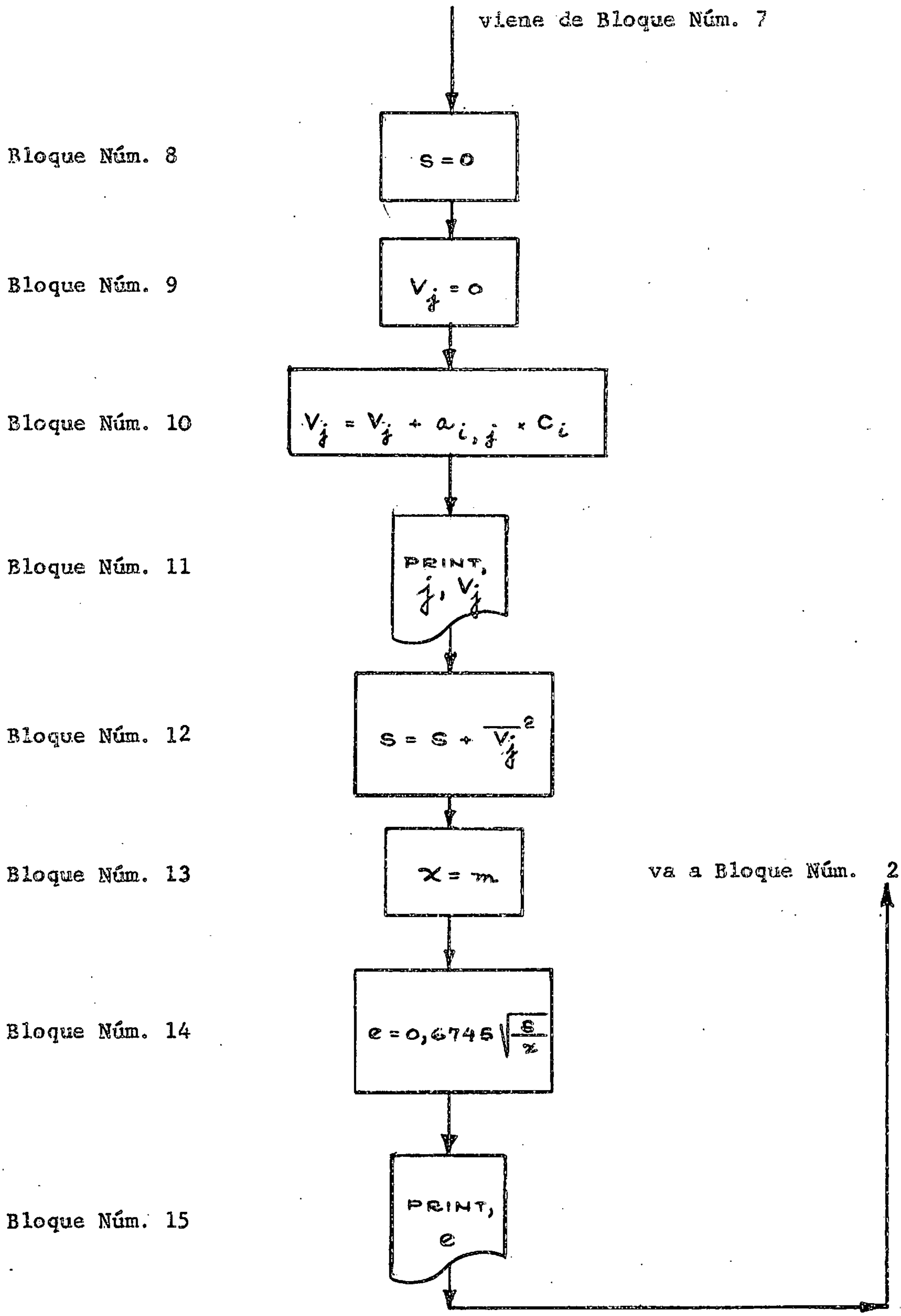
RESOLUCION DE LAS ECUACIONES CORRELATIVAS

