

Δf_{-1} $\Delta^2 f_{-1}$ $\Delta^3 f_{-1}$ $\Delta^4 f_{-1}$ $\Delta^5 f_{-1}$ x_{-3} f_{-3} ∇f_{-3} $\nabla^2 f_{-2}$ $\nabla^3 f_{-1}$ $\nabla^4 f_0$ ∇^5
 Δf_0 $\Delta^2 f_0$ $\Delta^3 f_0$ $\Delta^4 f_0$ x_{-2} f_{-2} ∇f_{-2} $\nabla^2 f_{-1}$ $\nabla^3 f_0$ $\nabla^4 f_1$
 Δf_1 $\Delta^2 f_1$ $\Delta^3 f_1$ $\Delta^4 f_1$ x_{-1} f_{-1} ∇f_{-1} $\nabla^2 f_0$ $\nabla^3 f_1$
 Δf_2 $\Delta^2 f_2$ $\Delta^3 f_2$ $\Delta^4 f_2$ x_0 f_0 ∇f_0 $\nabla^2 f_1$
 Δf_3 $\Delta^2 f_3$ $\Delta^3 f_3$ $\Delta^4 f_3$ x_1 f_1 ∇f_1 $\nabla^2 f_2$

LAS DIFERENCIAS FINITAS Y SU APLICACION A LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE TIPO PARABOLICO UN ENFOQUE PARA FACILITAR SU APRENDIZAJE EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA

x_{-2} f_{-2} $\delta f_{-3/2}$ $\delta^2 f_{-1}$ **Por**
 x_{-1} f_{-1} $\delta f_{-1/2}$ **Alfredo A. De León** $\delta^3 f_{1/2}$
 x_0 f_0 $\delta f_{1/2}$ $\delta^2 f_0$ $\delta^3 f_{1/2}$ $\delta^4 f_0$ $\delta^5 f_{1/2}$
 x_1 f_1 $\delta f_{3/2}$ $\delta^2 f_1$ $\delta^1 f_{3/2}$ $\delta^4 f_1$
 x_2 f_2 $\delta f_{5/2}$ $\delta^2 f_2$ $\delta^1 f_{3/2}$
 x_3 f_3

Trabajo presentado para ascender a la categoría de Profesor Asociado

Δf_{-1} $\Delta^2 f_{-1}$ $\Delta^3 f_{-1}$ $\Delta^4 f_{-1}$ $\Delta^5 f_{-1}$ x_{-4} f_{-4} ∇f_{-3} $\nabla^2 f_{-2}$ $\nabla^3 f_{-1}$ $\nabla^4 f_0$ ∇^5
 Δf_0 $\Delta^2 f_0$ $\Delta^3 f_0$ $\Delta^4 f_0$ x_{-3} f_{-3} ∇f_{-2} $\nabla^2 f_{-1}$ $\nabla^3 f_0$ $\nabla^4 f_1$
 Δf_1 $\Delta^2 f_1$ $\Delta^3 f_1$ $\Delta^4 f_1$ x_{-2} f_{-2} ∇f_{-1} $\nabla^2 f_0$ $\nabla^3 f_1$
 Δf_2 $\Delta^2 f_2$ $\Delta^3 f_2$ $\Delta^4 f_2$ x_{-1} f_{-1} ∇f_0 $\nabla^2 f_1$
 Δf_3 $\Delta^2 f_3$ $\Delta^3 f_3$ $\Delta^4 f_3$ x_0 f_0 ∇f_1 $\nabla^2 f_2$
 x_1 f_1

x_{-2} f_{-2} $\delta f_{-3/2}$ $\delta^2 f_{-1}$ **Mérida, Marzo de 1984**
 x_{-1} f_{-1} $\delta f_{-1/2}$ $\delta^2 f_0$ $\delta^3 f_{1/2}$ $\delta^4 f_0$ $\delta^5 f_{1/2}$
 x_0 f_0 $\delta f_{1/2}$ $\delta^2 f_1$ $\delta^3 f_{1/2}$ $\delta^4 f_1$
 x_1 f_1 $\delta f_{3/2}$ $\delta^2 f_2$ $\delta^1 f_{3/2}$
 x_2 f_2 $\delta f_{5/2}$ $\delta^2 f_2$
 x_3 f_3

LAS DIFERENCIAS FINITAS Y SU APLICACION A LA SOLUCION DE
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE TIPO PARABOLICO
UN ENFOQUE PARA FACILITAR SU APRENDIZAJE
EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA

Por:
Alfredo A. De León

Trabajo presentado para ascender a la
categoría de Profesor Asociado

MERIDA, MARZO DE 1984

I N D I C E

	Página
AGRADECIMIENTO.	i
LISTA DE TABLAS	
LISTA DE FIGURAS.	
RESUMEN.	
I. INTRODUCCION	1
II. APROXIMACION NUMERICA.	2
2.1. Diferentes tipos de diferencias.	4
2.1. 1. Diferencias hacia adelante (Forward differences).	4
2.1. 2. Diferencias hacia atrás (Backward Differences).	6
2.1. 3. Diferencias centrales (Central differences).	8
2.1. 4. Algunas utilidades de las tablas de diferencias	9
2.2. Obtención de coeficientes.	11
2.2. 1. Fórmulas de Interpolación para incrementos iguales de x.	11
2.3. Interpolación.	14
III. DERIVACION DE FORMULAS. DE DONDE VIENEN LAS FORMULAS DE INTERPOLACION	19
IV. DIFERENCIACION NUMERICA	23
4.1. Primera derivada (basada en la fórmula de Gregory-Newton).	24
4.2. Segunda derivada (basada en la fórmula de Gregory-Newton).	27
4.3. Derivadas basadas en la fórmula de Stirling.	32
4.4. Ejemplo de aplicación de la diferenciación numérica.	34
V. INTEGRACION NUMERICA.	40
5.1. Fórmulas de Integración basadas en la fórmula de Interpolación de Gregory-Newton.	44
5.2. Segundo Intervalo de Integración (Gregory-Newton).	46
5.3. Fórmulas de integración basadas en la Fórmula de Integración de Bessel.	47

INDICE (Continuación)

	Página
5.4. Fórmulas de integración trapezoidal y de Simpson.	50
5.4.1. Newton hacia adelante integrando en doble intervalo . .	50
5.4.2. Uso de Stirling	51
5.5. Algunas reglas aplicadas a la diferenciación y a la integración para aumentar eficiencias en los cálculos. . .	53
5.6. Ejemplo aplicado de integración numérica.	54
5.6.1. Procedimiento para la solución del ejemplo.	56
VI. SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES	64
6.1. Ejemplo de ecuaciones diferenciales parciales.	65
6.1.2. Ecuación bidimensional de conducción del calor en estado no permanente.	69
6.2. Determinación de los diferentes tipos de ecuaciones dife- renciales parciales (EDP).	70
6.2.1. Ecuaciones de Segundo Orden	70
6.2.1. Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. . .	75
6.3. Representación de las ecuaciones.	78
VII. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE TIPO PARABOLICO	81
7.1. Métodos explícitos de solución.	82
7.2. Métodos implícitos de solución (Remueven la restricción $\lambda \leq 1/2$).	89
VIII. APLICACION DEL METODO IMPLICITO DE CRANK-NICOLSON A PROBLEMAS EN INGENIERIA.	94
8.1. Teoría de consolidación de los suelos	94
8.2. Ejemplo de aplicación del método implícito de Crank-Nicol- son.	101
IX. BIBLIOGRAFIA.	109
APENDICE A: FORMULAS QUE DAN LAS DERIVADAS APROXIMADAS POR DIFEREN- CIAS FINITAS PARA DIFERENTES METODOS DE INTERPOLACION.	111
APENDICE B: LISTADO DEL PROGRAMA PARA EL CALCULO DE DISTRIBUCION DE PRESIONES EN UN SUELO, DIAGRAMA DE FLUJO DEL MISMO.	115

LISTA DE TABLAS

Nº		Página
1	Valores de la función potencial (ϕ).	38
2	Resumen de los valores obtenidos para u y ψ	62
3	Resumen de los resultados de la distribución de temperatura en la barra con respecto al tiempo.	87

LISTA DE FIGURAS

Figura	Descripción	Página
1	Polinomio Interpolante.	3
2	Función Corriente.	34
3	Relación entre diferenciación e integración numérica.	40
4	Aproximación de una función $f(x)$ por polinomios interpolantes de tercer y cuarto orden respectivamente.	41
5	Curvas Características.	71
6	Representación gráfica de los valores obtenidos para la barra por el método explícito	88
7	Diagrama de presiones para el problema de Consolidación	95
8	Comparación del asentamiento de un estrato o muestra de suelo de espesor dz , con los cambios en la altura de una muestra cuya inicial es $1 + e_0$	98
9	Esquema de diferencias finitas a utilizar para la solución del problema de consolidación de suelos	105

AGRADECIMIENTO

El autor desea expresar claramente su agradecimiento al Centro Interamericano de Desarrollo Integral de Aguas y Tierras (CIDIAT), a través de su Director por haber aceptado el plan de trabajo sugerido. A mi profesor y amigo Roland Jeppson (Profesor de Utah State University), quien me inició en estas lides, y muy sinceramente deseo también expresar mi agradecimiento al grupo de mis estudiantes del curso "*Computación y Métodos Numéricos*" dictado en el CIDIAT en el Primer Trimestre de 1983, por haberme alentado a escribir y plasmar mis ideas acerca de cómo enfocarse un curso de Diferencias Finitas en Ingeniería.

Al personal del CIDIAT quien tuvo a su cargo la mecanografía, preparación de dibujos y la impresión del presente trabajo, mi eterna gratitud.

RESUMEN

El presente trabajo es el fruto de la experiencia personal en la aplicación de los métodos numéricos a la solución de problemas con los cuales el Ingeniero tiene que enfrentarse cada día. Se presenta aquí en una forma clara y concisa una metodología para la enseñanza de las diferencias finitas que arranca con los aspectos matemáticos fundamentales de las mismas y su exposición a través de ejemplos. Posteriormente se entra a los conceptos de diferenciación e integración numérica y su ilustración a través de ejemplos muy comunes en Ingeniería, y por último se exponen los diferentes tipos de Ecuaciones diferenciales parciales y como identificarlas haciendo especial énfasis en las de tipo parabólico y su solución a través de métodos explícitos e implícitos. Los métodos implícitos y explícitos se ilustran con ejemplos tan importantes y trascendentales en Ingeniería como por ejemplo la consolidación de suelos, también se desarrolló un programa de computación para resolver este último problema. Es de hacer notar la variante que se presenta en este estudio, y que es la de plantearle problemas al lector a fin de que los resuelva. Creo honestamente que este estudio y su enfoque llena el vacío que existe entre el matemático puro y el Ingeniero sometido a la presión de resolver problemas a diario.

I. INTRODUCCION

Hoy día los métodos numéricos y entre ellos las diferencias finitas y elementos finitos constituyen las principales herramientas para la solución de los problemas más complicados que se plantean en el campo de las ciencias básicas y aplicadas (Matemáticas e Ingeniería). Las ecuaciones diferenciales son expresiones matemáticas que representan una ley física, y generalmente esta ley física es la base para el planteo de cualquier problema en Ingeniería. Por lo general cada campo, esto es, matemáticas e ingeniería andan y desandan caminos aisladamente, plantean y resuelven problemas separadamente; se impone entonces la necesidad de unir esfuerzos para una mejor comprensión y por ende una mejor enseñanza de estas materias. En cualquier pensum de Ingeniería o Ciencia existen materias que enseñan métodos numéricos, pero no la interrelación entre ellos y los problemas que son de necesidad de resolver en Ingeniería; es entonces de imperiosa necesidad llenar el vacío que existe entre el Ingeniero y el Matemático puro. El presente trabajo es una primera parte de algo más extenso y que se llamará "*Métodos Numéricos en Ingeniería*" y que pretende justamente llenar además de ese vacío de que se habló anteriormente, el vacío de la escasa bibliografía en español que existe sobre el tema.

La originalidad de este trabajo se encuentra no tanto en el contenido sino en la manera de enfocarlo, estructurarlo y desarrollarlo y que el lector podrá comprobarlo a medida que entre en él, o en caso contrario yendo a la bibliografía que existe al respecto incluyendo las más recientes. Actualmente en Venezuela a nivel de Postgrado y Pregrado se utilizan las técnicas que este trabajo aborda, y espero y así lo creo que los estudiantes de las diferentes Universidades encontrarán en él un buen auxilio para sus estudios.

II. APROXIMACION NUMERICA

Existen numerosos métodos y maneras de abordar la aproximación de una función continua de una variable independiente. En diferencias finitas esta aproximación generalmente se cumple permitiendo que un polinomio de grado \underline{n} represente la función.

$$P_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \dots + a_n \quad (1)$$

Otra manera muy común de representar un polinomio es la siguiente:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

En una forma corta se puede expresar que: cualquiera función continua $f(x)$ puede ser aproximada a cualquier grado deseado de exactitud en un intervalo cerrado especificado, por un polinomio $P_n(x)$. En anotación matemática sería:

$$f(x) \doteq P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (3)$$

Una vez seleccionado el polinomio de grado \underline{n} como la función que aproxima, se debe escoger entonces el criterio o procedimiento a seguir para calcular los valores de los coeficientes \underline{a} ; estos coeficientes son determinados de tal suerte que el polinomio pase a través de $n+1$ puntos definidos por la función continua. Desde que el polinomio garantiza tener el mismo valor que la función continua solamente en esos puntos, este proceso es entonces también referido o conocido como discretización de la función continua.

En una anotación matemática sería:

Dados los pares de valores $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n$,) quizás el criterio más obvio para determinar los coeficientes de $P_n(x)$ sería el siguiente:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

Lo anterior quiere decir que el polinomio $P_n(x)$ de grado \underline{n} debe reproducir la función $f(x)$ exactamente para los $n + 1$ argumentos para cuando $x = x_i$. El polinomio será siempre de un grado \underline{n} menor en 1 que el número de puntos por donde él pasa; esto es, si queremos ajustar un polinomio a cuatro puntos dados de una función, este polinomio será de orden 3, y así sucesivamente, y recibirá el nombre especial de polinomio interpolante. En la Figura siguiente se ilustran los conceptos antes emitidos para un polinomio de grado 3.

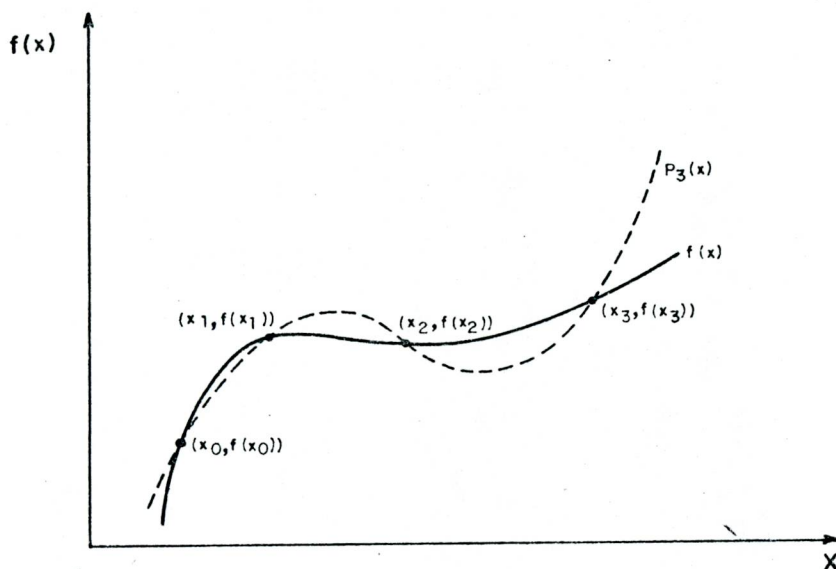


Figura 1.- Polinomio interpolante.

Existen además diferentes métodos para obtener los coeficientes y otras informaciones importantes relacionadas con los polinomios interpolantes. En estos métodos se usan las tablas denominadas "tablas de diferencias" y fórmulas de interpolaciones asociadas con estas tablas de diferencias.

2.1. DIFERENTES TIPOS DE DIFERENCIAS

Las siguientes tablas de diferencias y notaciones se aplican solamente si incrementos iguales Δx (ó Δh es a menudo usado en vez de Δx) de la variable independiente x son usados. Si diferencias Δx no iguales ocurren, entonces las llamadas diferencias divididas deben usarse en vez de las que seguidamente explicaremos o algún otro método.

2.1.1. DIFERENCIAS HACIA ADELANTE (Forward differences)

El operador de las diferencias hacia adelante se denota por el símbolo (Δ). Las tablas de diferencias son formas estandar de mostrar las diferencias finitas y una manera de visualizar mejor el procedimiento. A continuación se ilustra una típica tabla de diferencias.

DIFERENCIAS HACIA ADELANTE

x_{-1}	f_{-1}				
		Δf_{-1}			
x_0	f_0	$\Delta^2 f_{-1}$			
		Δf_0	$\Delta^3 f_{-1}$		
x_1	f_1	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^4 f_{-1}$		
		Δf_1	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^5 f_{-1}$	
x_2	f_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^4 f_0$		
		Δf_2	$\Delta^3 f_1$		
x_3	f_3	$\Delta^2 f_2$			
		Δf_3			
x_4	f_4				

Δf , se le llama primera diferencia, $\Delta^2 f$, segunda diferencia, y así sucesivamente. Como se puede observar anteriormente los subíndices permanecen constantes de izquierda a derecha y hacia abajo y las potencias se incrementan de izquierda a derecha y hacia arriba. A continuación se da un ejemplo.

K	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	0	$f_0 = 0$					
			$\Delta f_0 = 1,5$				
1	1	$f_1 = 1,5$		$\Delta^2 f_0 = 0,2$			
			$\Delta f_1 = 1,7$		$\Delta^3 f_0 = 0,9$		
2	2	$f_2 = 3,2$		$\Delta^2 f_1 = 1,1$		$\Delta^4 f_0 = -1,3$	
			$\Delta f_2 = 2,8$		$\Delta^3 f_1 = -0,4$		$\Delta^5 f_0 = 3,0$
3	3	$f_3 = 6,0$		$\Delta^2 f_2 = 0,7$		$\Delta^4 f_1 = 1,7$	
			$\Delta f_3 = 3,5$		$\Delta^3 f_2 = 1,3$		
4	4	$f_4 = 9,5$		$\Delta^2 f_3 = 2,0$			
			$\Delta f_4 = 5,5$				
5	5	$f_5 = 15,0$					

Como se puede observar se han dado 6 puntos (x_i) y los valores correspondientes de la función, $f(x_i)$; luego el grado del polinomio que mejor se ajusta a los datos anteriores sería uno de orden o grado 5. La variable K se denomina índice, y se define matemáticamente como sigue:

$$K = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

(5) $x_0 =$ puede ser cualquier valor que tome la variable independiente ya sea ubicada arriba, abajo o en el centro de la columna de las x_i .

En la tabla anterior si tomamos $x_0 = 0$, entonces:

$$K = \frac{x - 0}{\Delta x} = \frac{x - 0}{1} = x \quad (6)$$

Ahora bien, si queremos saber qué valor de K le corresponde a cualquier valor que tome la variable independiente, bastaría con reemplazar en la ecuación 5 los valores respectivos, o en su defecto hacer uso de la ecuación 6, la cual es válida solamente para este ejemplo específico.

$$x_0 = 0$$

$$x = 5$$

$$K = \frac{5 - 0}{1} = 5$$

2.1.2. DIFERENCIAS HACIA ATRAS (Backward Differences)

El operador de las diferencias hacia atrás se denota por el símbolo (∇) .

DIFERENCIAS HACIA ATRAS

x_{-4}	f_{-4}					
		∇f_{-3}				
x_{-3}	f_{-3}		$\nabla^2 f_{-2}$			
		∇f_{-2}		$\nabla^3 f_{-1}$		
x_{-2}	f_{-2}		$\nabla^2 f_{-1}$		$\nabla^4 f_0$	
		∇f_{-1}		$\nabla^3 f_0$		$\nabla^5 f_1$
x_{-1}	f_{-1}		$\nabla^2 f_0$		$\nabla^4 f_1$	
		∇f_0		$\nabla^3 f_1$		
x_0	f_0		$\nabla^2 f_1$			
		∇f_1				
x_1	f_1					

Como se puede observar, en esta tabla los subíndices se van incrementando en 1 de izquierda a derecha y hacia abajo; tomando como ejemplo el mismo del caso anterior, se muestra a continuación el cálculo de las diferencias hacia atrás.

$$x_0 = 5$$

$$\Delta x = 1$$

$$K = \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{x - 5}{1} = x - 5$$

K	x_i	$f(x_i)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$	$\nabla^5 f$
-5	0	$f_{-5} = 0$					
			$\nabla f_{-4} = 1,5$				
-4	1	$f_{-4} = 1,5$		$\nabla^2 f_{-3} = 0,2$			
			$\nabla f_{-3} = 1,7$				
					$\nabla^3 f_{-2} = 0,9$		
-3	2	$f_{-3} = 3,2$		$\nabla^2 f_{-2} = 1,1$			
			$\nabla f_{-2} = 2,8$				
					$\nabla^3 f_{-1} = -0,4$	$\nabla^4 f_{-1} = -1,3$	
							$\nabla^5 f_0 = 3,0$
-2	3	$f_{-2} = 6,0$		$\nabla^2 f_{-1} = 0,7$		$\nabla^4 f_0 = 1,7$	
			$\nabla f_{-1} = 3,5$				
					$\nabla^3 f_0 = 1,3$		
-1	4	$f_{-1} = 9,5$		$\nabla^2 f_0 = 2,0$			
			$\nabla f_0 = 5,5$				
0	5	$f_0 = 15,0$					

Note usted, que los valores de las diferencias hacia atrás son idénticos a los de las diferencias hacia adelante, tan solo difieren en el subíndice.

2.1.3. DIFERENCIAS CENTRALES (Central Differences).

El operador de las diferencias centrales se denota por el símbolo (δ)

DIFERENCIAS CENTRALES

x_{-2}	f_{-2}					
		$\delta f_{-3/2}$				
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$			
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$		
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$	
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$		$\delta^5 f_{1/2}$
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		$\delta^4 f_1$	
		$\delta f_{3/2}$		$\delta^3 f_{3/2}$		
			$\delta^2 f_2$			
x_2	f_2					
		$\delta f_{5/2}$				
x_3	f_3					

Se puede observar que los subíndices de las diferencias incrementan de izquierda a derecha y hacia abajo en $1/2$.

Como ejemplo de cálculo de diferencias centrales se tomará el mismo caso utilizado en las diferencias anteriores, tal como sigue:

K	x_i	$f(x_i)$	δf	$\delta^2 f$	$\delta^3 f$	$\delta^4 f$	$\delta^5 f$
-2	0	$f_{-2} = 0$					
			$\delta f_{-3/2} = 1,5$				
-1	1	$f_{-1} = 1,5$		$\delta^2 f_{-1} = 0,2$			
			$\delta f_{-1/2} = 1,7$		$\delta^3 f_{-1/2} = 0,9$		
0	2	$f_0 = 3,2$		$\delta^2 f_0 = 1,1$		$\delta^4 f_0 = -1,3$	
			$\delta f_{1/2} = 2,8$		$\delta^3 f_{1/2} = -0,4$		$\delta^5 f_{1/2} = 3,0$
1	3	$f_1 = 6,0$		$\delta^2 f_1 = 0,7$		$\delta^4 f_1 = 1,7$	
			$\delta f_{3/2} = 3,5$		$\delta^3 f_{3/2} = 1,3$		
2	4	$f_2 = 9,5$		$\delta^2 f_2 = 2,0$			
			$\delta f_{5/2} = 5,5$				
3	5	$f_3 = 15,0$					

2.1.4. ALGUNAS UTILIDADES DE LAS TABLAS DE DIFERENCIAS.

Cuando una columna cualquiera de las diferencias llega a ser cero (0), entonces el grado del polinomio que se ajusta será de un (1) grado menor que el grado de la diferencia; por ejemplo: Si $\Delta^2 f = 0$, entonces el polinomio será de primer grado y dos puntos tan solo serían necesarios para el ajuste del polinomio. Si las terceras diferencias llegan a ser ceros (0), un polinomio de segundo grado sería suficiente, y usted necesita solamente 3 puntos para ajustar el polinomio.

Cuando una columna de diferencias llega a ser constante o casi constante se puede ajustar un polinomio del mismo grado de las diferencias, pero se podrá obtener cierto grado de error el cual habría necesidad de evaluarlo.

Lo antes dicho se puede ilustrar a través de un ejemplo como sigue: Dado los siguientes pares de puntos (1,0, 2,0), (1,5, 4,375), (2,0, 11,00) (2,5, 24,125), (3,0, 46,00), (3,5, 78,875), obtener el grado del polinomio que se ajustaría y los puntos que serían solamente necesarios.

K	x	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$
0	1,0	2,000	2,375		
1	1,5	4,375	6,625	4,25	
2	2,0	11,000	13,125	6,50	2,25
3	2,5	24,125	21,875	8,75	2,25
4	3,0	46,000	32,875	11,00	2,25
5	3,5	78,875			

Nótese que se tienen 6 pares de datos, luego entonces un polinomio de quinto grado potencialmente se ajustaría, pero también podemos observar que las terceras diferencias llegan a ser constantes e igual a (2,25), así que un polinomio de tercer grado puede hacer el mismo trabajo y solamente 4 puntos de los seis dados serían suficientes.

El polinomio tendría la siguiente forma:

$$Y = a x^3 + b x^2 + c x + d \quad (7)$$

La pregunta obligada es: Cómo obtener los coeficientes a, b, c, d?

2.2. OBTENCION DE COEFICIENTES

Una primera opción sería la de seleccionar pares de valores de (x, y) y escribir tantas ecuaciones como fuesen necesarias y resolverlas para obtener los coeficientes, ya sean por los métodos algebraicos de sustitución o utilizando análisis matricial. La otra opción sería usar las fórmulas de interpolación para iguales incrementos de x que seguidamente se expondrán:

2.2.1. Fórmulas de Interpolación para incrementos iguales de x.

- Newton con diferencias hacia adelante:

$$f(x_k) = f_0 + K \Delta f_0 + \frac{K(K-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots \quad (8)$$

- Newton Con diferencias hacia atrás

$$f(x_k) = f_0 + K \nabla f_0 + \frac{K(K+1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \frac{K(K+1)(K+2)}{3!} \nabla^3 f_0 + \dots \quad (9)$$

- Stirling con diferencias centradas en una de las entradas

$$f(x_k) = f_0 + K\mu\delta f_0 + \frac{K}{2!} (K) \delta^2 f_0 + \frac{K(K^2-1)\mu\delta^3 f_0}{3!} + \frac{K^2(K^2-1)}{4!} \delta^4 f_0 + \dots \quad (10)$$

- Bessel con diferencias centradas entre dos entradas

$$f(x_k) = \mu f_{1/2} + (K - 1/2) \delta f_{1/2} + \frac{K(K-1)}{2!} \mu \delta^2 f_{1/2} + \frac{1}{3} (K-1/2) \left(\frac{K(K-1)}{2!} \right) \delta^3 f_{1/2} + \dots$$

En el cual:

$$K = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

μ = operador promedio

$$\mu f_{1/2} = \frac{1}{2} (f_0 + f_1), \mu \delta^2 f_{1/2} = \frac{1}{2} (\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1), \mu \delta f_0 = \frac{1}{2} (\delta f_{-1/2} + \delta f_{1/2})$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1, \text{ etc.}$$

Continuando con el ejemplo expuesto en la página 10, seguidamente se calcularán los coeficientes:

Aplicando Newton hacia adelante:

$$Y = Y_0 + K \Delta Y_0 + \frac{K(K-1)}{2!} \Delta^2 Y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!} \Delta^3 Y_0$$

$$K = \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{x - 1}{0,5}$$

$$Y = 2 + \left(\frac{x-1}{0,5}\right) \times 2,375 + \frac{\left(\frac{x-1}{0,5}\right) \left(\frac{x-1,5}{0,5}\right)}{1 \times 2} \times 4,25 + \frac{\left(\frac{x-1}{0,5}\right) \left(\frac{x-1,5}{0,5}\right) \left(\frac{x-2,0}{0,5}\right)}{1 \times 2 \times 3} \times 2,25$$

$$= 2 + 4,75x - 4,75 + (x^2 - 2,5x + 1,5) \times 8,5 + (x^3 - 4,5x^2 + 6,5x - 3) \times 3$$

$$= 2 + 4,75x - 4,75 + 8,5x^2 - 21,25x + 12,75 + 3x^3 - 13,5x^2 + 19,5x - 9$$

$$Y = 3x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

Aplicando el Método de Stirling:

	x	Y	δY	$\delta^2 Y$	$\delta^3 Y$
-2	1,0	$Y_{-2} = 2,000$			
			$\delta Y_{-3/2} = 2,375$		
-1	1,5	$Y_{-1} = 4,375$		$\delta^2 Y_{-1} = 4,25$	
			$\delta Y_{-1/2} = 6,625$		$\delta^3 Y_{-1/2} = 2,25$
0	2,0	$Y_0 = 11,000$		$\delta^2 Y_0 = 6,50$	
			$\delta Y_{1/2} = 13,125$		$\delta^3 Y_{1/2} = 2,25$
1	2,5	$Y_1 = 24,125$		$\delta^2 Y_1 = 8,75$	
			$\delta Y_{3/2} = 21,875$		$\delta^3 Y_{3/2} = 2,25$
2	3,0	$Y_2 = 46,000$		$\delta^2 Y_2 = 11,00$	
			$\delta Y_{5/2} = 32,875$		
3	3,5	$Y_3 = 78,815$			

$$K = \frac{x - 2,0}{0,5}$$

$$Y = Y_0 + K \frac{1}{2} (\delta Y_{-1/2} + \delta Y_{1/2}) + \frac{K(K)}{2!} \delta^2 Y_0 + \frac{K(K^2 - 1)}{3!} \times \frac{1}{2}$$

$$(\delta^3 Y_{1/2} + \delta^3 Y_{-1/2}) = 11,00 + \left(\frac{X - 2}{0,5}\right) \times \frac{1}{2} (6,625 + 13,125) +$$

$$\left(\frac{X - 2}{0,5}\right) \left(\frac{X - 2}{0,5}\right) \times \frac{1}{2} \times 6,50 + \left(\frac{X - 2}{0,5}\right) \left[\left(\frac{X - 2^2}{0,5}\right) - 1\right] \times \frac{1}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{2}$$

$$(2,25 + 2,25) = 11 + 19,75 (X - 2) + 13 (X^2 - 4X + 4) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ (x^3 - 6x^2 + 11,75x - 7,50) \times 3 \\
 &= 11 + 19,75x - 39,5 + 13x^2 - 52x + 52 + 3x^3 - 18x^2 + 35,25x - 22,50
 \end{aligned}$$

$$Y = 3x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

Por ambos métodos la respuesta es la misma como era de esperarse, aquí de los cuatro (4) métodos de diferencia finitas expuestos para ajuste de polinomios a puntos dados, hemos utilizado a manera de ejemplo dos de ellos. Se deja al lector la inquietud de resolver el mismo ejercicio por los dos métodos restantes y comparar las respuestas. La pregunta inmediata es ¿Cuál de los cuatro (4) métodos debo yo utilizar?. No hay respuesta inmediata todo dependerá de la información dada, de cuántos puntos serían suficientes para el ajuste del polinomio y de la respuesta que yo necesito en base a las preguntas formuladas.

2.3. INTERPOLACION

Una de las utilidades de la tabla de diferencias es la interpolación, vamos a ilustrarlo a través de un ejemplo, así: En base a los mismos datos del problema que hemos venido desarrollando encuentre usted el valor de (Y) para cuando $x = 2,105$.

K	x	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$
0	1,0	2,000			
			2,375		
1	1,5	4,375		4,25	
			6,625		2,25
2	2,0	11,000		6,50	
	2,105	?	13,125		2,25
3	2,5	24,125		8,75	
			21,875		2,25
4	3,0	46,000		11,00	
			32,875		
5	3,5	78,875			

Utilizando el Método de Newton hacia adelante, se tiene:

$$K = \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{2,105 - 1,0}{0,5} = 2,21$$

$$Y = Y_0 + K \Delta Y_0 + \frac{K(K-1)}{2!} \Delta^2 Y_0 + \frac{K(K-1)(K-2)}{3!} \Delta^3 Y_0$$

$$Y = 2 + 2,21 \times 2,375 + \frac{(2,21)(2,21-1)}{2} \times 4,25 + \frac{(2,21)(2,21-1)(2,21-2)}{6} \times 2,25$$

$$Y = 2 + 5,24875 + 5,68246 + 0,21058$$

$$Y = 13,14179$$

Ahora bien, si usted reemplaza el valor de $x = 2,105$ en el polinomio ajustado ($Y = 3x^3 - 5x^2 + 3x + 1$) obtendría la misma respuesta; "pero usted tiene que obtener este polinomio primero"; en cambio el sentido de la interpolación sería el de aprovechar las tablas de diferencias acompañadas con los métodos de interpolación.

Otra pregunta a la cual se le puede dar respuesta utilizando las propiedades de que las columnas de diferencias en las tablas de diferencias llegasen a ser constantes es la siguiente: ¿Basados en el mismo ejemplo dado aquí, obtener el polinomio de tal suerte que $x_0 = 0$? Esto sería básicamente un tipo de extrapolación. El procedimiento sería, partir de atrás hacia adelante agregando tantas $\Delta^3 Y$ como sean necesarias hasta llegar a $x = 0$. En el ejemplo que sigue, los números con asteriscos fueron los que se agregaron.

k	x	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$	$\Delta^3 Y$
0	0,0*	1,000*			
			0,625*		
1	0,5*	1,625*		- 0,25*	
			0,375*		2,25*
2	1,0	2,000		2,00*	
			2,375		2,25*
3	1,5	4,375		4,25	
			6,625		2,25
4	2,0	11,000		6,500	
			13,125		2,25
5	2,5	24,125		8,750	
			21,875		2,25
6	3,0	46,000		11,000	
			32,875		
7	3,5	78,875			

$$K = \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{x - 0}{0,5} = 2x$$

$$Y = 1,0 + 2x(0,625) + \frac{2x(2x-1)(-0,25)}{2} + \frac{2x(2x-1)(2x-2)(2,25)}{6}$$

$$Y = 1,0 + 1,25x - 0,25(2x^2 - x) + (4x^3 - 6x^2 + 2x) 0,75$$

$$= 1,0 + 1,25x - 0,50x^2 + 0,25x + 3x^3 - 4,50x^2 + 1,50x$$

$$Y = 3x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

La respuesta corresponde al mismo polinomio encontrado originalmente y era de esperarse por cuanto lo que se hizo fue agregar diferencias constantes.

EJERCICIOS

- 1.- Escribir las tablas de diferencias para las tres anotaciones usadas (Δ , ∇ , δ) para $f(x) = x^3 - 0,50x$, en donde x toma los valores de 0, 1, 2, 3, 4 y 5.
- 2.- Sustituya los resultados del ejercicio 1 en las fórmulas de Newton de interpolación hacia adelante y hacia atrás y verifique el polinomio original.

- 3.- Encontrar el polinomio que pasa a través de los siguientes cuatro (4) pares de puntos $(0,5)$, $(1,5)$, $(2,15)$, $(3,53)$ usando: a) Fórmula de Newton de interpolación hacia adelante, b) Fórmula de Bessel y c) Escribiendo un sistema de ecuaciones y resolviéndolas para los coeficientes desconocidos. ¿Por qué no es Stirling una fórmula apropiada para encontrar el polinomio. Basado en este polinomio hallar los valores de Y para $x = 1,7$ y $x = 2,6$; ¿Obtiene usted los mismos resultados usando una de las fórmulas de interpolación directamente?. (Newton hacia adelante por ejemplo).
- 4.- Dado los siguientes datos obtenidos de un experimento en Ingeniería. Ajuste un polinomio de un grado apropiado que dé casi un perfecto ajuste. Dé la ecuación de este polinomio.

<u>x</u>	<u>Y</u>
0,0	1,000
0,4	1,632
0,8	3,096
1,2	6,544
1,6	13,127
2,0	24,000
2,4	40,312

III. DERIVACION DE FORMULAS. DE DONDE VIENEN LAS FORMULAS DE INTERPOLACION?

Vamos a ilustrar el procedimiento dando respuesta a la pregunta ¿Cómo obtener la fórmula de interpolación de Newton con diferencias hacia adelante?

Se tiene el siguiente polinomio:

$$Y = P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 \quad (12)$$

Y vamos a definir los "factoriales polinomiales" como sigue:

$$K^{(0)} = 1$$

$$K^{(1)} = K$$

$$K^{(2)} = K(K - 1)$$

$$K^{(3)} = K(K - 1)(K - 2)$$

⋮

$$K^{(r)} = K(K - 1) \dots [K - (r - 1)] = K(K - 1) \dots (K - r + 1)$$

Ahora utilizando los factoriales polinomiales como definidos anteriormente, una forma cómoda de expresar un polinomio cuando se tienen las tablas de diferencias es la siguiente:

$$P_n(x) = b_n \frac{K^{(n)}}{n!} + b_{n-1} \frac{K^{(n-1)}}{(n-1)!} + b_{n-2} \frac{K^{(n-2)}}{(n-2)!} + \dots + b_0 \quad (13)$$

En donde; $K = \frac{x - x_0}{\Delta x}$

Adicionalmente como una propiedad de los factoriales polinomiales se prueba que:

$$\Delta K^{(n)} = n K^{(n-1)} \quad (14)$$

$$\Delta K^{-(n)} = -n K^{-(n+1)} \quad (15)$$

la cual guarda estrecha relación con las derivadas común y corrientes, es decir:

$$\frac{d(x^n)}{d x} = n x^{n-1} \quad (16)$$

$$\frac{d(x^{-n})}{d x} = -n x^{-n-1} = -n x^{-(n+1)} \quad (17)$$

Otra identidad de los factoriales polinomiales es la siguiente:

$$\Delta K^{(n)} = (K+1)^{(n)} - K^{(n)} \quad (18)$$

prueba:

$$(K+1)^{(n)} = \{(K+1)(K+1-1)\dots [K+1-(n-1)]\}$$

$$(K+1)^{(n)} = \{(K+1)(K)\dots [K-n+2]\}$$

$$K^{(n-1)} = K\dots [K-(n-1-1)] = K\dots [K-n+2]$$

$$(K+1)^{(n)} = (K+1)K^{(n-1)} \quad (19)$$

$$K^{(n)} = K(K-1)(K-2)\dots [K-(n-1)]$$

$$K(K-1)(K-2) = K^{(n-1)}$$

$$K^{(n)} = K^{(n-1)} \dots [K-(n-1)] \quad (20)$$

Reemplazando las ecuaciones 19 y 20 en la ecuación 18, se tiene que:

$$\Delta K^{(n)} = \{(K+1) K^{(n-1)} - K^{(n-1)} [K-(n-1)]\}$$

$$\Delta K^{(n)} = K^{(n-1)} \{K+1 - [K-(n-1)]\} = K^{(n-1)} \{K+1-K+n-1\}$$

$$\Delta K^{(n)} = n K^{(n-1)}. \text{ Lo cual queda demostrado.}$$

basados ahora en la propiedad dada por la ecuación 14, tomamos la primera diferencia $\Delta P_n(x)$ de la ecuación 13 como sigue:

$$\Delta P_n(x) = \frac{n b_n K^{(n-1)}}{n!} + \dots$$

pero: $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$

$$\Delta P_n(x) = \frac{b_n}{(n-1)!} K^{(n-1)} + \dots$$

Tomando las segundas diferencias $\Delta^2 P_n(x)$

$$\Delta^2 P_n(x) = \frac{(n-1) b_n K^{(n-2)}}{(n-1)!} + \dots$$

pero:

$$\frac{n-1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!}$$

$$\Delta^2 P_n(x) = \frac{b_n}{(n-2)!} K^{(n-2)} + \dots$$

.

.

.

.

.

.

.

$$\Delta^n P_n(x) = \frac{b_n}{(n-n)!} K^{(n-n)} + \dots$$

$$\Delta^n P_n(x) = \frac{b_n}{0!} K^{(0)} ; 0! = 1 \text{ (por definición)}$$

$$\therefore b_n = \Delta^n P_n(x) \quad (21)$$

Con este mismo procedimiento se pueden obtener los demás coeficientes y así tenemos:

$$b_{n-1} = \Delta^{n-1} P_{n-1}(x) \quad (22)$$

$$b_{n-2} = \Delta^{n-2} P_{n-2}(x) \quad (23)$$

.

.

.

.

reemplazando estos coeficientes por los valores antes obtenidos en la ecuación 13.

$$P_n(x) = \Delta^n P_n \frac{K^{(n)}}{n!} + \Delta^{n-1} P_{n-1} \frac{K^{(n-1)}}{(n-1)!} + \dots \quad (24)$$

Dando valores a $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ etc. se pueden evaluar las diferencias $\Delta^n P_n, \Delta^{n-1} P_{n-1}$, etc., obteniéndose finalmente que:

$$P_n(x) = f(x_k) = f_0 K^{(0)} + K^{(1)} \Delta f_0 + \frac{K^{(2)} \Delta^2 f_0}{2!} + \dots \quad (25)$$

$$f(x_k) = f_0 + K \Delta f_0 + \frac{K(K-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots \quad (26)$$

Siendo esta última la fórmula de interpolación de Newton hacia adelante, que era justamente lo que se quería demostrar.