DIAGRAMA DE FLUJO

RESOLUCION DE LA ECUACIONES CORRELATIVAS



va al Bloque Núm. 8


viene de Bloque Núm. 7
Bloque Núm. 8
$S = 0$
Bloque Núm. 9
$V_j = 0$
Bloque Núm. 10
$V_j = V_j + a_{i,j} \times C_i$
Bloque Núm. 11
PRINT, j, V_j
Bloque Núm. 12
$S = S + \overline{V_j}^2$
Bloque Núm. 13
$x = m$
va a Bloque Núm. 2
Bloque Núm. 14
$e = 0,6745 \sqrt{\frac{S}{x}}$
Bloque Núm. 15
PRINT, e

DESCRIPCION DE LOS BLOQUES DEL DIAGRAMA DE FLUJO

Bloque Núm. 1 - Reserva un espacio en la memoria para almacenar la matriz $a_{i,j}$ del sistema Núm. 1 de entrada, para los multiplicadores C_i de las ecuaciones correlativas y para las correcciones V_j a las direcciones.

Bloque Núm. 2 - Hace que la computadora lea el número m de multiplicadores y el número n de los ajustes.

Bloque Núm. 3 - Hace que el sub-índice k del multiplicado C_k tome el último valor m, para que empiece a leer los C_k desde el último.

Bloque Núm. 4 - Ordena a la computadora leer el valor del multiplicador C_k.

Bloque Núm. 5 - Disminuye el valor del sub-índice k del multiplicador en una unidad.

Bloque Núm. 6 - Averigua si el valor de k es positivo, igual a cero o negativo.

En el primero de los casos hace bifurcar al bloque Núm. 4 para seguir leyendo los C_k.

En el caso de que el valor del sub-índice no sea positivo, hace seguir el programa por el bloque Núm. 7.

Bloque Núm. 7 - Ordena a la computadora leer la matriz de los $a_{i,j}$ del sistema Núm 1.

Bloques Núms. 8 y 9 - Dan a S y a V_j el valor cero como medio de iniciar una sumatoria.

Bloque Núm.10 - Calcula los valores de las correcciones V_j a las direcciones.

Bloque Núm.11 - Ordena imprimir con la máquina de escribir los valores de los sub-índices j y de las correcciones V_j.

Bloque Núm.12 - Calcula los valores de las sumas S de los cuadrados de los ajustes V_j.

Bloque Núm.13 - Sirve para convertir el valor de la constante m que era de punto fijo en punto flotante para poder calcular el error probable según el bloque siguiente.

Bloque Núm.14 - Calcula el error probable y cometido en el ajuste por mínimos cuadrados.

Bloque Núm.15 - Ordena a la máquina de escribir que imprima el valor del error probable calculado según el bloque anterior.