IV. DIFERENCIACION NUMERICA

En la solución de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales, es práctica común aproximar las funciones continuas de los problemas por polinomios evaluados en puntos discretos. En preparación para hacer esto será necesario aproximar las derivadas que podrían ocurrir en las ecuaciones diferenciales a cualquier orden deseado. En esta sección se discutirán los métodos para obtener esta aproximación por diferencias finitas. Desde que en la solución de estos problemas se usarán intervalos constantes Δx , entonces el desarrollo de estas derivadas aproximadas se basará en las fórmulas de interpolación dadas previamente, las cuales utilizan diferencias obtenidas de las "tablas de diferencias" para incrementos constantes Δx entre dos entradas consecutivas de la variable independiente (x).

Si nosotros observamos la "tabla de diferencias" vemos algunas de las siguientes ventajas:

- 1) Sirve para decidir el grado del polinomio
- 2) Sirve para interpolar
- 3) Sirve para obtener el polinomio
- 4) Sirve para evaluar derivadas

¿Cómo nosotros podemos evaluar derivadas?

Para ilustrar este procedimiento, vamos a tomar la fórmula de interpolación de Newton hacia adelante también conocida como fórmula de Gregory-Newton.

4.1. PRIMERA DERIVADA (Basada en la fórmula de Gregory-Newton)

$$f(x_k) = f_0 + K \Delta f_0 + \frac{(K^2 - K) \Delta^2 f_0}{2!} + \frac{K^3 - 3K^2 + 2K}{6} \Delta^3 f_0 + \dots \quad (27)$$

$$K = \frac{x - x_0}{\Delta x}; \quad \Delta x \text{ y } x_0: \text{ son constantes}$$

Utilizando el concepto de derivadas en cadenas:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dK} \cdot \frac{dK}{dx} \quad (\text{Regla de la derivada en cadena})$$

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dK} \cdot \frac{1}{\Delta x} \quad (28)$$

Derivando la ecuación 27 respecto a K, y aplicando lo obtenido en 28, tenemos que:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{(2K - 1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{(3K^2 - 6K + 2)}{6} \Delta^3 f_0 + \dots \right] \quad (29)$$

la anterior derivada se puede evaluar para diferentes valores de K, al cual le corresponde un determinado valor de x, así:

$$\text{Para } K = 0 \longrightarrow x_0$$

$$K = 1 \longrightarrow x_1$$

$$K = 2 \longrightarrow x_2$$

Volviendo a la ecuación 29 y evaluándola en $K = 0$, se tiene que:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{K=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 + \dots \right]$$

Para muchas de las aplicaciones es necesario poner la anterior derivada en función de la *función original*, para eso tenemos que valer nos de las tablas de diferencias, así:

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{K=0} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} (\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 - \frac{5}{6} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^2 f_1 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 - \frac{5}{6} (\Delta f_1 - \Delta f_0) + \frac{1}{3} (\Delta f_2 - \Delta f_1) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 - \frac{5}{6} \Delta f_1 + \frac{5}{6} \Delta f_0 + \frac{1}{3} \Delta f_2 - \frac{1}{3} \Delta f_1 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{11}{6} \Delta f_0 - \frac{7}{6} \Delta f_1 + \frac{1}{3} \Delta f_2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{11}{6} (f_1 - f_0) - \frac{7}{6} (f_2 - f_1) + \frac{1}{3} (f_3 - f_2) \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{K=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{3} f_3 - \frac{3}{2} f_2 + 3f_1 - \frac{11}{6} f_0 \right] \quad (30)$$

Y esta es: La primera derivada de orden 3 evaluada en $K = 0$ basada en la fórmula de interpolación de Gregory - Newton.

Vamos a evaluarla ahora en $K = 1$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{2K-1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{(3K^2 - 6K + 2)}{6} \Delta^3 f_0 + \dots \right]$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{K=1} = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 - \frac{1}{6} \Delta^3 f_0 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 - \frac{1}{6} (\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0) \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 - \frac{1}{6} \Delta^2 f_1 + \frac{1}{6} \Delta^2 f_0 \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{4}{6} \Delta^2 f_0 - \frac{1}{6} \Delta^2 f_1 \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{4}{6} (\Delta f_1 - \Delta f_0) - \frac{1}{6} (\Delta f_2 - \Delta f_1) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{4}{6} \Delta f_1 - \frac{4}{6} \Delta f_0 - \frac{1}{6} \Delta f_2 + \frac{1}{6} \Delta f_1 \right] \\
&= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{3} \Delta f_0 + \frac{5}{6} \Delta f_1 - \frac{1}{6} \Delta f_2 \right] \\
&= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{3} (f_1 - f_0) + \frac{5}{6} (f_2 - f_1) - \frac{1}{6} (f_3 - f_2) \right] \\
&= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{3} f_1 - \frac{1}{3} f_0 + \frac{5}{6} f_2 - \frac{5}{6} f_1 - \frac{1}{6} f_3 + \frac{1}{6} f_2 \right]
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=1} = \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{1}{6} f_3 + f_2 - \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{3} f_0 \right] \quad (31)$$

Y esta es: La primera derivada de orden 3 evaluada en $k = 1$ basada en la fórmula de interpolación de Gregory - Newton.

4.2. SEGUNDA DERIVADA (Basada en la fórmula de Gregory - Newton)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dk} \left(\frac{df}{dx} \right) \cdot \frac{dk}{dx} \quad (\text{usando la derivada en cadena})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d}{dk} \left(\frac{df}{dx} \right) \cdot \frac{dk}{dx} = \frac{d}{dk} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + \frac{2k-1}{2} \Delta^2 f_0 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{3k^2 - 6k + 2}{6} \right) \Delta^3 f_0 \right] \cdot \frac{1}{\Delta x} \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\Delta^2 f_0 + \left(\frac{6k-6}{6} \right) \Delta^3 f_0 + \dots \right]$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\Delta^2 f_0 + (k-1) \Delta^3 f_0 + \dots \right] \quad (32)$$

Si se decide evaluar esta derivada en $k = 1$, entonces el término $(k-1)\Delta^3 f_0$ desaparece, y se necesitaría tan sólo saber la segunda diferencia para conocer la segunda derivada de tercer orden de aproximación usando la fórmula de Gregory - Newton.

Evaluación de la segunda derivada en $K = 0$.

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\Delta^2 f_0 + (k-1) \Delta^3 f_0 + \dots \right]$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 \right] = \frac{1}{\Delta x^2} \left[(\Delta f_1 - \Delta f_0) - (\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0) \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} \left[f_2 - f_1 - f_1 + f_0 - \Delta f_2 + \Delta f_1 + \Delta f_1 - \Delta f_0 \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} \left[f_2 - f_1 - f_1 + f_0 - f_3 + f_2 + 2f_2 - 2f_1 - f_1 + f_0 \right]$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0 \right] \quad (33)$$

Bajo este mismo procedimiento y esquema se pueden derivar las terceras cuartas, quintas, etc, derivadas del orden de aproximación que queramos

en función de la *función original*, en el Apéndice A se dan las fórmulas para diferentes métodos y órdenes de aproximación.

Para ilustrar el uso de estas fórmulas, se formulará el siguiente problema a resolverse por la fórmula de Gregory-Newton: Con la tabla de diferencia que aparece a continuación evaluar las derivadas primera y segunda en $x = 0,0$; $x = 2,0$ y se deja al lector evaluar las mismas derivadas en los puntos $(x = 4,0; k = 0,0)$; $(x = 4,5; k = 0,5)$.

K	x	f(x _i)	Δ f	Δ ² f	Δ ³ f	Δ ⁴ f
0	0,0	50,0				
1	1,0	44,0	- 6			
2	2,0	68,0	24	30		
3	3,0	278,0	210	186	156	120
4	4,0	950,0	672	462	276	120
5	5,0	2480,0	1530	858	396	120
6	6,0	5384,0	2904	1374	516	120
7	7,0	10298,0	4914	2010	636	120
8	8,0	17978,0	7680	2766	756	120
9	9,0	29300,0	11322	3642	876	

Para evaluar las derivadas apropiadamente se recomienda tomar las derivadas hasta una aproximación igual al orden del polinomio que mejor se ajustaría; en este caso particular se tienen 10 puntos pero las cuartas diferencias son constantes, por consiguiente en las derivadas debe emplearse hasta el cuarto orden de aproximación. Otra recomendación es usar $k = 0$ justamente en aquellos puntos donde se quiere calcular la derivada.

Evaluación de derivadas a $x = 0,0$

La ecuación 29, pero ampliada hasta el cuarto orden sería:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta f_0 + (k - 1/2) \Delta^2 f_0 + \frac{3k^2 - 6k + 2}{6} \Delta^3 f_0 + \right]$$

$$+ \frac{2k^3 - 9k^2 + 11k - 3}{6} \Delta^4 f_0 + \dots \Bigg]$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1} \left[-6 - \frac{1}{2}(30) + \frac{1}{3}(156) - \frac{1}{4}(120) \right] =$$

$$= (-6 - 15 + 52 - 30) = 1$$

Ahora bien puede considerarse otro método, este es, en vez de las diferencias usar la fórmula que usa las funciones, ver Tabla A.1.

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{1}{4} f_4 + \frac{4}{3} f_3 - 3f_2 + 4f_1 - \frac{25}{12} f_0 \right) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{1} \left[-\frac{1}{4}(950) + \frac{4}{3}(278) - 3(68) + 4(44) - \frac{25}{12}(50) \right]$$

$$= \frac{1}{1} (-237,5 + 370,67 - 204 + 176 - 104,17) = 1$$

Aquí se confirma que por ambos lados se obtiene la misma respuesta. Para evaluar la segunda derivada se emplea la fórmula 32 pero ampliada al cuarto orden de aproximación, así:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\Delta^2 f_0 + (k-1) \Delta^3 f_0 + \frac{6k^2 - 18k + 11}{12} \Delta^4 f_0 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{1^2} \left[30 - 156 + \frac{11}{12}(120) \right] = -16$$

Según tabla A.1 la segunda derivada de cuarto orden de aproximación, es:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{11}{12} f_4 - \frac{14}{3} f_3 + \frac{19}{2} f_2 - \frac{26}{3} f_1 + \frac{35}{12} f_0 \right) \quad (35)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{1^2} \left[\frac{11}{12} (950) - \frac{14}{3} (278) + \frac{19}{2} (68) - \frac{26}{3} (44) + \frac{35}{12} (50) \right]$$

$$= (870,83 - 1297,33 + 646 - 381,33 + 145,83) = -16$$

Evaluación de las derivadas a $x = 2,0$

k	x	f(x _i)	Δf	Δ ² f	Δ ³ f	Δ ⁴ f
-2	0,0	f ₋₂ = 50				
			Δf ₋₂ = -6			
-1	1,0	f ₋₁ = 44		Δ ² f ₋₂ = 30		
			Δf ₋₁ = 24		Δ ³ f ₋₂ = 156	
0	2,0	f ₀ = 68		Δ ² f ₋₁ = 186		Δ ⁴ f ₋₂ = 120
			Δf ₀ = 210		Δ ³ f ₋₁ = 276	
1	3,0	f ₁ = 278		Δ ² f ₀ = 462		Δ ⁴ f ₋₁ = 120
			Δf ₁ = 672		Δ ³ f ₀ = 396	
2	4,0	f ₂ = 950		Δ ² f ₁ = 858		Δ ⁴ f ₀ = 120
			Δf ₂ = 1530		Δ ³ f ₁ = 516	
3	5,0	f ₃ = 2480		Δ ² f ₂ = 1374		Δ ⁴ f ₁ = 120
			Δf ₃ = 2904		Δ ³ f ₂ = 636	
4	6,0	f ₄ = 5384		Δ ² f ₃ = 2010		Δ ⁴ f ₂ = 120
			Δf ₄ = 4914		Δ ³ f ₃ = 756	
5	7,0	f ₅ = 10298		Δ ² f ₄ = 2766		Δ ⁴ f ₃ = 120
			Δf ₅ = 7680		Δ ³ f ₄ = 876	
6	8,0	f ₆ = 17978		Δ ² f ₅ = 3642		
			Δf ₆ = 11322			
7	9,0	f ₇ = 29300				

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1} \left[210 - \frac{1}{2} (462) + \frac{1}{3} (396 - \frac{1}{4} (120)) \right] = 81$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{1^2} \left[462 - 396 + \frac{11}{12} (120) \right] = 176$$

4.3. DERIVADAS BASADAS EN LA FORMULA DE STIRLING

Cuando se tiene una situación simétrica de los datos, la fórmula de Stirling se muestra como una de las más útiles.

$$f(X_k) = f_0 + k \mu \delta f_0 + \frac{k^2}{2} \delta^2 f_0 + \frac{k^3 - k}{6} \mu \delta^3 f_0 + \frac{k^4 - k^2}{4!} \delta^4 f_0 + \dots$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dk} \cdot \frac{dk}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left[\mu \delta f_0 + k \delta^2 f_0 + \frac{3k^2 - 1}{6} \mu \delta^3 f_0 + \frac{2k^3 - k}{12} \delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (36)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[\mu \delta f_0 - \frac{1}{6} \mu \delta^3 f_0 \right]$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} (\delta f_{-1/2} + \delta f_{1/2}) - \frac{1}{12} (\delta^3 f_{-1/2} + \delta^3 f_{1/2}) \right] \quad (37)$$

Es tarea del lector por transformaciones llegar a demostrar que:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{f_2}{12} + \frac{2}{3} f_1 - \frac{2}{3} f_{-1} + \frac{f_{-2}}{12} \right] \quad (38)$$

La fórmula anterior nos respresenta la primera derivada de cuarto orden de aproximación evaluada en $k = 0$ usando la fórmula de interpolación de Stirling.

Ahora bien la primera derivada de tercer orden de aproximación evaluada en $k = 0$ daría exactamente el mismo resultado que el de la cuarta aproximación, y si observamos la ecuación 38 nos damos cuenta que para obtener la derivada de cuarto orden en vez de requerir 5 puntos tan sólo se requieren 4, lo cual da una gran ventaja al método de Stirling.

¿Qué pasa con la primera derivada de segundo y primer orden de aproximación?

Partiendo de la ecuación 36 y reteniendo los términos hasta de segundo orden, se tiene que:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left[\mu \delta f_0 + k \delta^2 f_0 \right]$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=0} = \frac{1}{\Delta x} (\mu \delta f_0) = \frac{1}{2\Delta x} (\delta f_{-1/2} + \delta f_{1/2})$$

$$= \frac{1}{2\Delta x} (f_0 - f_{-1} + f_1 - f_0) = \frac{1}{2\Delta x} (f_1 - f_{-1})$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=0} = \frac{1}{2\Delta x} (f_1 - f_{-1}) \quad (39)$$

La fórmula anterior demuestra que para la primera derivada de segundo orden de aproximación evaluada en $k = 0$ necesita solamente de dos puntos en vez de tres tal como lo necesitaría cualquiera otra fórmula, esta es quizás una de las mayores ventajas del método de Stirling al momento de considerar una diferenciación o integración. En conclusión se puede decir que:

- Que en el método de Stirling la primera derivada de primer y segundo orden de aproximación son iguales, que la de cuarto y tercer orden también son iguales.
- Que a diferencias de los demás métodos para obtener derivadas, requiere un número de puntos igual al orden que aproxima.

4.4. EJEMPLO DE APLICACION DE LA DIFERENCIACION NUMERICA

Vamos a definir primero algunas funciones matemáticas que son necesarias para entender el problema, así:

Función corriente = ψ . Se basa en el principio de continuidad, y es una expresión matemática que describe el flujo. En la Figura 2, que a continuación se expone se presentan dos líneas de corriente adyacentes en un campo de flujo bidimensional. Desde que no existe flujo a través de líneas de corriente, podemos permitir que $\psi(x, y)$ sea representativa del caudal que pasa por el área comprendida entre el origen y la primera línea de corriente ψ . Supongamos que $\psi = 10 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ y que la siguiente línea de corriente sea $\psi + d\psi = 11 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, luego entonces $d\psi = 1 \text{ m}^3/\text{seg}/\text{m}$ y representará el flujo que pasa entre las dos líneas de corriente.

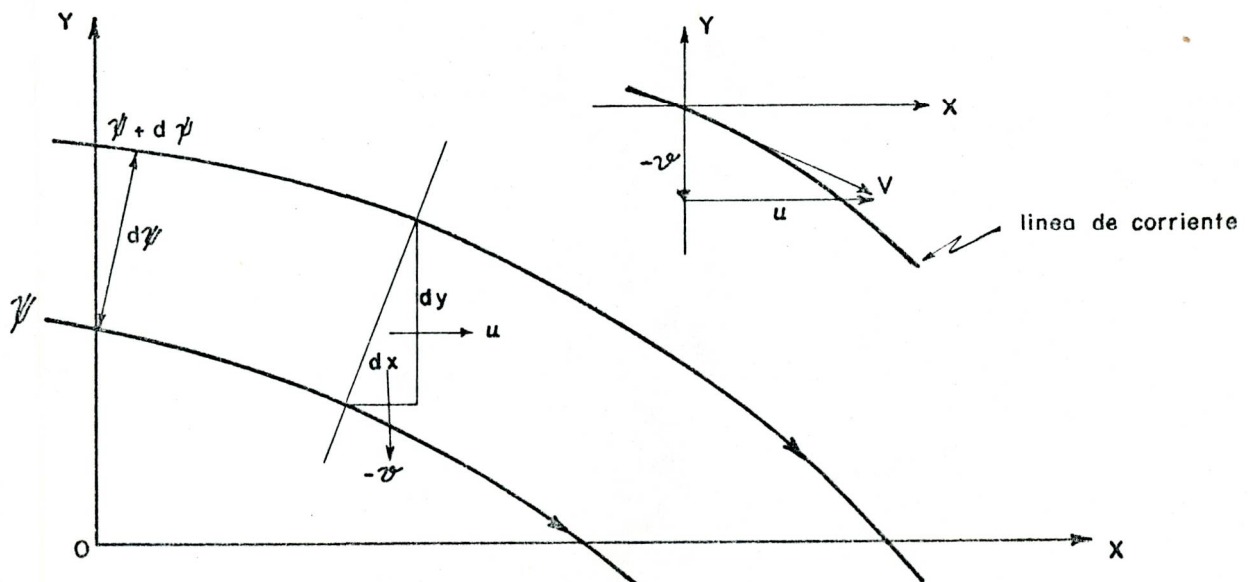


Figura 2. Función Corriente

Es condición y requerimiento que la *continuidad* sea satisfecha para que la "*función corriente exista*".

Bajo la condición anterior tenemos que:

$$d\psi = udy - vdx \quad (\text{Ecuación de continuidad}) \quad (40)$$

Si $\psi = f(x, y)$, entonces:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \dots d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \quad (41)$$

Comparando las ecuaciones 40 y 41 podemos concluir que:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (42)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (43)$$

Por otro lado, vamos a definir la función potencial ϕ como una cantidad escalar función de x, y , de tal suerte que cuando la diferenciamos con respecto a una distancia en una dirección particular nos da la velocidad en esa dirección.

$$\vec{V} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \vec{j} = u\vec{i} + v\vec{j} \quad (44)$$

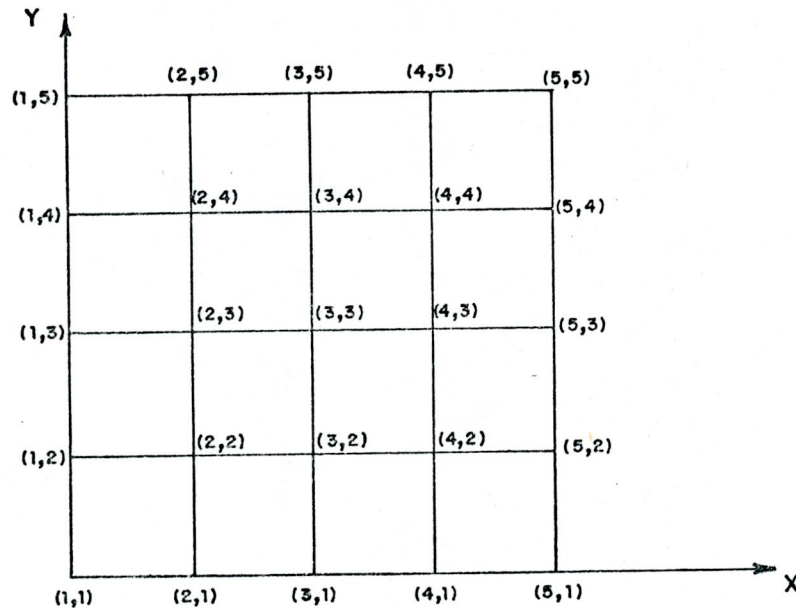
en donde el vector operador se define como: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

Comparando la ecuación 44 con la 42 y 43, concluimos que:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \text{velocidad en la dirección } x$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \text{velocidad en la dirección } y$$

Vamos a suponer para ilustración del ejemplo que la función potencial ϕ es conocida en cada uno de los puntos de la malla siguiente en el plano $x - y$.



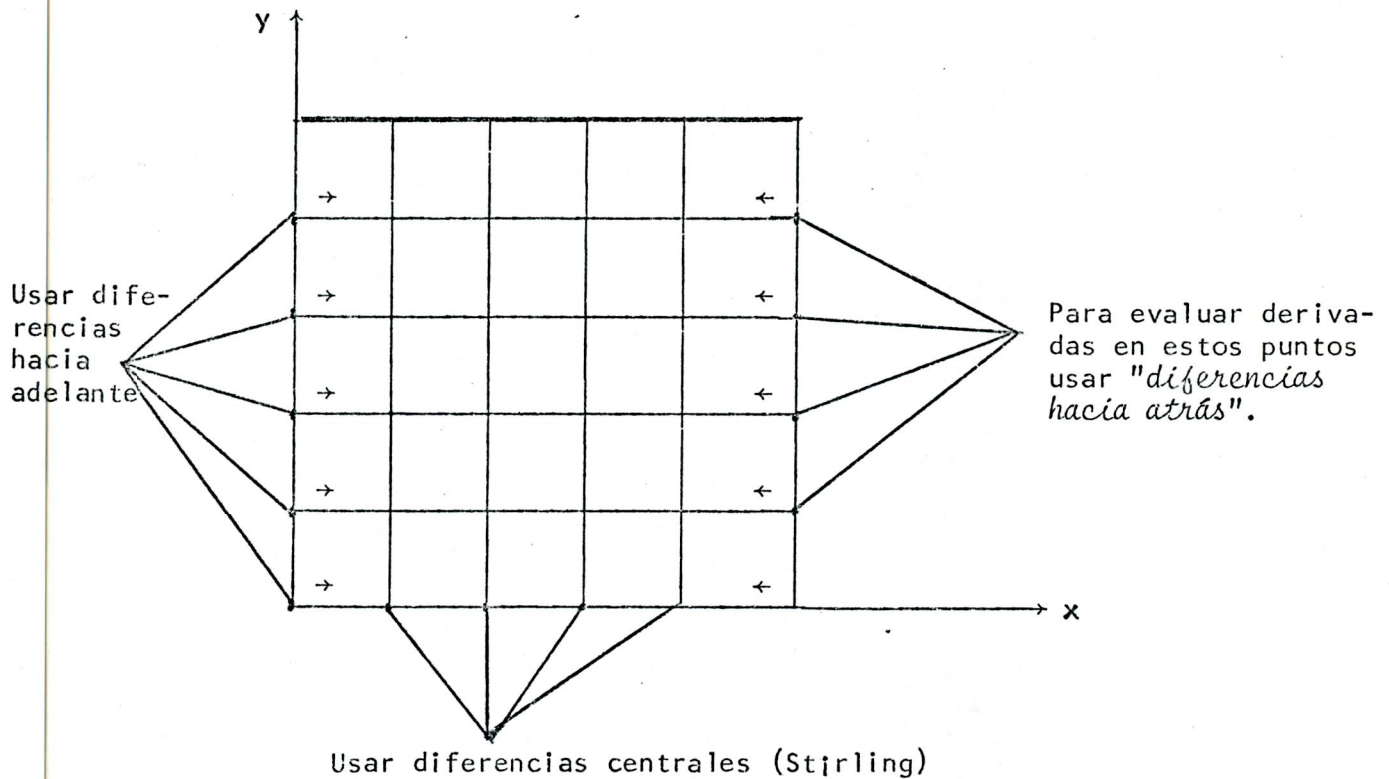
Nosotros queremos evaluar u en $(2,1)$. Haciendo una analogía con todo lo antes explicado lo que realmente tenemos es el valor de la función en cada intersección; luego entonces el camino mejor para hacer esta diferenciación es utilizar aquellas fórmulas que están dadas en base a la función misma. En este caso se requiere determinar la derivada en la coordenada $(2,1)$, el método de Stirling sería el más conveniente ya que con los dos puntos adyacentes $(1,1)$ y $(3,1)$ podríamos obtener la primera derivada con un segundo orden de aproximación.

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=0} = \frac{1}{2\Delta x} (f_1 - f_{-1})$$

$$u_{2,1} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_y = \frac{1}{2\Delta x} (\phi_{3,1} - \phi_{1,1})$$

Aquí la derivada parcial se evalúa en el sentido de las x o sea manteniendo y constante.

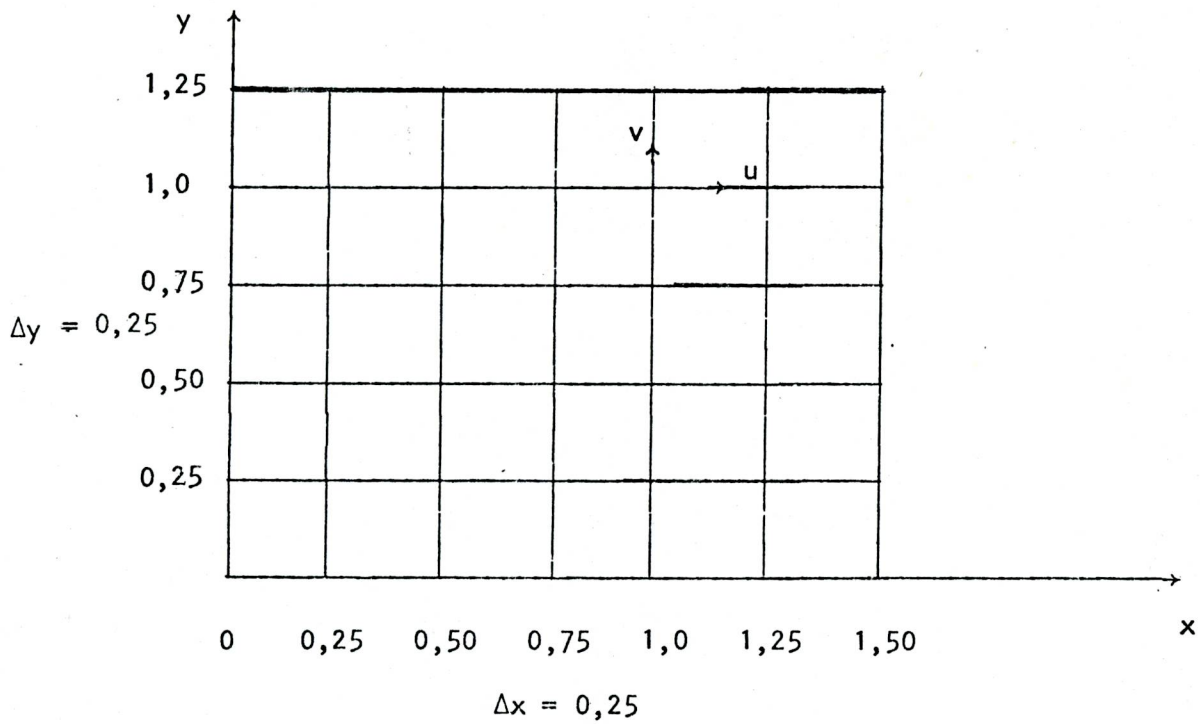
Si queremos evaluar la derivada en $(1,1)$ lo más aconsejable sería utilizar diferencias hacia adelante y si la queremos en $(5,1)$ posiblemente utilizaríamos las diferencias hacia atrás, todo lo anterior expresado gráficamente para una mejor visualización se muestra seguidamente:



Las derivadas se evalúan en la dirección de los ejes x ó y , esto es manteniendo y o x constantes respectivamente.

EJEMPLO:

Valores de la función potencial son dadas en la malla y tabla siguiente.
Determine usted $u(1,1)$; $v(1,1)$.

TABLA 1. VALORES DE LA FUNCION POTENCIAL (ϕ)

y	x						
	0	0,25	0,50	0,75	1,0	1,25	1,50
0	0	0,003125	0,025	0,0844	0,200	0,391	0,675
0,25	0,50	0,494	0,506	0,556	0,6625	0,844	1,119
0,50	1,0	0,966	0,950	0,972	1,05	1,204	1,450
0,75	1,5	1,419	1,356	1,331	1,363	1,469	1,669
1,00	2,0	1,853	1,725	1,634	1,600	1,641	1,775
1,25	2,5	2,269	2,056	1,881	1,763	1,719	1,769

Diferencia Central en $k = 0$

$$\begin{aligned}
 u(1,1) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_y \Bigg|_{k=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{2}{3} (f_1 - f_{-1}) - \frac{1}{12} (f_2 - f_{-2}) \right] \\
 &= \frac{1}{0,25} \left[\frac{2}{3} (1,641 - 1,634) - \frac{1}{12} (1,775 - 1,725) \right] = \\
 &= 0,002
 \end{aligned}$$

Diferencias hacia atrás en $k = 0$

$$\begin{aligned}
 v(1,1) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_x \Bigg|_{k=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{11}{6} f_0 - 3f_{-1} + \frac{3}{2} f_{-2} - \frac{1}{3} f_{-3} \right] \\
 &= \frac{1}{0,25} \left[\frac{11}{6} (1,600) - 3 (1,363) + \frac{3}{2} (1,05) - \frac{1}{3} (0,6625) \right] = 0,7948
 \end{aligned}$$

Otra solución sería evaluar esta derivada en $K = -1$, tal como sigue:

$$\begin{aligned}
 v(1,1) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_x \Bigg|_{k=-1} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{3} f_0 + \frac{1}{2} f_{-1} - f_2 + \frac{1}{6} f_{-3} \right] \\
 &= \frac{1}{0,25} \left[\frac{1}{3} (1,763) + \frac{1}{2} (1,600) - 1,363 + \frac{1}{6} (1,050) \right] \\
 &= 0,7986
 \end{aligned}$$

V. INTEGRACION NUMERICA

La integración numérica se usa frecuentemente en Ingeniería y en las ciencias físicas. Para obtener una solución completa a los problemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales es necesario obtener aproximaciones a las integrales de la misma manera que es necesario obtener aproximaciones de las derivadas tal como vimos en los capítulos anteriores.

La integración numérica es menos sensible que la diferenciación numérica, este concepto se ilustrará seguidamente. Supongamos que tenemos dos curvas (a) y (b) y que vamos a obtener sus derivadas, y el área comprendida debajo de ellas a través de una integración numérica.

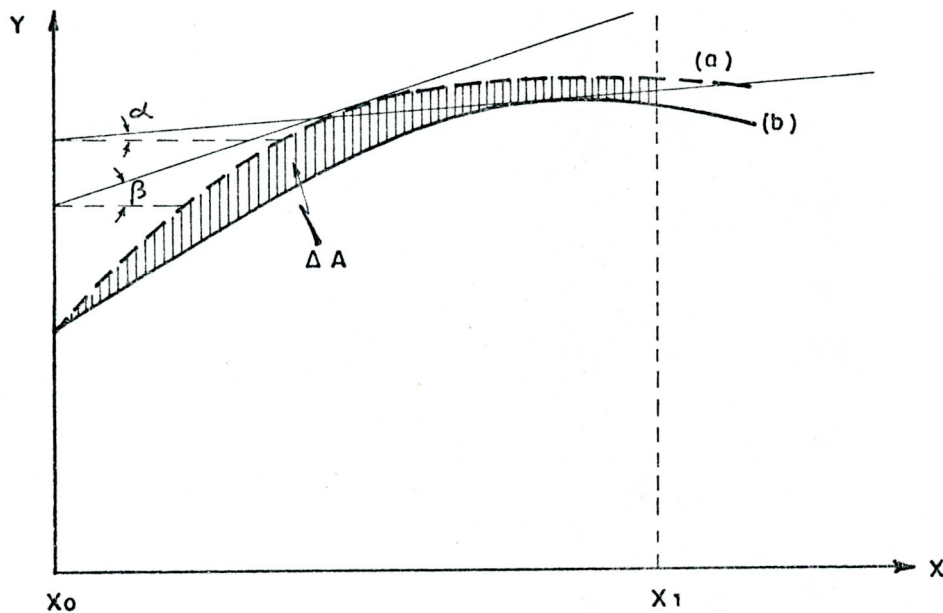


Figura 3. Relación entre diferenciación e integración numérica

Como ustedes pueden observar la diferencia entre las dos tangentes ($\text{tg}\alpha$ y $\text{tg}\beta$) relativamente es mucho mayor que la diferencia entre las áreas (ΔA) debajo de las curvas a y b.

La integración numérica puede basarse en una cualquiera de las fórmulas de interpolación discutidas anteriormente.

El procedimiento de integración se ilustra en la Figura 4, en la cual el área rayada corresponde a la integración de la función $f(x)$ a través del polinomio aproximante $p(x)$ entre los intervalos apropiados.

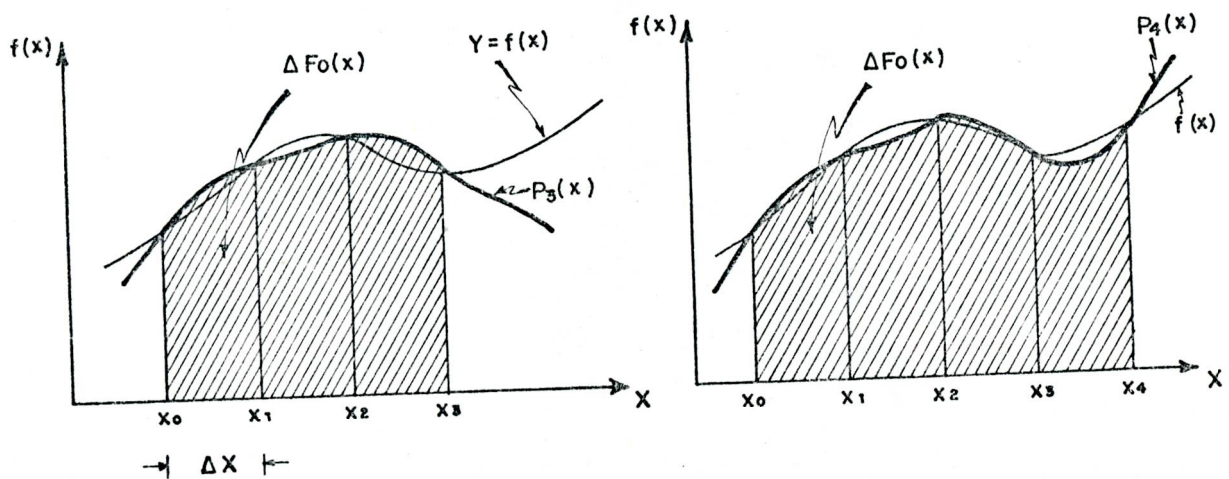


Figura 4. Aproximación de una función $f(x)$ por polinomios interpolantes de tercer y cuarto orden respectivamente.

$$\Delta F_0(x) = \int_x^{x + \Delta x} f(x) dx = \Delta x \int_k^{k+1} f(x_k) dk, \quad (45)$$

En la ecuación 45 hemos reemplazado dx por su valor dado por la ecuación 46.

$$k = \frac{x - x_0}{\Delta x} \implies \frac{dk}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \implies dx = dk \cdot \Delta x \quad (46)$$

k	x	$f(x)$
k	x_k	$f(x_k)$
$k + 1$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
.	.	.
.	.	.

En las fórmulas anteriores se ha expuesto el procedimiento para encontrar el área $\Delta F_0(x)$ o lo que es lo mismo la integral de la función entre los límites x y $x + \Delta x$; esta integral se puede expresar también en función de un polinomio interpolante o aproximante $f(x_k)$.

En la ecuación 45, si utilizamos la fórmula de interpolación de Gregory-Newton y evaluamos la integral en $k = 0$, se obtiene la siguiente respuesta:

$$\Delta F_0(x) = \Delta x \int_0^1 f(x_k) dk = \Delta x \int_0^1 \left[f_0 + k \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots \right] dk$$

$$= \Delta x \int_0^1 \left[f_0 + k\Delta f_0 + \left(\frac{k^2 - k}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{k^3 - 3k^2 + 2k}{6}\right)\Delta^3 f_0 + \dots \right] dk$$

$$= \Delta x \left[f_0 k + \frac{k^2}{2} \Delta f_0 + \left(\frac{\frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2}}{2}\right) \Delta^2 f_0 + \left(\frac{\frac{k^4}{4} - \frac{3k^3}{3} + \frac{2k^2}{2}}{6}\right) \Delta^3 f_0 + \dots \right]_0^1$$

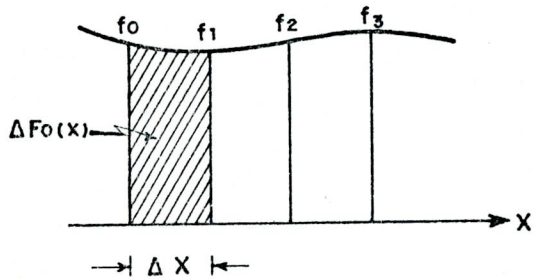
$$\Delta F_0(x) = \Delta x \left[f_0 + \frac{1}{2} \Delta f_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 f_0 + \dots \right] \quad (47)$$

La integral total se obtiene como la sumatoria de los $\Delta F_0(x)$; $F(x) = \Sigma \Delta F(x)$

Particularmente para usar en un programa de computación es muy útil tener las fórmulas de integración en función de los valores originales de la función tal como se hace para la diferenciación. Substitución de los valores apropiados en lugar de las diferencias resultan en las siguientes fórmulas basadas en diferentes ordenes de aproximación. El pequeño dibujo adyacente a la fórmula ilustra el polinomio usado en llevar a cabo la integración y el intervalo de integración.

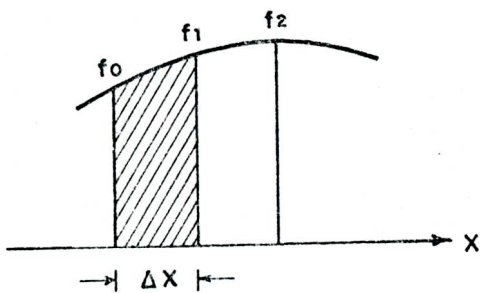
5.1. FORMULAS DE INTEGRACION BASADAS EN LA FORMULA DE INTERPOLACION DE GREGORY-NEWTON.

Incluyendo Terceras diferencias (Tercer orden de Aproximación)



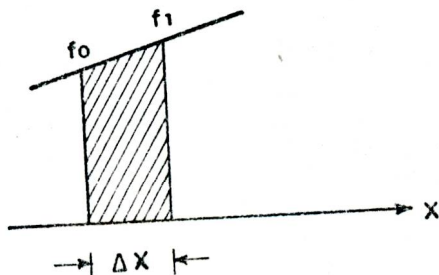
$$\Delta F_o(x) = \Delta x \left[\frac{3}{8} f_0 + \frac{19}{24} f_1 - \frac{5}{24} f_2 + \frac{1}{24} f_3 \right] \quad (48)$$

Incluyendo Segundas Diferencias (Segundo orden de Aproximación)



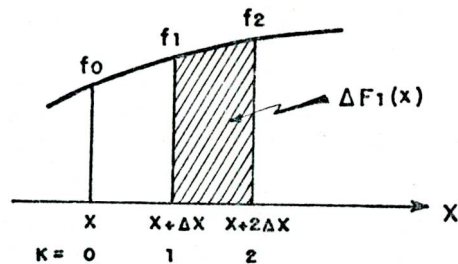
$$\Delta F_o(x) = \Delta x \left[\frac{5}{12} f_0 + \frac{2}{3} f_1 - \frac{1}{12} f_2 \right] \quad (49)$$

Incluyendo Primeras Diferencias (Aproximación lineal)



$$\Delta F_o(x) = \frac{\Delta x}{2} (f_0 + f_1) \quad (50)$$

Una fórmula que sirve para evaluar un intervalo simple de integración pero el cual integra el segundo intervalo del polinomio usado en ajustar los datos, se obtiene integrando la fórmula de interpolación de Newton desde $k = 1$ como límite inferior hasta $k = 2$ como límite superior.