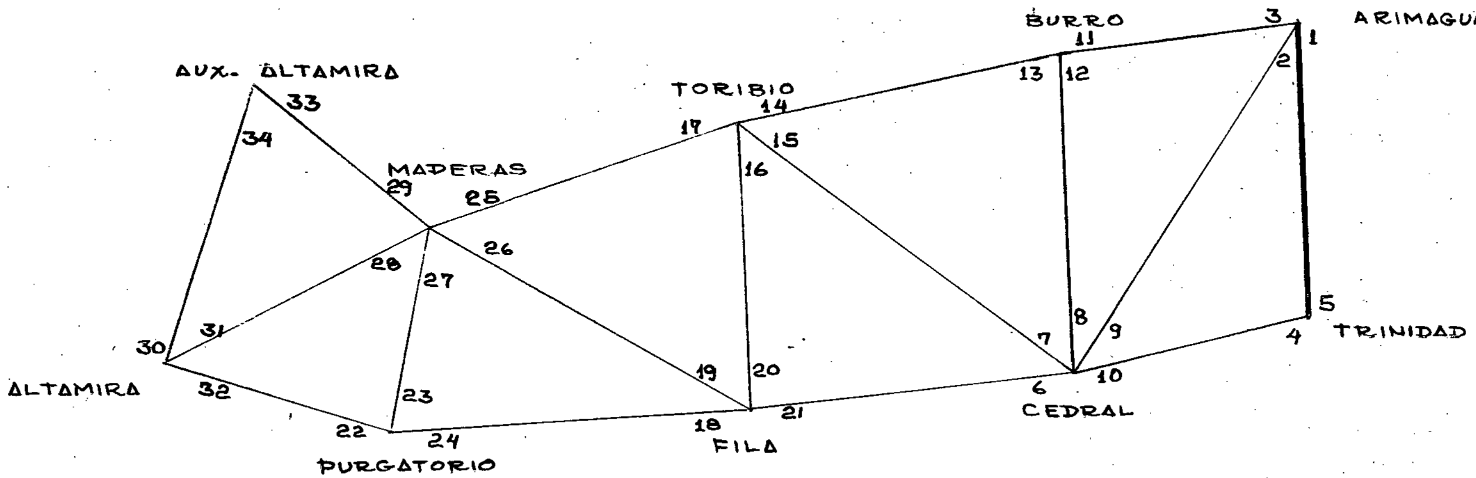
Después del bloque Núm. 15 el programa bifurca al bloque Núm. 2 para resolver las ecuaciones correlativas de otra triangulación.

```
08000 C      RESOLUCION ECUACIONES CORRELATIVAS

08000 C      POR HILDA YSTILLARTE CROES  **ABRIL 1962**

08000        DIMENSION A(15,36),C(15),V(36)
08000        PRINT 12
08024      6 READ 14,L,M,N
08072        PRINT 9,L
08096        K=M
08120      4 READ 7,C(K)
08168        K=K-1
08204        IF(K)5,5,4
08260      5 DO 1 I=1,M
08272        DO1 J=1,N
08284      1 READ 7,A(I,J)
08440        S=0.
08464        DO2 J=1,N
08476        V(J)=0.
08524        DO3 I=1,M
08536      3 V(J)=V(J)+A(I,J)*C(I)
08752        PRINT 10,J,V(J)
08812      2 S=S+V(J)**2
08920        XM=M
08956        E=.6745*SQRT(S/XM)
09016        PRINT 11,E
09040        GO TO 6
09048     12 FORMAT(41HAJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS POR H. Y. C.)
09154      9 FORMAT(18HTRIANGULACION NUM.I3)
09220      7 FORMAT(F15.8)
09242     10 FORMAT(11H          VI3,6X,F8.5)
09318     11 FORMAT(15HERROR PROBABLE=F8.5,/)
09382     14 FORMAT(I3,I3,I3)
09414        END
PROCESSING COMPLETE
```

PARTE SEGUNDA

EJEMPLO

RED GEODESICA



Para comprobar el funcionamiento de los programas descritos anteriormente, se usó el ejemplo resuelto en el texto:

EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS EN LOS TRABAJOS DE TRIANGULACION GEODESICA
por: DR. CARLOS JOSE DEL CASTILLO

en las páginas 33 a 61.

Dicho ejemplo viene resuelto detalladamente y tiene un número de ecuaciones de condición y de ajustes bastante grande, lo cual es adecuado para nuestro propósito.

El número total de ecuaciones de condición es de doce con 34 incógnitas, que son las siguientes:

OCHO ECUACIONES DE CONDICION DE ANGULO:

$$-V_1 + V_2 - V_4 + V_5 - V_9 + V_{10} - 0.61 = 0 \qquad (1)$$

$$-V_2 + V_3 - V_8 + V_9 - V_{11} + V_{12} + 2.72 = 0 \qquad (2)$$

$$-V_7 + V_8 - V_{12} + V_{13} - V_{14} + V_{15} + 0.85 = 0 \qquad (3)$$

$$-V_6 + V_7 - V_{15} + V_{16} - V_{20} + V_{21} - 4.00 = 0 \qquad (4)$$

$$-V_{16} + V_{17} - V_{19} + V_{20} - V_{25} + V_{26} - 6.01 = 0 \qquad (5)$$

$$-V_{18} + V_{19} - V_{23} + V_{24} - V_{26} + V_{27} + 2.00 = 0 \qquad (6)$$

$$-V_{22} + V_{23} - V_{27} + V_{28} - V_{31} + V_{32} - 3.77 = 0 \qquad (7)$$

$$-V_{28} + V_{29} - V_{30} + V_{31} - V_{33} + V_{34} - 1.97 = 0 \qquad (8)$$

UNA ECUACION DE CONDICION DE AZIMUTH

$$-V_1 + V_3 - V_{11} + V_{13} - V_{14} + V_{17} - V_{25} + V_{29} - V_{33} + V_{34} - 3.42 = 0$$

UNA ECUACION DE CONDICION DE DISTANCIA

$$\begin{aligned}
-.51V_2 &+ .51V_3 - .16V_4 + .16V_5 - .80V_6 + .80V_7 + \\
&+ .62V_9 - .62V_{10} - .04V_{11} - .23V_{12} + .27V_{13} + \\
&+ .43V_{14} - .43V_{15} - .28V_{16} + .28V_{17} - .57V_{18} + \\
&+ .57V_{19} + .03V_{20} - .03V_{21} - .19V_{22} + .47V_{23} - \\
&- .28V_{24} + .66V_{25} - .66V_{26} - .23V_{28} + .23V_{29} + \\
&+ .54V_{31} - .54V_{32} + .52V_{33} - .52V_{34} - 4.0867 = 0
\end{aligned}$$

UNA ECUACION DE CONDICION DE LATITUD

$$\begin{aligned}
-.94V_2 &+ .94V_3 + 1.75V_4 - 1.75V_5 + 1.52V_6 - 1.52V_7 + \\
&+ .55V_9 - .55V_{10} - 1.23V_{11} - .15V_{12} + 1.09V_{13} - \\
&- 1.53V_{14} + 1.53V_{15} - .68V_{16} + .68V_{17} + .65V_{18} - \\
&- .65V_{19} + .68V_{20} - .68V_{21} + .42V_{22} - .28V_{23} - \\
&- .14V_{24} - 1.10V_{25} + 1.10V_{26} - .02V_{31} + .02V_{32} - 2.5334 = 0
\end{aligned}$$

UNA ECUACION DE CONDICION DE LONGITUD

$$\begin{aligned}
-.27V_2 &+ .27V_3 + .15V_4 - .15V_5 - .02V_6 + .02V_7 + \\
&+ .48V_9 - .48V_{10} - .10V_{11} - .08V_{12} + .19V_{13} + \\
&+ .07V_{14} - .07V_{15} - .13V_{16} + .13V_{17} + .03V_{18} - \\
&- .03V_{19} + .15V_{20} - .15V_{21} + .07V_{22} + .04V_{23} - \\
&- .11V_{24} + .09V_{25} - .09V_{26} + .13V_{31} - .13V_{32} - .9410 = 0
\end{aligned}$$

CON LAS ANTERIORES ECUACIONES DE CONDICION SE FORMA LA SIGUIENTE TABLA:

	1	2	3	4	5	6	7	8	Azim.	Dist.	Lat.	Long.	Σ	V'	Adoptado	$(V')^2$
1	-1								-1				-2.00	-2.7648	-2.77	7.6441
2	+1	-1								-.51	- .94	-.27	-1.72	+1.4989	+1.50	2.2467
3		+1							+1	+.51	+ .94	+.27	+3.72	+1.2659	+1.27	1.6025
4	-1									-.16	+1.75	+.15	+ .74	+1.6962	+1.70	2.8771
5	+1									+.16	-1.75	-.15	- .74	-1.6962	-1.70	2.8771
6				-1						-.80	+1.52	-.02	- .30	- .5466	- .55	.2988
7			-1	+1						+.80	-1.52	+.02	- .70	+1.7356	+1.74	3.0123
8		-1	+1										0	+ .6225	+ .62	.3875
9	-1	+1								+.62	+ .55	+.48	+1.65	- .7751	- .78	.6008
10	+1									-.62	- .55	-.48	- .65	-1.0363	-1.04	1.0739
11		-1							-1	-.04	-1.23	-.10	-3.37	- .0546	- .05	.0029
12		+1	-1							-.23	+ .15	-.08	- .16	-1.1441	-1.14	1.3090
13			+1						+1	+.27	+1.09	+.19	+3.55	+1.3533	+1.36	1.8314
14			-1						-1	+.43	-1.53	+.07	-3.03	+ .4897	+ .49	.2398
15			+1	-1						-.43	+1.53	-.07	+1.03	-1.7450	-1.74	3.0450
16				+1	-1					-.28	- .68	-.13	-1.09	- .7205	- .72	.5191
17					+1				+1	+.28	+ .68	+.13	+3.09	+1.9758	+1.98	3.9038
18						-1				-.57	+ .65	+.03	- .89	- .9110	- .91	.8299
19					-1	+1				+.57	- .65	-.03	- .11	- .9931	- .99	.9862
20				-1	+1					+.03	+ .68	+.15	+ .86	+ .6053	+ .61	.3664
21				+1						-.03	- .68	-.15	+ .14	+1.2988	+1.30	1.6869
22							-1			-.19	+ .42	+.07	- .70	-1.8335	-1.83	3.3617
23						-1	+1			+.47	- .28	+.04	+ .23	+ .6745	+ .68	.4549
24						+1				-.28	- .14	-.11	+ .47	+1.1590	+1.16	1.3433
25					-1				-1	+.66	-1.10	+.09	-2.35	- .1621	- .16	.0263
26					+1	-1				-.66	+1.10	-.09	+ .35	+1.6534	+1.55	2.4130
27						+1	-1						0	- .8493	- .85	.7213
28							+1	-1		-.23			- .23	+ .0096	+1.01	.0001
29								+1	+1	+.23			+2.23	- .5516	- .55	.3043
30								-1					-1.00	-3.8990	-3.90	15.2022
31							-1	+1		+.54	- .02	+.13	+ .65	+1.7478	+1.75	3.0548
32							+1			-.54	+ .02	-.13	+ .35	+2.1511	+2.15	4.6272
33								-1	-1	+.52			-1.48	+1.5576	+1.56	2.4261
34								+1	+1	-.52			+1.48	-1.5576	-1.56	2.4261

TABLA DE ECUACIONES CORRELATIVAS

ECUACIONES NORMALES (ORIGINADAS DE LA TABLA ANTERIOR)

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	1
+6.0000	-2.0000	0	0	0	0	0	0	+1.0000	-1.4300	-5.5400	-1.5300	+0.6100
	+6.0000	-2.0000	0	0	0	0	0	+2.0000	+1.4500	+3.8100	+1.0400	-2.7200
		+6.0000	-2.0000	0	0	0	0	+2.0000	-1.1600	+5.5200	+0.1100	-0.8500
			+6.0000	-2.0000	0	0	0	0	+1.6900	-6.6100	-0.3200	+4.0000
				+6.0000	-2.0000	0	0	+2.0000	-1.3000	+4.8900	+0.2600	+6.0100
					+6.0000	-2.0000	0	0	+1.0500	-2.2600	-0.1200	-2.0000
						+6.0000	-2.0000	0	-0.6500	-0.6600	-0.2900	+3.7700
							+6.0000	+3.0000	-0.0400	-0.0200	+0.1300	+1.9700
								+10.0000	-0.8000	+6.5700	+0.5300	+3.4200
									+6.3622	-4.3200	+1.3316	+4.0867
										+25.9131	+1.8539	+2.5334
											+0.8639	+0.9410