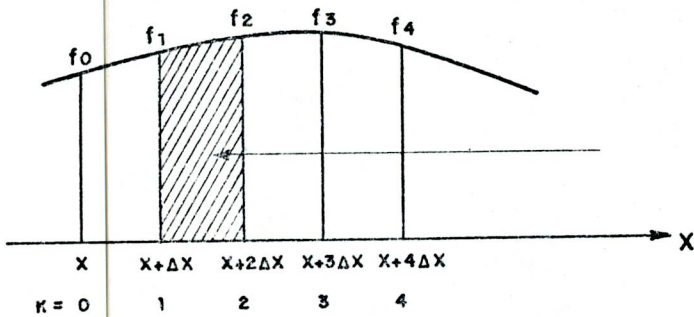


$$\begin{aligned}
 \Delta F_1(x) &= \int_{x+\Delta x}^{x+2\Delta x} f(x) dx = \Delta x \int_1^2 f(x_k) dk = \Delta x \int_1^2 \left(f_0 + k\Delta f_0 + \frac{k^2-k}{2} \Delta^2 f_0 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k^3-3k^2+2k}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{k^4-6k^3+11k^2-6k}{24} \Delta^4 f_0 + \dots \right) dk \\
 &= \Delta x \left[k f_0 + \frac{k^2}{2} \Delta f_0 + \left(\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4} \right) \Delta^2 f_0 + \left(\frac{k^4}{24} - \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{6} \right) \Delta^3 f_0 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{k^5}{120} - \frac{k^4}{16} + \frac{11}{72} k^3 - \frac{k^2}{8} \right) \Delta^4 f_0 \right]_1^2 \\
 &= \Delta x \left[f_0 + \frac{3}{2} \Delta f_0 + \frac{5}{12} \Delta^2 f_0 - \frac{1}{24} \Delta^3 f_0 + \frac{33}{2160} \Delta^4 f_0 \right] \quad (51)
 \end{aligned}$$

Cuando se procede a expresarlas en términos de los valores originales de la función se obtienen las siguientes fórmulas, así:

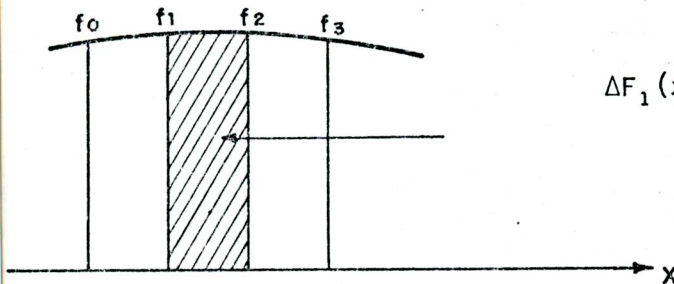
5.2. SEGUNDO INTERVALO DE INTEGRACION (GREGORY-NEWTON).

Incluyendo cuartas (4^o) diferencias (Cuarto orden de Aproximación)



$$\Delta F_1(x) = \Delta x \left[-\frac{57}{2160} f_0 + \frac{519}{1080} f_1 + \frac{171}{270} f_2 - \frac{111}{1080} f_3 + \frac{33}{2160} f_4 \right] \quad (52)$$

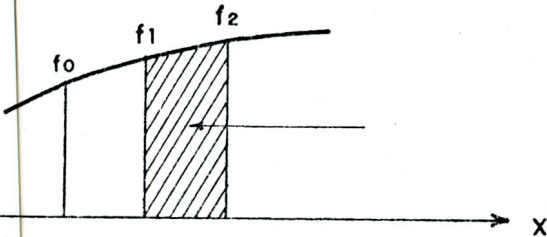
Incluyendo terceras (3a) diferencias (Tercer orden de aproximación)



$$\Delta F_1(x) = \Delta x \left[-\frac{f_0}{24} + \frac{13}{24} f_1 + \frac{13}{24} f_2 - \frac{f_3}{24} \right] \quad (53)$$

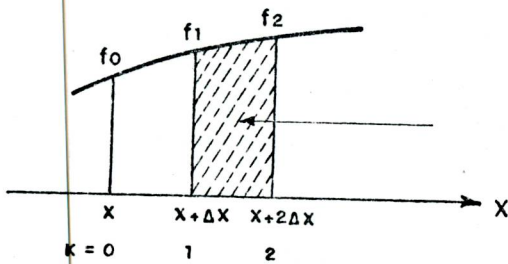
Esta fórmula se obtendrá más adelante empleando la fórmula de interpolación de Bessel.

Incluyendo (2^a) Segundas Diferencias (Segundo orden de Aproximación)



$$\Delta F_1(x) = \Delta x \left[-\frac{f_0}{12} + \frac{2}{3} f_1 + \frac{5}{12} f_2 \right] \quad (54)$$

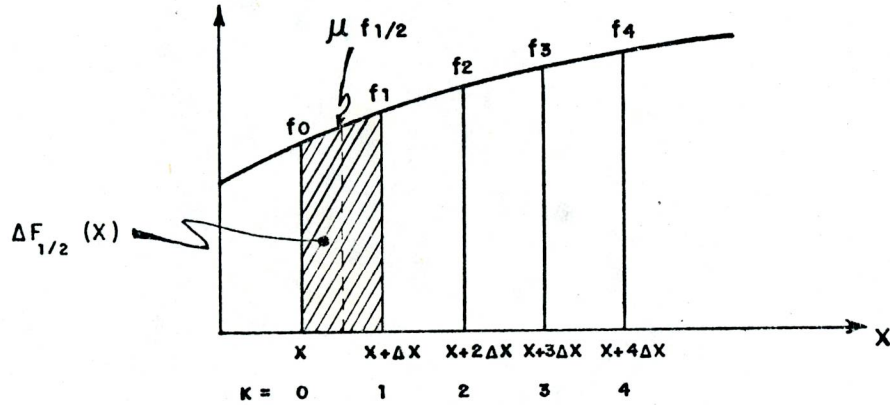
Incluyendo Primeras Diferencias (Una fórmula de extrapolación)



$$\Delta F_1(x) = \Delta x \left[\frac{3}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_0 \right] \quad (55)$$

5.3. FORMULAS DE INTEGRACION BASADAS EN LA FORMULA DE INTERPOLACION DE BESSEL

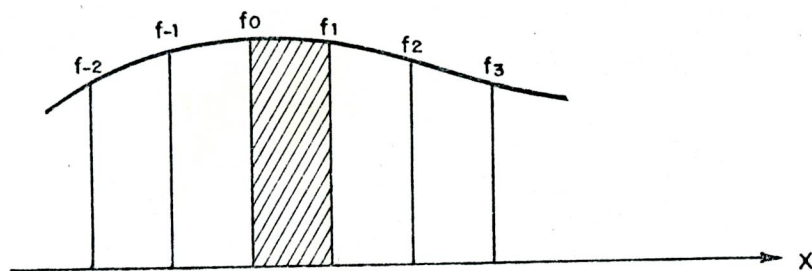
La fórmula de interpolación de Bessel es ideal para el desarrollo de fórmulas de integración las cuales se centran entre datos dados en vez de centrarse en ellos mismos. Integrando la fórmula de Bessel sobre un solo intervalo Δx nos lleva a:



$$\begin{aligned}
 \Delta F_{1/2}(x) &= \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx = \Delta x \int_0^1 f(x_k) dk = \Delta x \int_0^1 \left[\mu f_{1/2} + (k - 1/2) \delta f_{1/2} + \left(\frac{k^2 - k}{2} \right) \mu \delta^2 f_{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{12} (2k^3 - 3k^2 + k) \delta^3 f_{1/2} + \frac{1}{24} (k^4 - 2k^3 - k^2 + 2k) \mu \delta^4 f_{1/2} \right] dk \\
 &= \Delta x \left[\mu f_{1/2} + \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \right) \delta f_{1/2} + \left(\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4} \right) \mu \delta^2 f_{1/2} + \left(\frac{k^4}{24} - \frac{k^3}{12} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{k^2}{24} \right) \delta^3 f_{1/2} + \left(\frac{k^5}{120} - \frac{k^4}{48} - \frac{k^3}{72} + \frac{k^2}{24} \right) \mu \delta^4 f_{1/2} \right]_0^1 = \Delta x \left[\mu f_{1/2} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{12} \mu \delta^2 f_{1/2} + \frac{11}{720} \mu \delta^4 f_{1/2} + \dots \right] \quad (56)
 \end{aligned}$$

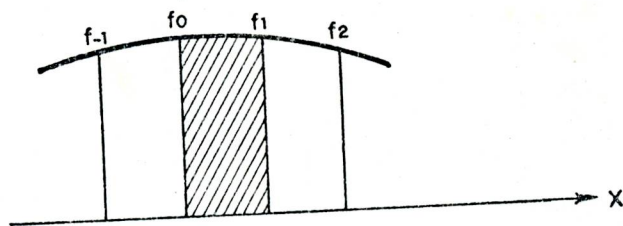
Cuando las diferencias son reemplazadas por los valores de la función, las siguientes ecuaciones resultan dependiendo del grado de aproximación usado, así:

Incluyendo cuartas (o quintas diferencias). Quinto orden de Aproximación



$$\Delta F_{1/2}(x) = \Delta x \left[\frac{11}{1440} (f_{-2} + f_3) - \frac{31}{480} (f_{-1} + f_2) + \frac{401}{720} (f_0 + f_1) \right] \quad (57)$$

Incluyendo terceras diferencias. Tercer Orden de Aproximación. Conocida también como fórmula de integración de Stirling



$$\Delta f_{1/2}(x) = \Delta x \left[\frac{13}{24} (f_0 + f_1) - \frac{1}{24} (f_{-1} + f_2) \right] \quad (58)$$

Incluyendo Primeras Diferencias (Primer orden de Aproximación)

$$\Delta F_{1/2}(x) = \frac{\Delta x}{2} (f_0 + f_1) \quad (59)$$

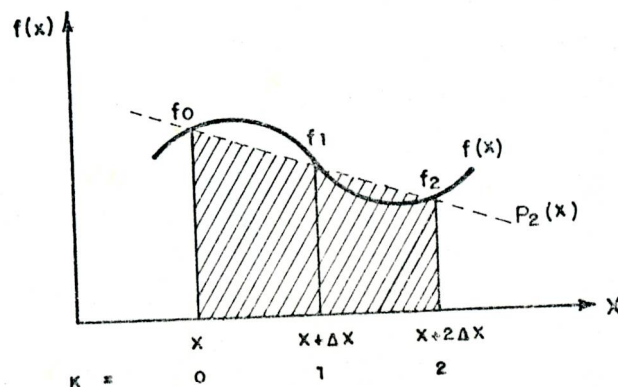
COMENTARIOS

Todas las fórmulas de integración dadas anteriormente proveen el valor de la integral de $f(x)$ sobre un solo intervalo Δx . Fórmulas de integración que incluyan dos intervalos o más pueden obtenerse de una forma similar, la única diferencia es que el intervalo de integración va desde $k = 0$ a $k = 2$, ó $k = -1$ a $k = 1$, etc, dependiendo de la fórmula de interpolación a usar. La fórmula de interpolación de Stirling es ideal para efectuar integraciones de doble intervalo ya que se tiene información de ambos lados de aquella entrada donde se centrará la integración.

5.4. FORMULAS DE INTEGRACION TRAPEZOIDAL Y DE SIMPSON.

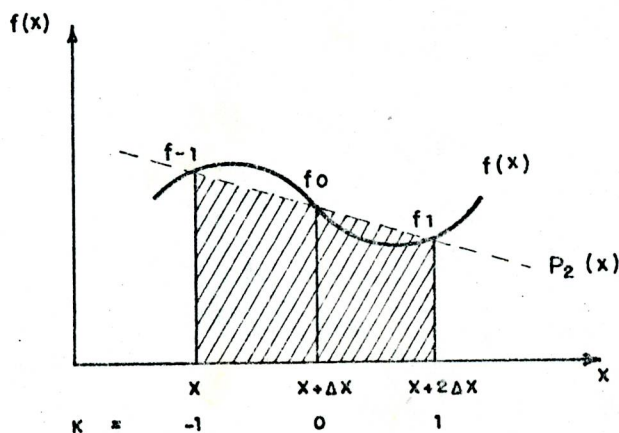
Estas fórmulas o reglas no son más que simplificaciones de las ya anteriormente descritas; así, las fórmulas 50 y 59 es simple y llanamente la fórmula de integración trapezoidal. Vamos a obtener la regla de integración de Simpson usando los siguientes procedimientos:

5.4.1. NEWTON HACIA ADELANTE INTEGRANDO EN DOBLE INTERVALO



$$\begin{aligned}
\int_x^{x+2\Delta x} f(x) dx &= \Delta x \int_0^2 f(x_k) dk = \int_0^2 (f_0 + k\Delta f_0 + \left(\frac{k^2 - k}{2}\right)\Delta^2 f_0) dk \\
&= \Delta x \left[f_0 k + \frac{k^2}{2} \Delta f_0 + \left(\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4}\right) \Delta^2 f_0 \right]_0^2 = 2f_0 + 2\Delta f_0 + \left(\frac{8}{6} - \frac{4}{4}\right) \Delta^2 f_0 \\
&= \Delta x \left[2f_0 + 2(f_1 - f_0) + \left(\frac{32 - 24}{24}\right) (\Delta f_1 - \Delta f_0) \right] \\
&= \Delta x \left\{ 2f_0 + 2f_1 - 2f_0 + \frac{1}{3} \left[(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) \right] \right\} = \Delta x \left[2f_1 + \frac{1}{3}(f_2 - f_1 - f_1 + f_0) \right] \\
&= \Delta x \left[2f_1 + \frac{f_2}{3} - \frac{2f_1}{3} + \frac{f_0}{3} \right] = \Delta x \left[\frac{f_0}{3} + \frac{4f_1}{3} + \frac{f_2}{3} \right] \\
&= \frac{\Delta x}{3} \left[f_0 + 4f_1 + f_2 \right] \tag{60}
\end{aligned}$$

5.4.2. USO DE STIRLING



$$\begin{aligned}
\int_x^{x+2\Delta x} f(x) dx &= \Delta x \int_{-1}^1 f(x_k) dk = \int_{-1}^1 (f_0 + k\mu\delta f_0 + \frac{k^2}{2} \delta^2 f_0) dk = \Delta x \left[f_0 k + \frac{k^2}{2} \right. \\
&\quad \left. \mu\delta f_0 + \frac{k^3}{6} \delta^2 f_0 \right]_{-1}^1 = \Delta x \left\{ f_0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (\delta f_{-1/2} + \delta f_{1/2}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \delta^2 f_0 - \left[-f_0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (\delta f_{-1/2} + \delta f_{1/2}) - \frac{1}{6} \delta^2 f_0 \right] \right\} \\
&= \Delta x \left[f_0 + \frac{1}{4} \delta f_{-1/2} + \frac{1}{4} \delta f_{1/2} + \frac{1}{6} \delta^2 f_0 + f_0 - \frac{1}{4} \delta f_{-1/2} - \frac{1}{4} \delta f_{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \delta^2 f_0 \right] = \Delta x \left[2f_0 + \frac{1}{3} \delta^2 f_0 \right] = \Delta x \left[2f_0 + \frac{1}{3} (\delta f_{1/2} - \delta f_{-1/2}) \right] \\
&= \Delta x \left[2f_0 + \frac{1}{3} (f_1 - f_0) - \frac{1}{3} (f_0 - f_{-1}) \right] = \Delta x \left[2f_0 + \frac{1}{3} f_1 - \frac{1}{3} f_0 - \frac{1}{3} f_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} f_{-1} \right] = \Delta x \left[\frac{1}{3} f_{-1} + \frac{4}{3} f_0 + \frac{1}{3} f_1 \right] \\
&= \frac{\Delta x}{3} \left[f_{-1} + 4f_0 + f_1 \right] \tag{61}
\end{aligned}$$

Como se puede observar las dos respuestas coinciden.

5.5. ALGUNAS REGLAS APLICADAS A LA DIFERENCIACION Y A LA INTEGRACION PARA AUMENTAR EFICIENCIAS EN LOS CALCULOS.

- Para evaluar una derivada en el borde de una malla dependiendo del sentido de la diferenciación puede utilizar Newton hacia adelante o hacia atrás centrando la derivación en $k = 0$. En un punto interior de la misma malla la derivada puede evaluarse centrándola en $k = 1$ ó $k = -1$ según use Newton hacia adelante o hacia atrás respectivamente; y la fórmula de Stirling es una de las más convenientes para este mismo caso, esto es para evaluar puntos interiores.
- Si usted toma las fórmulas que dan las derivadas por el método de Newton hacia adelante y multiplica las funciones y los coeficientes por (-1) , obtiene inmediatamente las derivadas por el método de Newton hacia atrás, así como ejemplo tenemos:

Newton Primera derivada tercer orden de Aproximación

Hacia adelante

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{3} f_3 - \frac{3}{2} f_2 + 3f_1 - \frac{11}{6} f_0 \right]$$

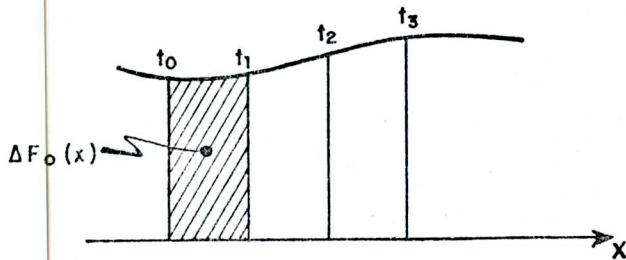
Hacia atrás:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{k=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{1}{3} f_{-3} + \frac{3}{2} f_{-2} - 3f_{-1} + \frac{11}{6} f_0 \right]$$

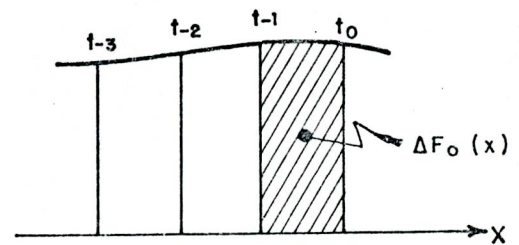
- Si en la fórmula de integración basada en Newton hacia adelante se cambian los signos de los subíndices de la función, se obtiene la fórmula de integración por Newton hacia atrás; así:

Fórmula de Integración de Newton incluyendo terceras diferencias

a) Hacia adelante



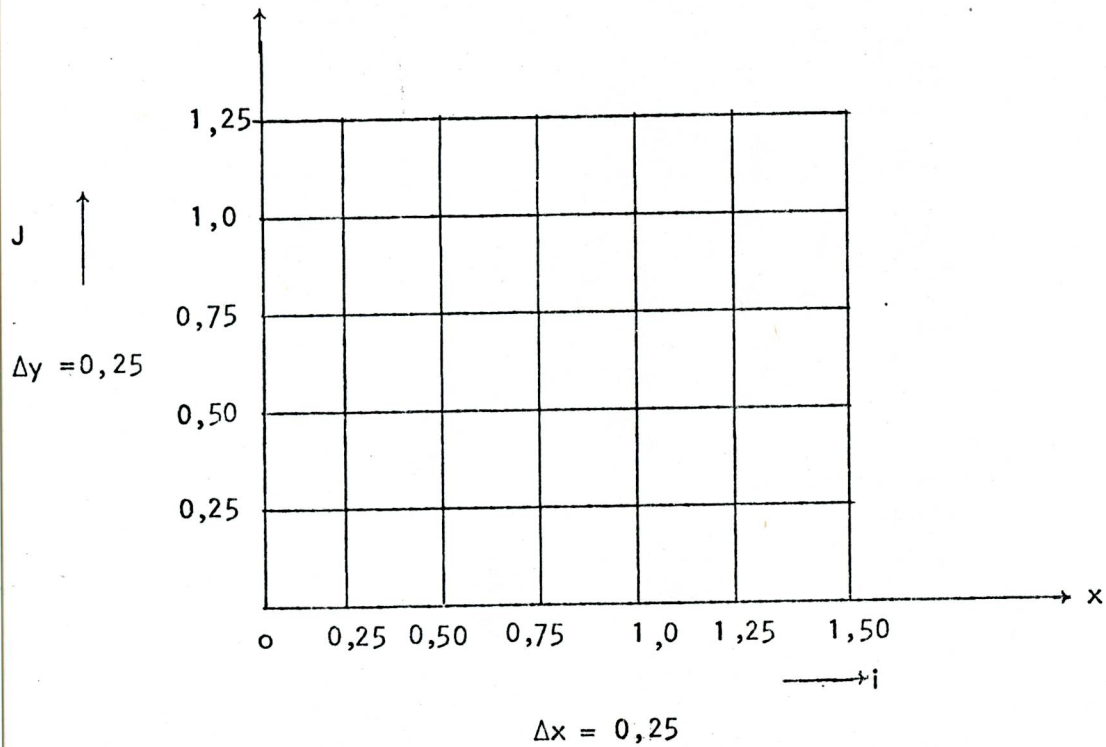
b) Hacia atrás



$$\Delta F_0(x) = \Delta x \left[\frac{3}{8} f_0 + \frac{19}{24} f_1 - \frac{5}{24} f_2 + \frac{1}{24} f_3 \right]; \quad \Delta F_0(x) = \Delta x \left[\frac{3}{8} f_0 + \frac{19}{24} f_{-1} - \frac{5}{24} f_{-2} + \frac{1}{24} f_{-3} \right]$$

5.6. EJEMPLO APLICADO DE INTEGRACION NUMERICA

Continuando con el mismo ejemplo expuesto en la diferenciación se pide calcular los valores de ψ en cada punto de la malla ($y = 0,25, 0,50, 0,75, 1,0$ y $1,25$) a lo largo de la línea $x = 1,0$ si $\psi(1,0) = 0$



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x \implies \psi = \int_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_y dy + C_1 \quad (62)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_x = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y \implies \psi = \int_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_x dx + C_2 \quad (63)$$

C_1 , C_2 Son constantes de integración. Si identificamos la variable x con el índice i y la variable y con el índice J , podemos escribir que:

$$\psi_{j+1} = \int_J^{j+1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_y dy + \psi_j \quad (64)$$

$$\psi_{i+1} = \int_i^{i+1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_x dx + \psi_i \quad (65)$$

Como el problema pide evaluar las integrales a lo largo de $x = 1,0$, significa que las x ó i permanecen constantes, y lógicamente varían las y o lo que es lo mismo las J ; de acuerdo con lo anterior debemos aplicar la fórmula (64).

5.6.1. PROCEDIMIENTO PARA LA SOLUCION DEL EJEMPLO.

- 1) Evaluación de la derivada $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_y$ en cada punto que necesitamos. De acuerdo con el enunciado del problema hay que evaluar la derivada anterior a diferentes valores de y , y centrándola en aquellos valores de x dados por las coordenadas $x(1,0)$, $x(1, 0,25)$, $x(1, 0,50)$, $x(1, 0,75)$, $x(1,0, 1,0)$, $x(1,0, 1,25)$; como se trata de puntos internos la fórmula a utilizar más apropiada posiblemente será Stirling cuarto orden de aproximación:

$$u(1,0) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{y=0} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{2}{3} (f_1 - f_{-1}) - \frac{1}{12} (f_2 - f_{-2}) \right]$$

$$u(1,0) = \frac{1}{0,25} \left[\frac{2}{3} (0,391 - 0,0844) - \frac{1}{12} (0,675 - 0,025) \right] = 0,6009$$

$$u(1,0,25) = \frac{1}{0,25} \left[\frac{2}{3} (0,844 - 0,556) - \frac{1}{12} (1,119 - 0,506) \right] = 0,5637$$

$$u(1,0,50) = \frac{1}{0,25} \left[\frac{2}{3} (1,204 - 0,972) - \frac{1}{12} (1,450 - 0,950) \right] = 0,4520$$

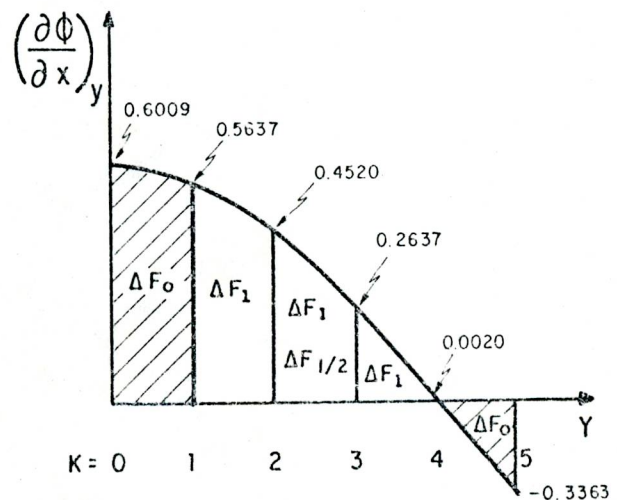
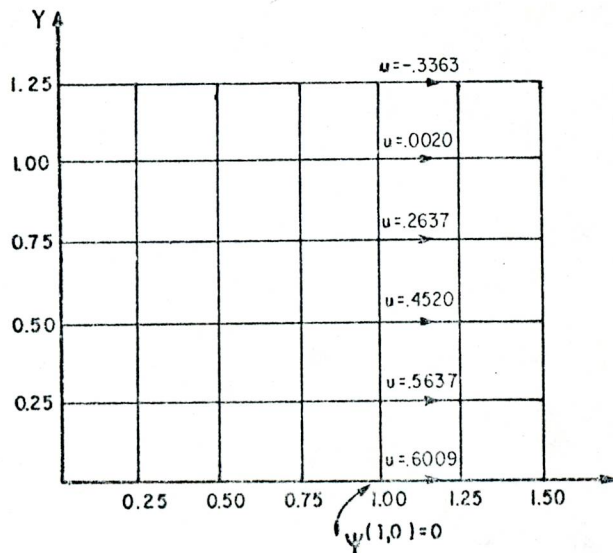
$$u(1,0,75) = \frac{1}{0,25} \left[\frac{2}{3} (1,469 - 1,331) - \frac{1}{12} (1,669 - 1,356) \right] = 0,2637$$

$$u(1,1) = \frac{1}{0,25} \left[\frac{2}{3} (1,641 - 1,634) - \frac{1}{12} (1,775 - 1,725) \right] = 0,002$$

$$u(1, 1,25) = \frac{1}{0,25} \left[\frac{2}{3} (1,719 - 1,881) - \frac{1}{12} (1,769 - 2,056) \right] = - 0,3363$$

2) Evaluación de la Integración.

La visualización gráfica de este proceso, así como su evaluación se muestra seguidamente:



K = 0	1	2	3	4	5
K = -1	0	1	2	3	4
K = -2	-1	0	1	2	3
K = -5	-4	-3	-2	-1	0

- Evaluación del Primer Intervalo de Integración

k	y	$f = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_y$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	0	0,6009					
			- 0,0372				
1	0,25	0,5637		- 0,0745			
			- 0,1117		- 0,0021		
2	0,50	0,4520		- 0,0766		0,0053	
			- 0,1883		- 0,0032		- 0,0117
3	0,75	0,2637		- 0,0734		- 0,0064	
			- 0,2617		- 0,0032		
4	1,00	0,0020		- 0,0766			
			- 0,3383				
5	1,25	-0,3363					

Como se puede observar las segundas diferencias llegan a ser casi constantes luego se podría aproximar la integración a un segundo orden.

Gregory - Newton Integración segundo orden de aproximación (Primer Intervalo)

$$\begin{aligned} \psi(1, 0,25) &= \Delta x \left[\frac{5}{12} f_0 + \frac{2}{3} f_1 - \frac{1}{12} f_2 \right] + \psi(1,0) \\ &= 0,25 \left[\frac{5}{12} \times 0,6009 + \frac{2}{3} \times 0,5637 - \frac{1}{12} \times 0,4520 \right] + 0,0 = 0,1471 \end{aligned}$$

- Evaluación del segundo intervalo de Integración

Gregory - Newton Integración segundo orden de Aproximación

$$\psi(1, 0,50) = \Delta x \left[-\frac{f_0}{12} + \frac{2}{3} f_1 + \frac{5}{12} f_2 \right] + \psi(1, 0,25)$$

$$= 0,25 \left[-\frac{0,6009}{12} + \frac{2}{3} \times 0,5637 + \frac{5}{12} \times 0,4520 \right] + 0,1471$$

$$= 0,1285 + 0,1471 = 0,2756$$

Gregory - Newton Integración tercer orden de Aproximación

$$\psi(1, 0,50) = 0,25 \left[-\frac{0,6009}{12} + \frac{13}{24} \times 0,5637 + \frac{13}{24} \times 0,4520 - \frac{0,2637}{24} \right]$$

$$+ 0,1471 = 0,1473 + 0,1471 = 0,2944$$

Como se puede observar al usar las terceras diferencias da un valor ligeramente superior que las segundas diferencias y esto es de esperar; pero para ser consecuente con el primer intervalo calculado vamos a tomar como respuesta la dada por el segundo orden de aproximación. También puede aplicarse Bessel con tercer orden de aproximación dando el mismo resultado que Newton segundo orden de aproximación (0.1285), *el lector debe verificar este último resultado.*

- *Evaluación del tercer Intervalo de Integración*

Gregory - Newton segundo orden de Aproximación como un segundo intervalo desplazando k

$$\psi(1, 0,75) = \Delta x \left[-\frac{f_0}{12} + \frac{2}{3} f_1 + \frac{5}{12} f_2 \right] + \psi(1, 0,50)$$

$$= 0,25 \left[-\frac{0,5637}{12} + \frac{2}{3} \times 0,4520 + \frac{5}{12} \times 0,2637 \right] + 0,2756$$

$$= 0,09106 + 0,2756 = 0,3666$$

Bessel Quinto Orden de Aproximación

$$\psi(1, 0,75) = \Delta x \left[\frac{11}{1440}(f_{-2} + f_3) - \frac{31}{480}(f_{-1} + f_2) + \frac{401}{720}(f_0 + f_1) \right]$$

$$+ \psi(1, 0,50) = 0,25 \left[\frac{11}{1440}(0,6009 - 0,3363) - \frac{31}{480}(0,5637 + 0,0020) + \right.$$

$$\left. \frac{401}{720}(0,4520 + 0,2637) \right] + 0,2756$$

$$= 0,09102 + 0,2756 = 0,3666$$

Como se ve las respuestas coinciden.

- Evaluación del cuarto intervalo de Integración

Gregory - Newton segundo orden de aproximación evaluado como un segundo intervalo desplazando k

$$\psi(1,1) = \Delta x \left[-\frac{f_0}{12} + \frac{2}{3}f_1 + \frac{5}{12}f_2 \right] + \psi(1, 0,75) = 0,25 \left[-\frac{0,4520}{12} + \right.$$

$$\left. \frac{2}{3} \times 0,2637 + \frac{5}{12} \times 0,0020 \right] + 0,3666 = 0,03474 + 0,3666 =$$

$$= 0,4013$$

- Evaluación del Quinto Intervalo de Integración

Gregory - Newton hacia atrás Primer orden de Aproximación

$$\psi(1, 1,25) = \frac{\Delta x}{2}(f_0 + f_{-1}) + \psi(1,1)$$

$$= \frac{0,25}{2}(-0,3363 + 0,0020) + 0,4013$$

$$= -0,04178 + 0,4013 = 0,3595$$

En la siguiente Tabla, se muestra un resumen de los valores obtenidos para $u(1, y)$ y $\psi(1, y)$:

TABLA 2. RESUMEN DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA u y ψ

y	$u(1, y)$	$\psi(1, y)$
0	0,6009	0,0000
0,25	0,5637	0,1471
0,50	0,4520	0,2756
0,75	0,2637	0,3666
1,00	0,0020	0,4013
1,25	- 0,3363	0,3595

EJERCICIOS

- 1) Derive las ecuaciones de la Tabla A.2, dadas en el Apéndice A. Tome como base las siguientes ecuaciones:

Diferenciación basada en Stirling.

$$f(x_k) = f_0 + k\mu\delta f_0 + \frac{k^2}{2} \delta^2 f_0 + \frac{k^3 - k}{6} \mu\delta^3 f_0 + \frac{k^4 - k^2}{24} \delta^4 f_0 + \dots$$

$$\frac{df(x_k)}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left[\mu\delta f_0 + k\delta^2 f_0 + \frac{3k^2 - 1}{6} \mu\delta^3 f_0 + \frac{2k^3 - k}{12} \delta^4 f_0 + \dots \right]$$

$$\frac{d^2 f(x_k)}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\delta^2 f_0 + k\mu\delta^3 f_0 + \frac{6k^2 - 1}{12} \delta^4 f_0 + \dots \right]$$

$$\frac{d^3 f(x_k)}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x^3} \left[\mu\delta^3 f_0 + k\delta^4 f_0 + \dots \right]$$

$$\frac{d^4 f(x_k)}{dx^4} = \frac{1}{\Delta x^4} \left[\delta^4 f_0 + \dots \right]$$

- 2) Derive la ecuación 57 basándose en la ecuación 56 dadas en el numeral 5.3.

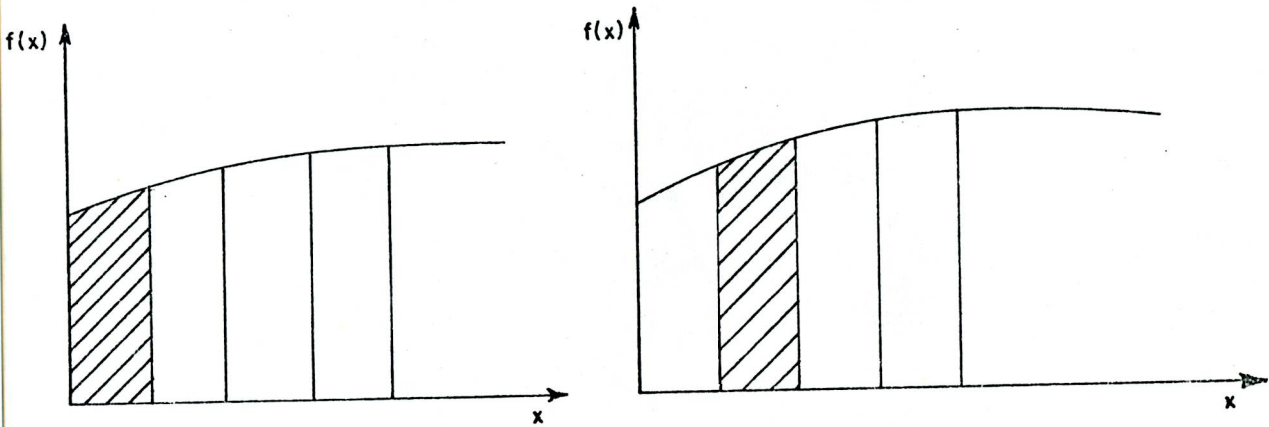
- 3) Dada la siguiente tabla, encuentre la integral $\int_2^3 f(x) dx$.

Qué orden de aproximación se necesita con el fin de obtener una respuesta exacta asumiendo que los datos se ajustan a un polinomio. Una vez determinado el polinomio, verifique que el resultado de la integración es

exacto, por comparación con la integración de este polinomio con los mismos límites.

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	4	30	120	390	780

- 4) Derive las fórmulas de integración para los dos casos que se presentan inmediatamente usando un polinomio de cuarto orden. Las fórmulas no deben incluir diferencias.



VI. SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Las ecuaciones diferenciales parciales son expresiones matemáticas que representan una Ley Física y esta Ley Física es la base para el planteo de problemas en Ingeniería.

Si una función U es dependiente de dos o más variables como x , y , y t las derivadas de U con respecto a x , y , y t son derivadas parciales y la ecuación envolviendo tales derivadas se llaman *ecuaciones diferenciales parciales*.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (66)$$

El orden de una ecuación diferencial parcial es igual al orden de la derivada más alta, en el caso de la ecuación 66, sería una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Una forma de escribir una ecuación diferencial de segundo orden con dos variables independientes x y y es la siguiente:

$$a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F_1(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}) = 0 \quad (67)$$

Una ecuación diferencial se designa como lineal si cada término de la ecuación es de grado 1 o cero, y en el término donde concurren la variable dependiente y una cualquiera de sus derivadas, debemos sumar sus exponentes a fin de calcular su grado, por ejemplo el término $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ es de primer grado mientras que $U (\frac{\partial U}{\partial x})$ es de segundo grado ya que debemos sumar 1 por el exponente de U y 1 por el exponente de $\frac{\partial U}{\partial x}$.

Cuando cada término en la ecuación contiene la función U o sus derivadas la ecuación es *homogénea*, si este no es el caso, la ecuación es entonces *no homogénea*, así:

$$x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + U = 0 \quad (68)$$

(Ecuación homogénea)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial y} + U + f_1(x, y) = 0 \quad (69)$$

(Ecuación no homogénea)

$f_1(x, y)$ es el término no homogéneo y puede ser también una constante.

6.1. EJEMPLO DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Muchos de los problemas reales que se encuentran en los campos de Ingeniería y Física son bidimensionales o tridimensionales y además de eso dependen también del tiempo, y la única manera de expresarlos matemáticamente es a través de una ecuación diferencial parcial.

6.1.1. ECUACIONES TIPO LAPLACE

Para su deducción se utilizarán las ecuaciones fundamentales de continuidad y vorticidad y la Ley de Darcy, así:

Ecuación de Continuidad en 3 - Dimensiones:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (70)$$

en donde u , v y w son las velocidades en las direcciones x , y , z y t es el tiempo, ρ es la densidad.

Ecuación de Vorticidad (ξ)

$$\xi = \nabla \times \vec{V} = \text{Curl } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Si nos circunscribimos a un campo bidimensional la vorticidad en la dirección z es cero, o lo que es lo mismo $\vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$, $k \neq 0$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (71)$$

Si en la ecuación 70, hacemos $\rho = \text{constante}$, esto es, la densidad no varía

con respecto a la presión ni con la temperatura y además no varía con respecto al tiempo y si adicionalmente la escribimos en dos dimensiones queda reducida a:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 ; \quad \rho \neq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (72)$$

Si diferenciamos la ecuación 72 con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad (73)$$

Si diferenciamos la ecuación 71 respecto a y:

$$- \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0 \quad (74)$$

Si ahora multiplicamos la ecuación 74 por -1 y sumamos las ecuaciones 73 y 74, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

+

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Ecuación tipo Laplace en } u) \quad (75)$$

Resolviendo esta última ecuación que es de tipo Laplace por cualquier método, en el cual las diferencias finitas es uno de ellos, obtenemos \underline{u} y en base a las ecuaciones 73 y 74 se puede resolver ahora para \underline{v} .

Otra ecuación a lograr es derivando la 72 respecto a y , y la 71 con respecto a x , y efectuando la suma.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Ecuación tipo Laplace en } v) \quad (76)$$

Otras ecuaciones tipo Laplace son las referentes a las funciones corrientes (ψ) y potencial (ϕ) y cuya deducción se expone a continuación:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (77)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (78)$$

Derivando la ecuación 77, respecto a x , y la 78 respecto a y , y efectuando la sumatoria:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

+

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (79)$$

También se puede demostrar por el mismo procedimiento anterior que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (80)$$

Otra ecuación importante es la que describe el flujo a través de medio poroso. Asumiendo un medio saturado, densidad del flujo constante y no variable con respecto al tiempo la ecuación de continuidad 72 es aplicable.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Necesitamos otra fórmula que describa el movimiento del fluido a través del medio poroso, y esta es la Ley de Darcy:

$$\vec{V} = -k \nabla h = -k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial h}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (81)$$

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + \omega \vec{k} = -k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial h}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \omega = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (82)$$

en las fórmulas anteriores estamos suponiendo que k (permeabilidad) es la misma en todas las direcciones, esto es, el medio es isotrópico y homogéneo. El signo menos (-) en las fórmulas anteriores es requerido debido a que la cantidad k es una constante positiva y el agua se mueve en la dirección de la carga piezométrica (h) decreciente o lo que es lo mismo el flujo ocurre en la dirección del potencial decreciente.

Sustituyendo la Ley de Darcy dentro de la ecuación de continuidad obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0$$

$$-k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \implies k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = 0; \quad k \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Ecuación tipo Laplace}) \quad (83)$$

6.1.2. ECUACION BIDIMENSIONAL DE CONDUCCION DEL CALOR EN ESTADO NO PERMANENTE

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (84)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (85)$$

T = temperatura

k = conductividad térmica

ρ = densidad del medio en donde se transmite el calor

c_p = calor específico del medio

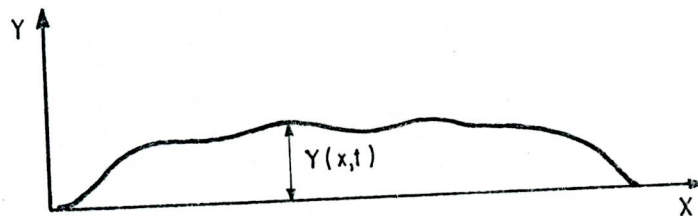
α = coeficiente térmico de difusividad

x, y = coordenados

t = tiempo

6.1.3. ECUACION DE LA CUERDA VIBRANTE

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (86)$$



Esta ecuación es aplicable a pequeñas vibraciones transversales de una cuerda flexible, tal como la cuerda de un violín que está localizada originalmente a lo largo del eje x y posteriormente se pone en movimiento. La función $y(x, t)$ da el desplazamiento de cualquier punto x de la cuerda en un tiempo (t). La constante $a^2 = \frac{T}{\rho}$; en donde T = es la constante tensión en la cuerda y ρ es el peso por unidad de longitud de la cuerda.