S I M E T R I C O

SOLUCION DIRECTA

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	1
I	+6.0000	-2.0000	0	0	0	0	0	0	+1.0000	-1.4300	-5.5400	-1.5300	+0.6100
2 II		+6.0000 +5.3333	-2.0000 -2.0000	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	+2.0000 +2.3333	+1.4500 +0.9733	+3.8100 +1.9633	+1.0400 +0.5300	-2.7200 -2.5167
3 III			+6.0000 +5.2500	-2.0000 -2.0000	0 0	0 0	0 0	0 0	+2.0000 +2.8750	-1.1600 -0.7950	+5.5200 +6.2562	+0.1100 +0.3088	-0.8500 -1.7938
4 IV				+6.0000 +5.2381	-2.0000 -2.0000	0 0	0 0	0 0	0 +1.0952	+1.6900 +1.3871	-6.6100 -4.2267	-0.3200 -0.2024	+4.0000 +3.3166
5 V					+6.0000 +5.2364	-2.0000 -2.0000	0 0	0 0	+2.0000 +2.4182	-1.3000 -0.7704	+4.8900 +3.2762	+0.2600 +0.1827	+6.0100 +7.2763
6 VI						+6.0000 +5.2361	-2.0000 -2.0000	0 0	0 +0.9236	+1.0500 +0.7558	-2.2600 -1.0087	-0.1200 -0.0502	-2.0000 +0.7791
7 VII							+6.0000 +5.2361	-2.0000 -2.0000	0 +0.3528	-0.6500 -0.3613	-0.6600 -1.0453	-0.2900 -0.3092	+3.7700 +4.0676
8 VIII								+6.0000 +5.2361	+3.0000 +3.1348	-0.0400 -0.1780	-0.0200 -0.4193	+0.1300 +0.0119	+1.9700 +3.5237
9 IX									+10.0000 +3.8289	-0.8000 -0.4888	+6.5700 +3.0785	+0.5300 +0.3645	+3.4200 -1.1731
10 X										+6.3622 +5.0403	-4.3200 -3.0010	+1.3316 +1.0303	+4.0867 +4.7502
11 XI											+25.9131 +2.4610	+1.8539 -0.1496	+2.5334 +9.3002
12 XII												+0.8639 +0.1156	+0.9410 +1.2721

CALCULO DE LOS MULTIPLICADORES (SOLUCION INVERSA O REGRESIVA)

c_{12}	c_{11}	c_{10}	c_9	c_8	c_7	c_6	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1
11.00433	+3.77903	+0.94244	-0.30638	+0.67296	+0.77684	+0.14879	+1.38956	+0.63317	-0.34168	-0.47188	+0.10167
	+0.66889	-2.24482	-1.04758	-0.02531	+0.64924	+0.11004	-0.38514	+0.42916	-0.64703	-1.08940	+2.80602
	+4.44792	+2.64375	-3.57619	+0.35584	+0.88960	+0.85668	-2.78445	+3.58954	-5.30202	-1.63686	+4.10550
		+1.34137	+0.17113	+0.04560	+0.09253	-0.19310	+0.19713	-0.35557	+0.20303	-2.44062	+0.31916
			-4.75902	+2.84986	+0.31885	+0.83758	+2.19866	+0.99463	+2.60793	-2.08206	+0.79970
				+3.89895	+1.49000	+1.62777	0	0	0	0	0
					+4.21706	0	0	0	0	0	0
						+3.36776	+1.28832	0	0	0	0
							+1.90408	+0.72739	0	0	0
								+6.01432	+2.94907	0	0
									-1.18902	+5.82934	0
										-1.81148	-0.60827
											+7.52378

CALCULO DE LOS AJUSTES

Con los multiplicadores calculados en la página anterior se obtienen las siguientes correcciones a las direcciones las cuales se llevan a la tabla de Ecuaciones Correlativas.

V_1	-2.7648
V_2	+1.4989
V_3	+1.2659
V_4	+1.6962
V_5	-1.6962
V_6	- .5466
V_7	+1.7356
V_8	+ .6225
V_9	- .7751
V_{10}	-1.0363
V_{11}	- .0546
V_{12}	-1.1441
V_{13}	+1.3533
V_{14}	+ .4897
V_{15}	-1.7450
V_{16}	- .7205
V_{17}	+1.9758
V_{18}	- .9110
V_{19}	- .9931
V_{20}	+ .6053
V_{21}	+1.2988
V_{22}	-1.8335
V_{23}	+ .6745
V_{24}	+1.1519
V_{25}	- .1621
V_{26}	+1.6534
V_{27}	- .8493
V_{28}	+ .0096
V_{29}	- .5516
V_{30}	-3.8990
V_{31}	+1.7478
V_{32}	+2.1511
V_{33}	+1.5576
V_{34}	-1.5576

El error probable obtenido es:

$$Ep = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{V^2}{12}} = 1.6703''$$

CALCULO DE ESTE EJEMPLO EN LA IBM 1620

Para efectuar el cálculo de una triangulación en la computadora se procede según las especificaciones siguientes:

I Se mandan a perforar en tarjetas los datos del ejemplo, es decir

1. Las $a_{i,j}$ de las ecuaciones de condición y los términos independientes e_i de dichas ecuaciones, a dato por tarjeta. Se comienza la perforación en la columna 2, en punto flotante.