6.2. DETERMINACION DE LOS DIFERENTES TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

6.2.1. Ecuaciones de Segundo Orden

Los métodos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales parciales ya sean numéricos o no dependen del tipo de ecuación con que se va a tratar. Una ecuación diferencial es hiperbólica, parabólica o elíptica si *características reales y distintas, coincidentes o imaginarias* respectivamente existen. Una manera de verificar lo anterior es a través del discriminante de la ecuación. Muchos autores dan medios para determinar el tipo de la EDP conteniendo segundas derivadas, aquí vamos a asumir a tal efecto una ecuación general.

$$af_{xx} + b f_{xy} + cf_{yy} = d(x, y, f, f_x, f_y) \quad (87)$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

en la cual a, b, c podrían ser cualquiera función de (x) o (y) , d , podría ser también tal como lo indica el paréntesis una función de las primeras derivadas, y de la función misma además de (x) y (y) . El tipo de ecuación se define de acuerdo a:

$$\text{hiperbólica} \quad \text{si} \quad b^2 - 4ac > 0$$

$$\text{parabólica} \quad \text{si} \quad b^2 - 4ac = 0$$

$$\text{elíptica} \quad \text{si} \quad b^2 - 4ac < 0$$

Los ejemplos simples más comunes de los tres tipos de ecuaciones anteriores son:

- Ecuación hiperbólica de la onda

$$f_{xx} - f_{tt} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (88)$$

- La ecuación parabólica unidimensional de difusión.

$$f_{xx} - f_t = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (89)$$

- La ecuación elíptica de Laplace para flujo potencial

$$f_{xx} + f_{yy} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (90)$$

Las denominadas *características* representan curvas a través de las cuales las derivadas son discontinuas, estas se muestran en la Figura 5.

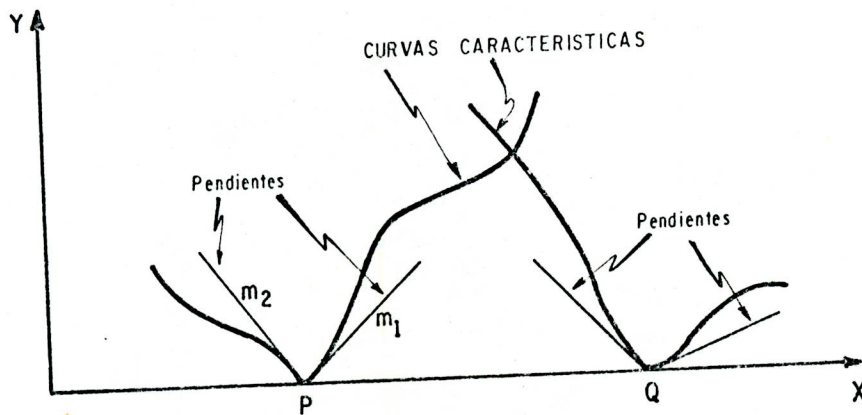


Figura 5.- Curvas características

En los puntos P y Q las derivadas son discontinuas. En los casos de ecuaciones elípticas las características son imaginarias (no existen) y por consiguiente las derivadas encima de cualquier curva en la región son únicamente determinadas por las funciones debajo de la curva. En el caso de ecuaciones hiperbólicas las *características* son reales y distintas y por consiguiente las derivadas (que son discontinuas a través de las *características*) por encima de cualquier curva en la región *no son* únicamente determinadas por la función debajo de la curva.

En los casos de EDP de segundo orden tal como la ecuación 87, la continuidad de las derivadas puede ser constatada por el siguiente procedimiento:

1.- *Regla de las diferenciales totales*, esto es, tomando las diferenciales totales de f_x y f_y .

Consideremos la función $z = f(x, y)$, entonces:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (91)$$

La misma ecuación anterior puede obtenerse aplicando la *Regla de las derivadas totales*, la cual a su vez usa la regla en cadena.

$$\frac{dz}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \implies dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Como se puede ver; los dos métodos conducen a la misma respuesta. Ahora aplicaremos cualquiera de los dos procedimientos anteriores para obtener las diferenciales totales, así:

$$d(f_x) = f_{xx} dx + f_{xy} dy; \quad d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy \quad (92)$$

$$d(f_y) = f_{xy} dx + f_{yy} dy; \quad d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \quad (93)$$

2.- Combinación de las ecuaciones 92 y 93 con la ecuación 87:

$$a f_{xx} + b f_{xy} + c f_{yy} = d \quad (87)$$

$$f_{xx} dx + f_{xy} dy = d(f_x) \quad (92)$$

$$f_{xy} dx + f_{yy} dy = d(f_y) \quad (93)$$

Tenemos aquí un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, las cuales se pueden escribir en forma matricial, tal como sigue:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} \\ f_{xy} \\ f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d(f_x) \\ d(f_y) \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$A X = d \quad (95)$$

A = Matriz de los coeficientes

X = Matriz de las incógnitas

d = Matriz de los términos independientes

3.- Por el teorema fundamental de Algebra lineal, "Una única solución existe para el sistema $AX = d$ precisamente cuando el correspondiente Sistema Homogéneo $AX = 0$ tiene solamente la solución $X = 0$ ", luego entonces para que exista una solución diferente a la única, el determinante de la matriz A debe ser igual a cero; por consiguiente si el determinante es cero, características reales existen a través de las cuales las derivadas son discontinuas.

4.- Fijación del determinante de la Matriz A igual a cero.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} dy & 0 \\ dx & dy \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} dx & dy \\ 0 & dx \end{bmatrix}$$

$$= a (dy)^2 - b dx dy + c (dx)^2 = 0$$

Dividiendo por $(dx)^2$, tenemos que:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b\frac{dy}{dx} + c = 0 \quad (96)$$

y esta ecuación 96 es la llamada "Ecuación Característica", y notamos además que es cuadrática, resolviéndola tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (97)$$

Esta ecuación para $\frac{dy}{dx}$ describe las pendientes de las curvas en un plano $x - y$ llamadas "Curvas características". El discriminante de esta ecuación será:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (98)$$

Este discriminante indica si habrá cero, una o dos curvas características a través de cada punto y se constituye en un medio de clasificar una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Si $\Delta > 0$ tenemos una ecuación hiperbólica y dos reales y distintas características existen.

$$\frac{dy}{dx} = m_1(P) = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} = m_2(P) = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$ las dos características son coincidentes dando origen entonces a la llamada ecuación parabólica. Si $\Delta < 0$ no reales características existen y la ecuación es elíptica.

6.2.2. Ecuaciones diferenciales parciales de primer orden.

Para determinar los tipos de los sistemas de primer orden, iremos a través de un procedimiento similar a las de segundo orden. Para tal propósito consideremos dos sistemas de ecuaciones simultáneas y cuasilineales.

$$a_1 f_x + b_1 f_y + c_1 g_x + d_1 g_y = e_1 \quad (99)$$

$$a_2 f_x + b_2 f_y + c_2 g_x + d_2 g_y = e_2 \quad (100)$$

en donde los coeficientes a_1, b_1, \dots, e_2 podrían ser funciones de x, y, f y g . Las diferenciales totales de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ vienen dadas por:

$$df = f_x dx + f_y dy \quad (101)$$

$$dg = g_x dx + g_y dy \quad (102)$$

Combinando las ecuaciones 99, 100, 101 y 102, tenemos el siguiente sistema escrito en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ df \\ dg \end{bmatrix} \quad (103)$$

Si igualamos el determinante de la matriz de los coeficientes a cero, obtenemos la "Ecuación Característica". Para aprovechar los ceros de la línea inferior vamos a expandir el sistema matricial anterior alrededor de esta línea, tal como sigue:

$$- dx \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 \end{bmatrix} + dy \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ dx & dy & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$- dx \begin{bmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} + dx dy \begin{bmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{bmatrix} + dy dx \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} -$$

$$- dy \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-(dx)^2(b_1 d_2 - b_2 d_1) + dx dy (a_1 d_2 - a_2 d_1) + dy dx (b_1 c_2 - b_2 c_1) - (dy)^2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) = 0$$

multiplicando la anterior expresión por (-1)

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1) (dy)^2 - dx dy (a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1) + (b_1 d_2 - b_2 d_1) (dx)^2 = 0 \quad (104)$$

Dividiendo la expresión anterior por dx^2

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} (a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1) + (b_1 d_2 - b_2 d_1) = 0 \quad (105)$$

Tal como en el caso de las EDP de segundo orden, las características de la ecuación 105 son reales y distintas (ecuaciones hiperbólicas), idénticas (parabólicas) o imaginarias (elípticas) si el discriminante:

$$\Delta = (a_1 d_2 - a_2 d_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 - 4(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 d_2 - b_2 d_1) \quad (106)$$

es positivo, cero o negativo; por consiguiente el uso de la ecuación 106 provee un medio para clasificar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden.

Como un ejemplo vamos a considerar las dos EDP de primer orden para flujo potencial la cual combinadas resultan en la ecuación de Laplace.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{ó} \quad \phi_x - \psi_y = 0$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{ó} \quad \phi_y + \psi_x = 0$$

Comparándolas con las ecuaciones 99 y 100 respectivamente obtenemos los coeficientes:

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_1 = -1$$

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 1, \quad d_2 = 0$$

Sustituyendo valores en la ecuación 106.

$$\Delta = \left[1 \times 0 - 0 \times (-1) + 0 \times 1 - 1 \times 0 \right]^2 - 4(1 \times 1 - 0 \times 0) \left[0 \times 0 - 1 \times (-1) \right] = -4$$

Y por consiguiente, como ya sabemos, el sistema de ecuaciones que describe el flujo potencial es elíptico.

Como un segundo ejemplo, vamos a examinar la ecuación de continuidad y la ecuación del movimiento para el caso de flujo unidimensional no permanente en canales abiertos o Ecuaciones de Saint - Venant; para tal efecto tomemos de Henderson (1966) las ecuaciones 8-9 y 8-12.

$$2c \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = g(S_o - S_f) \quad (107)$$

$$2v \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (108)$$

en la cual c es la velocidad de una onda gravitatoria en la cual su longitud (L) es grande en comparación con la profundidad del agua (y), $c = \sqrt{gy}$; v es la velocidad del flujo, S_0 y S_f son las pendientes del fondo del canal y línea de energía respectivamente.

Comparando las ecuaciones 107, 108 con la 99 y 100, obtenemos:

$$a_1 = 2c, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = v, \quad d_1 = 1$$

$$a_2 = 2v, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = c, \quad d_2 = 0$$

Reemplazando estos valores en la ecuación 106.

$$\Delta = \left[2c \times 0 - 2v \times 1 + 0 \times c - 2 \times v \right]^2 - 4 \left[2c \times c - 2v \times v \right]$$

$$\left[0 \times 0 - 2 \times 1 \right] = (-4v)^2 + 8(2c^2 - 2v^2) = 16v^2 + 16c^2 - 16v^2 =$$

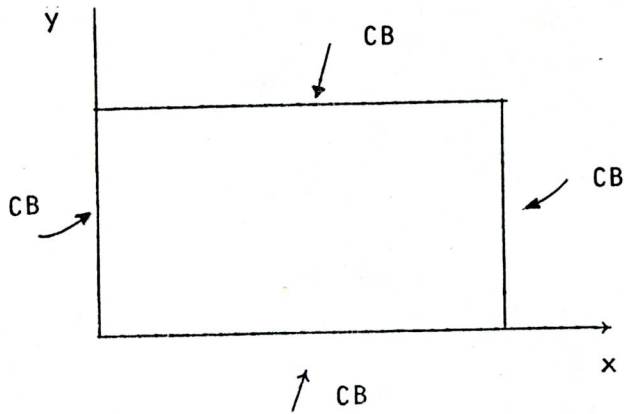
$$= 16c^2 > 0$$

Conclusión la ecuación de Saint-Venant es de tipo hiperbólico.

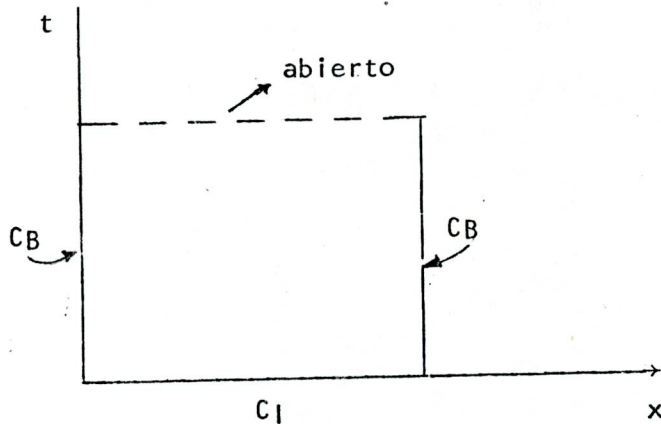
6.3. REPRESENTACION DE LAS ECUACIONES

Una manera de visualizar los problemas planteados es a través de figuras como las siguientes:

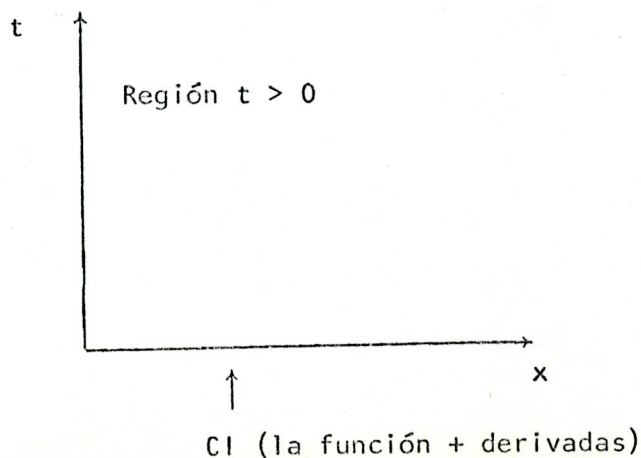
- 1.- Para las ecuaciones elípticas el problema debe enmarcarse o encerrarse en una región limitada por condiciones de borde (BC) debidamente prescritas.



2.- Para las ecuaciones de tipo parabólico, uno de los bordes permanece abierto y a $t = 0$ la condición de borde toma el nombre de condición inicial (CI)



3.- Para las ecuaciones de tipo hiperbólico se tiene una región para $t > 0$ completamente abierta. Generalmente se especifica la función y una de sus derivadas como condición inicial y para resolver la ecuación habría necesidad de especificar las condiciones de borde, como ejemplo, para el caso de tránsito de crecientes en ríos utilizando las Ecuaciones de Saint-Venant se especifican las condiciones de borde aguas arriba y aguas abajo del mismo.



EJEMPLOS

- Determine el tipo de la siguiente EDP. También indique si la ecuación es lineal o no.

$$f_{xx} + f_y + f_{yy} = 0$$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1$$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0 \quad \text{es tipo elíptica y lineal}$$

- Determine la región en el plano xy para el cual la siguiente EDP es elíptica. De qué tipos son fuera de esta región?.

$$f_{xx} + 2y f_{xy} + (1 - x^2) f_{yy} = 0$$

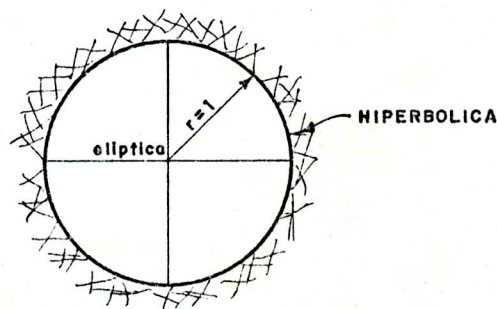
$$a = 1$$

$$b = 2y$$

$$c = 1 - x^2$$

$$b^2 - 4ac = 4y^2 - 4 \times 1 \times (1 - x^2) = 4y^2 - 4 + 4x^2$$

$$b^2 - 4ac = 0; \quad 4x^2 + 4y^2 = 4 \implies x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Ecuación de un círculo con centro en el origen y radio} = 1$$



$$b^2 - 4ac > 0; \quad \therefore \quad x^2 + y^2 > 1 \quad \text{hiperbólica}$$

$$b^2 - 4ac < 0; \quad \dots \quad x^2 + y^2 < 1 \text{ elíptica}$$

EJERCICIOS

1.- Determine el tipo de las siguientes EDP. También indique si las ecuaciones son lineales o nó.

a) $f_{xx} - f_x - f_{yy} = 0$

b) $f_{xx} + f_{yy} + (f_x)^2 + (f_y)^2 = 0$

c) $f_{xx} + f_{yy} + (f_x)^2 + (f_y)^2 = f_t$

d) $\frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0$

e) $f_{xx} + f_{yy} = g(x, y)$

2.- Determine la región en el plano xy para el cual las siguientes EDP son elípticas, ¿Qué tipo son fuera de esta región?

a) $f_{xx} + f_{yy} + y f_x - x f_y + x^2 f - 3xy = 0$

b) $x f_{xx} + 2y f_{xy} + f_{yy} = 0$

c) $y f_{xx} + 2x f_{xy} + 3f_{yy} + 4f_x - y f_y + xyf - a^{xy} = 0$

VII. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE TIPO PARABOLICO

Aquí vamos a tratar las soluciones de estas ecuaciones aplicando las técnicas de diferencias finitas. Existen también los métodos tradicionales llamados analíticos o soluciones cerradas, pero que están supeditadas o restringidas a ecuaciones lineales y a condiciones de borde también lineales. Cuando se trata de condiciones de

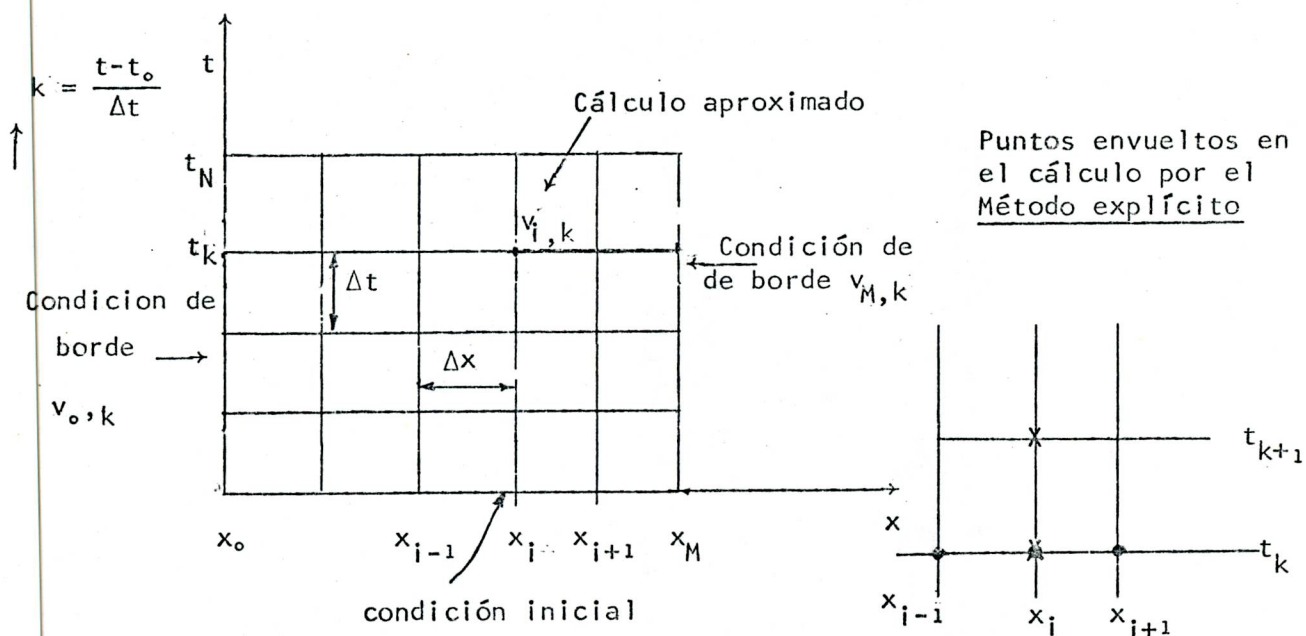
borde difíciles es necesario ver y resolver las ecuaciones por métodos numéricos ya sea a través de las diferencias finitas o a través de los elementos finitos.