2. Una tarjeta con los valores m, n correspondientes respectivamente al número de ecuaciones de condición y al número de ajustes, en punto fijo.

3. Una tarjeta con los valores m, m+1

4. Una tarjeta con los valores 1, m, n. El primero corresponde a un número, de no más de tres que se esté calculando. Va ubicado en las tres primeras columnas de la tarjeta estando la última cifra de la derecha en la columna 3. La cifra de la derecha de m tiene que estar perforada en la columna 6 y la última cifra de n, en la columna 9. Estos valores son también constantes de punto fijo.

II Se pasa el Programa Objeto Núm. 1 "Formación de las Ecuaciones Normales".

III Cuando la máquina imprima LOAD DATA, se cargan:

a) La tarjeta con m, n

b) Las tarjetas con $a_{i,j}$ ordenados por filas y columnas

y se oprimen las teclas START en la Cónsola y READER START y PUNCH START en la unidad Lectora-Perforadora.

IV Se pasa el Programa Objeto Núm. 2 "Resolución de las Ecuaciones Normales".

V Cuando la máquina escriba LOAD DATA, se cargan:

a) La tarjeta perforada con los valores m, m+1

b) Las tarjetas perforadas durante la ejecución de la primera pasada por la máquina

c) Las tarjetas con los e_i

y se oprimen las teclas: START, READER START y PUNCH START como en la especificación III.

VI Se pasa el Programa Objeto Núm. 3 "Resolución de las Ecuaciones Correlativas".

VII Cuando la máquina pida LOAD DATA, se carga:

a) La tarjeta con l, m, n

b) Las tarjetas perforadas durante la ejecución de la segunda pasada por la máquina

c) Las tarjetas con $a_{i,j}$ ordenadas como anteriormente

pulsándose a continuación las teclas START y READER START.

La máquina escribirá a continuación del título:

TRIANGULACION NUM . . . .

V1 . . . . .
V2 . . . . .
V3 . . . . .
" . . . . .
" . . . . .
" . . . . .

ERROR PROBABLE = ...

Los resultados de pasar el ejemplo anteriormente explicado, en la máquina, pueden verse en la página siguiente.

AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS POR H. Y. C.

TRIANGULACION NUM. 1

V 1	-2.76488
V 2	1.49891
V 3	1.26596
V 4	1.69609
V 5	-1.69609
V 6	-.54655
V 7	1.73540
V 8	.62253
V 9	-.77488
V 10	-1.03649
V 11	-.05461
V 12	-1.14424
V 13	1.35338
V 14	.48973
V 15	-1.74502
V 16	-.72045
V 17	1.97574
V 18	-.91093
V 19	-.99313
V 20	.60530
V 21	1.29876
V 22	-1.83335
V 23	.67431
V 24	1.15903
V 25	-.16204
V 26	1.55331
V 27	-.84921
V 28	.00974
V 29	-.55179
V 30	-3.89889
V 31	1.74775
V 32	2.15113
V 33	1.55755
V 34	-1.55755

ERROR PROBABLE= 1.67157

COMPARACION CON LOS RESULTADOS OBTENIDOS MANUALMENTE

Comparando ambos resultados, observamos que la mayor diferencia para un ajuste en los dos cálculos es de -0.0002" (dos diez milésimas de segundo).

Como el número y el orden de operaciones es el mismo manualmente y por la computadora, los resultados más exactos son aquellos que se obtienen empleando mayor número de cifras decimales exactas.

Como las constantes y variables utilizadas en el programa vienen en sistema decimal flotante, todas las operaciones efectuadas por la máquina, es decir, suma, resta, multiplicación y división, se efectúan siempre en forma exponencial con ocho cifras significativas.

Es indudable, entonces, que los resultados hallados por la IBM son mucho más exactos que los obtenidos manualmente con máquina de calcular de escritorio.

C O N C L U S I O N:

Además de obtener los datos con la máxima exactitud, la posibilidad de error se reduce a un mínimo.

En efecto, si el número de tarjetas de datos no coincide con los que la máquina tiene instrucción de leer, no calcula, eliminándose así el error por falta o por exceso de datos.

Si los datos no estuviesen perforados según el formato, la computadora indica error en la entrada de éllos con la máquina de escribir.

La única posibilidad de cometerse error radica en que el orden de los coeficientes no sea el debido, o que el valor de uno de ellos esté equivocado.

Por éso, es imprescindible verificar siempre las tarjetas de datos una vez perforadas. Esto puede hacerse fácilmente, sacando una lista impresa del contenido de las tarjetas perforadas.

Las ventajas de ajustar triangulaciones por IBM no sólo consiste en obtener los resultados exactos con seguridad absoluta de ausencia de errores de cálculo, sino que el tiempo empleado en dicho cálculo se reduce considerablemente.

Basta mencionar que el tiempo empleado en resolver el ejemplo utilizado en esta tesis fué aproximadamente de:

a) unos treinta minutos en perforación y verificación de datos

b) unos tres minutos para cada una de las dos primeras pasadas

c) alrededor de un minuto para la última pasada,

es decir, en total, unos cuarenta minutos para la ejecución del trabajo.

-----oOo-----

SÍMBOLOS UTILIZADOS

$a_{i,j}$ ...... Término de la matriz del Sistema No. 1, formado por las ecuaciones de condición.

$b_{i,j}$ ...... Término de la matriz del Sistema No. 3, formado por las ecuaciones normales.

C_i, C_k ...... Multiplicador correlativo.

$d_{i,j}$ ...... Coeficiente en la resolución del sistema de ecuaciones normales por el método de Gauss-Doolittle.

e ...... Base de logaritmos neperianos. También, error probable cometido en el ajuste por mínimos cuadrados.

e_i ...... Valor del término independiente del Sistema No. 3 ó de ecuaciones normales.

h ...... Constante que indica la medida de la precisión en la curva de la probabilidad.

i, i_1 ...... Sub-índice, generalmente usado para expresar el orden de la fila a la cual pertenece un término de una matriz.

j, j_1 ...... Sub-índice, generalmente utilizado para indicar el orden de la columna a la cual pertenece un término de una matriz.

k ...... Sub-índice.

l ...... Sub-índice. También, número total de líneas al hallar el número de ecuaciones de condición.

l' ...... Número de líneas visadas en las dos direcciones.

m ...... Número de ecuaciones de condición.

n ...... Número de ajustes.

N_a ...... Número de ecuaciones de condición de ángulo.

N_l ...... Número de ecuaciones de condición de lado.

S ...... Suma de los cuadrados de los ajustes. También, número total de estaciones de la red.

V_j ...... Ajuste o corrección de una dirección.

x ...... Magnitud del error considerado en la curva de probabilidad.

y, y_s ...... Valor de la probabilidad.

BIBLIOGRAFIA

1. Application of the Theory of Least Squares to the Adjustment of Triangulation"

   by
   Oscar S. Adams

2. "Surveying for Civil Engineers"

   by
   Phillip Kissam

3. "Geodesy"

   by
   George L. Hosmer

4. "Manual of Geodetic Triangulation"

   by
   F. R. Gossett

   U. S. Department of Commerce, Coast & Geodetic Survey, 1959

5. "El Método de Mínimos Cuadrados en los Trabajos de Triangulación Geodésica"

   por
   Carlos José del Castillo

   MOP (Cartografía Nacional, 1960)

6. "Ejemplos de Cartografía Nacional"

7. "Manual de Consulta 1620"

8. "Manual de Programación en Fortran IBM"

USM