7.1. Métodos Explícitos de Solución

Tenemos la siguiente EDP tipo parabólico:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_x \quad (109)$$

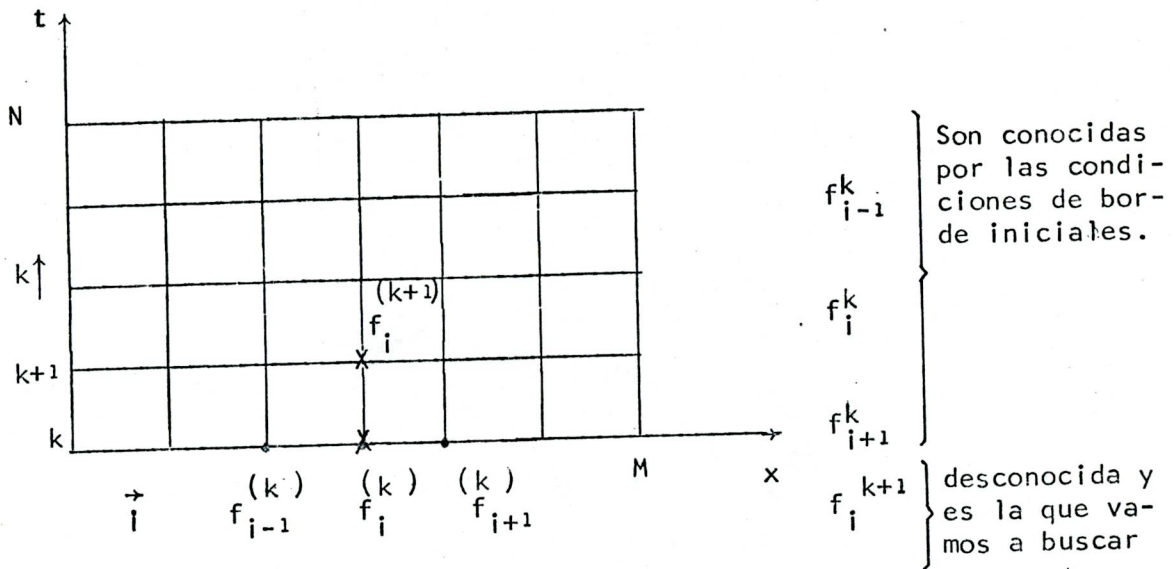
Se trata de una EDP tipo unidimensional y no permanente (ya que depende del tiempo, $\frac{\partial f}{\partial t}$)



Puntos envueltos en el cálculo por el Método explícito

$$i = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

- : Puntos envueltos en el cálculo de las diferencias de las distancias.
- x : Puntos envueltos en el cálculo de las diferencias de tiempo.



$$i = \frac{x - x_0}{\Delta x}; \quad x_0 = 0 \quad \dots \quad i = \frac{x}{\Delta x}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$k = \frac{t - t_0}{\Delta t}; \quad t_0 = 0 \quad \dots \quad k = \frac{t}{\Delta t}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_x$$

Ecuación Parabólica a resolver

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_t = \left(\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{\Delta x^2} \right)_t$$

Aproximación de la segunda derivada por Stirling segundo orden de aproximación.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_x = \left(\frac{f_1 - f_0}{\Delta t} \right)_x$$

Aproximación de la primera derivada por Newton hacia adelante primer orden de aproximación.

Para escribir la primera derivada tan sólo el método de Newton hacia adelante puede usarse ya que tan sólo conocemos f_0 por las condiciones de borde iniciales.

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x \quad (109)$$

$$\frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{\Delta x^2} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t}$$

$$f_i^{k+1} = f_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) \quad (110)$$

$$f_i^{k+1} = f_i^k + \lambda (f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k) \quad (111)$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{Criterio para obtener estabilidad en la solución}).$$

La diferencia entre la solución de una EDP hecha por la aproximación de diferencias finitas y la solución exacta en cualquier punto de la malla se conoce como "error local de discretización (w)", esto es:

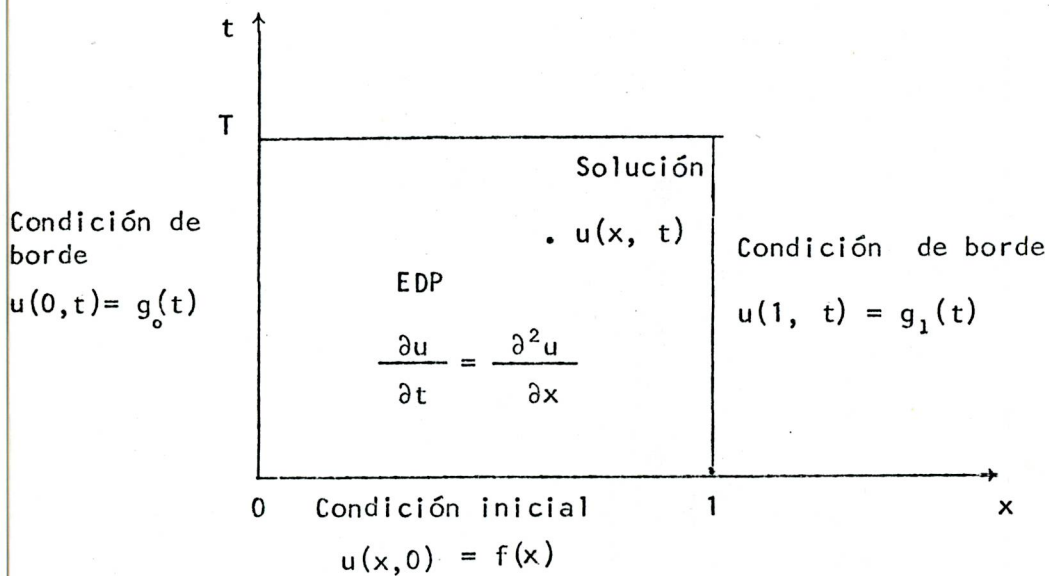
$$w = f - v \quad (112)$$

El método de las diferencias finitas se dice que converge si $w \rightarrow 0$ a medida que Δx y Δt tienden a cero. Se ha probado que una condición suficiente para la convergencia del método explícito es que $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$.

EJEMPLO

Consideremos una barra aislada con una distribución de la temperatura inicial a $t = 0$, teniendo sus puntas que son subsecuentemente mantenidas a otras temperaturas las cuales podrían ser funciones del tiempo. La distribución de temperatura $u(x, t)$ en la barra a cualquier tiempo $t > 0$ podría encon-

trarse definiendo variables dimensionales apropiadamente y asumiendo que las propiedades físicas de la barra permanecen constantes. El problema puede entonces describirse por la siguiente ecuación diferencial, y las siguientes condiciones inicial y de borde.



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ para } 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \quad (113)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (114)$$

$$u(0, t) = g_0(t), \quad 0 < t \leq T \quad (115)$$

$$u(1, t) = g_1(t), \quad 0 < t \leq T \quad (116)$$

Aquí en este problema $f(x)$ es la condición inicial, $g_0(t)$ y $g_1(t)$ son las condiciones de borde, estas últimas son muy simples puesto que especifican la temperatura en los terminales de la barra; existen otras condiciones de borde mucho más complicadas por ejemplo las que envolverían las derivadas de la variable dependiente.

Como ejemplo vamos a resolver este problema de conducción de calor con las simples condiciones $f(x) = 0$, $g_0(t) = 100$. Arbitrariamente escogamos $\Delta x = 0,2$ y $\Delta t = 0,01$ el cual corresponde a $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0,01}{(0,2)^2} = \frac{0,01}{0,04} = \frac{1}{4}$

Reemplazando valores en la ecuación 110, tenemos que:

$$f_i^{k+1} = f_i^k + \frac{f_{i+1}^k - 2f_i^k + f_{i-1}^k}{4} \quad (117)$$

Cálculos para $i = 1$ basados en la Ecuación 117.

$$k = 0$$

$$f_1^1 = f_1^0 + \frac{f_2^0 - 2f_1^0 + f_0^0}{4} = 0 + \frac{0 - 2 \times 0 + 100}{4} = 25$$

$$k = 1$$

$$f_1^2 = f_1^1 + \frac{f_2^1 - 2f_1^1 + f_0^1}{4} = 25 + \frac{0 - 2 \times 25 + 100}{4} = 37,50$$

$$k = 2$$

$$f_1^3 = f_1^2 + \frac{f_2^2 - 2f_1^2 + f_0^2}{4} = 37,5 + \frac{0 - 2 \times 37,5 + 100}{4} = 45,31$$

$$k = 3$$

$$f_1^4 = f_1^3 + \frac{f_2^3 - 2f_1^3 + f_0^3}{4} = 45,31 + \frac{6,25 - 2 \times 45,31 + 100}{4} = 51,17$$

$$k = 4$$

$$f_1^5 = f_1^4 + \frac{f_2^4 - 2f_1^4 + f_0^4}{4} = 51,17 + \frac{14,06 - 2 \times 51,17 + 100}{4} = 56,05$$

$$k = 5$$

$$f_1^6 = f_1^5 + \frac{f_2^5 - 2f_1^5 + f_0^5}{4} = 56,05 + \frac{21,87 - 2 \times 56,05 + 100}{4} = 56,05$$

En la Figura 6 y Tabla 3, se muestra un resumen de los cálculos.

Si la condición inicial y las condiciones de borde no coinciden en las coordenadas $(0,0)$ y $(1,0)$, la función $u(x, t)$ tendrá discontinuidades en esas esquinas y la pregunta es: ¿Cuál valor se le debe asignar por ejemplo a $u(0,0)$?; parece razonable en tal caso usar el promedio aritmético de los valores dados por $f(x)$ cuando $x \rightarrow 0$ y $g_0(t)$ cuando $t \rightarrow 0$. En este caso en particular los valores de $u(0,0)$ y $u(1,0)$ han tomado el valor de la condición inicial, esto es, (0) y la razón es que la barra toda, incluyendo sus puntas por el hecho físico mismo debe estar a una misma temperatura.

Tabla 3. Resumen de los Resultados de la Distribución de Temperatura en la barra con respecto al tiempo.

Subíndice relativo al tiempo, k.	Subíndice relativo a la Distancia, i.					
	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	100	0	0	0	0	100
2	100	25,0	0	0	25,0	100
3	100	37,5	6,25	6,25	37,5	100
4	100	45,31	14,06	14,06	45,31	100
5	100	51,17	21,87	21,87	51,17	100
6	100	56,05	29,19	29,19	56,05	100

Como se ve, el resultado es una gradual difusión del calor en la barra la cual se evidencia por el incremento en la temperatura. Claramente, otros valores de Δx y Δt pudieron haberse escogido (sujeto a la restricción

$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 1/2$) habiendo producido valores similares a los aquí obtenidos.

Para que usted observe y aprecie el fenómeno de "Inestabilidad" haga el mismo ejemplo anterior con $\Delta t = 0,04$, $\Delta x = 0,2$, de tal suerte que $\lambda = 1,0$.

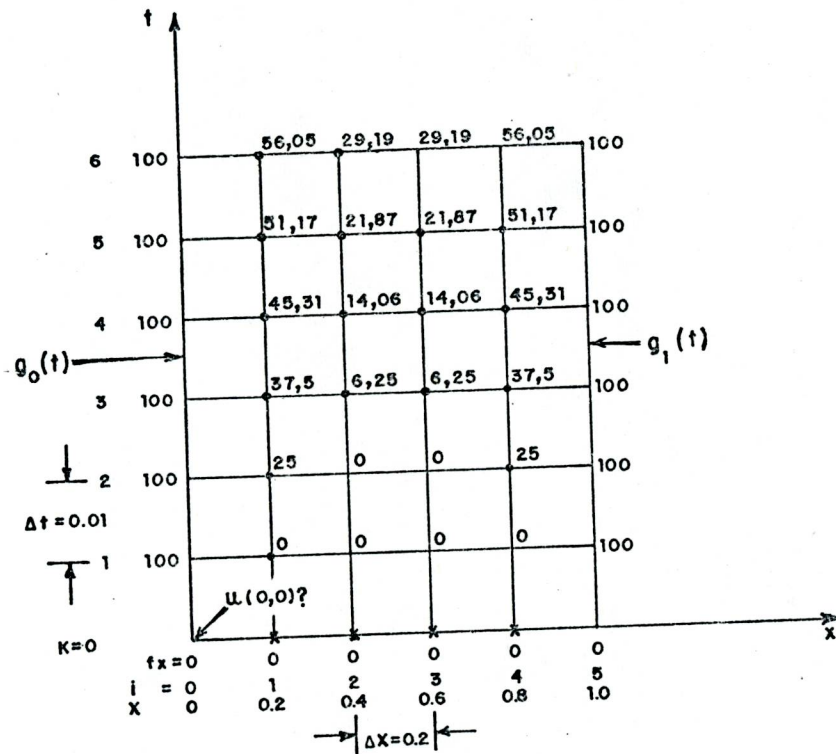
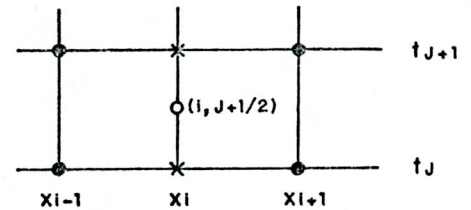
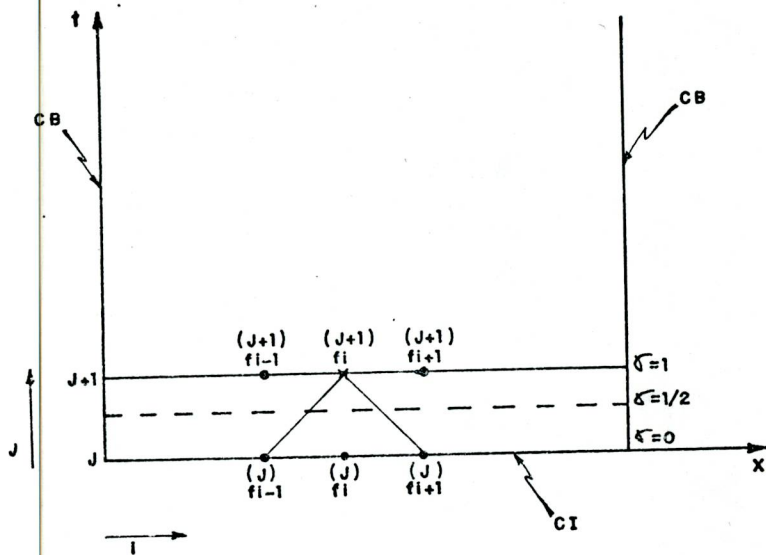


Figura 6. Representación gráfica de los valores obtenidos para la barra por el Método Explícito.

7.2. METODOS IMPLICITOS DE SOLUCION (Remueven la restricci3n $\lambda \leq 1/2$)

- : Puntos envueltos en el cálculo de las diferencias de distancias
- × : Puntos envueltos en el cálculo de las diferencias de tiempo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{Ecuación a resolver})$$

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} = \sigma \left(\frac{f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \right) + (1-\sigma) \left(\frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right) \quad (118)$$

σ = es un coeficiente de ponderación, $0 \leq \sigma \leq 1$

Si $\sigma = 0$, la ecuación 118 se reduce a:

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} = \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{\Delta x^2} \quad (\text{Método explícito})$$

Si $\sigma = 1$

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} = \frac{f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \quad (119) \text{ (Método Implícito)}$$

La estabilidad provee $\sigma \geq 1/2$, de acuerdo con esto el método implícito es estable porque $\sigma = 1$ pero el grado de aproximación es de primer orden y por consiguiente no es mejor que el grado de aproximación del explícito.

Si $\sigma = 1/2$ (Método de Crank - Nicolson)

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right)$$

Multiplicando por Δt

$$f_i^{j+1} - f_i^j = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j)$$

llamando:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$f_i^{j+1} - f_i^j = \frac{\lambda}{2} \left[f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1} + f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j \right]$$

$$2f_i^{j+1} - 2f_i^j = \lambda f_{i+1}^{j+1} - 2\lambda f_i^{j+1} + \lambda f_{i-1}^{j+1} + \lambda f_{i+1}^j - 2\lambda f_i^j + \lambda f_{i-1}^j$$

$$2f_i^{j+1} - \lambda f_{i+1}^{j+1} + 2\lambda f_i^{j+1} - \lambda f_{i-1}^{j+1} = 2f_i^j + \lambda f_{i+1}^j - 2\lambda f_i^j + \lambda f_{i-1}^j$$

$$-\lambda f_{i-1}^{j+1} + 2(1+\lambda)f_i^{j+1} - \lambda f_{i+1}^{j+1} = \lambda f_{i-1}^j + 2(1-\lambda)f_i^j + \lambda f_{i+1}^j$$

Dividiendo por λ :

$$-f_{i-1}^{j+1} + \frac{2(1+\lambda)}{\lambda} f_i^{j+1} - f_{i+1}^{j+1} = f_{i-1}^j + \frac{2(1-\lambda)}{\lambda} f_i^j + f_{i+1}^j \quad (120)$$

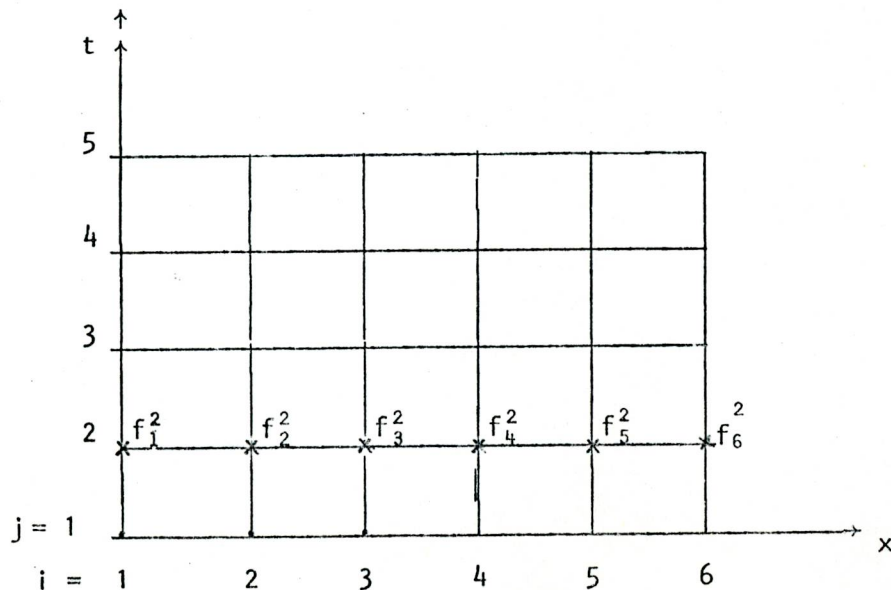
$$f_{i-1}^j + \frac{2(1-\lambda)}{\lambda} f_i^j + f_{i+1}^j = b_i \quad (\text{es un término conocido})$$

$$\frac{2(1+\lambda)}{\lambda} = a$$

$$-f_{i-1}^{j+1} + a f_i^{j+1} - f_{i+1}^{j+1} = b_i \quad (121)$$

Al tener $\sigma = 1/2$ estamos realmente evaluando la derivada con respecto al tiempo en el punto $(i, j+1/2)$ y estamos utilizando para ello los puntos f_i^{j+1} y f_i^j lo cual da un segundo orden de aproximación de la primera derivada según Stirling.

El paso siguiente es escribir la ecuación 121 para cada incógnita. Como un ejemplo tenemos la siguiente malla:



(121)

$$- f_{i-1}^{j+1} + a f_i^{j+1} - f_{i+1}^{j+1} = b_i$$

para $i = 1, j = 2, (f_1^2)$?

$$- f_0^2 + a f_1^2 - f_2^2 = b_1 ; \quad f_0^2 = 0 \quad (\text{no existe})$$

para $i = 2, j = 2, (f_2^2)$?

$$- f_1^2 + a f_2^2 - f_3^2 = b_2$$

para $i = 3, j = 2, (f_3^2)$?

$$- f_2^2 + a f_3^2 - f_4^2 = b_3$$

para $i = 4, j = 2, (f_4^2)$?

$$- f_3^2 + a f_4^2 - f_5^2 = b_4$$

para $i = 5, j = 2, (f_5^2)$?

$$- f_4^2 + a f_5^2 - f_6^2 = b_5$$

para $i = 6, j = 2, (f_6^2)$?

$$- f_5^2 + a f_6^2 - f_7^2 = b_6 ; \quad f_7^2 = 0 \quad (\text{no existe})$$

.

Entonces tenemos para esa primera línea de cálculo, $J = 2$, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 af_1^2 - f_2^2 &= b_1 \\
 -f_1^2 + af_2^2 - f_3^2 &= b_2 \\
 -f_2^2 + af_3^2 - f_4^2 &= b_3 \\
 -f_3^2 + af_4^2 - f_5^2 &= b_4 \\
 -f_4^2 + af_5^2 - f_6^2 &= b_5 \\
 -f_5^2 + af_6^2 &= b_6
 \end{aligned} \tag{122}$$

En una forma matricial la podemos escribir, así:

$$\begin{bmatrix}
 a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & a & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & a & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & a & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & a & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 f_1^2 \\
 f_2^2 \\
 f_3^2 \\
 f_4^2 \\
 f_5^2 \\
 f_6^2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 b_3 \\
 b_4 \\
 b_5 \\
 b_6
 \end{bmatrix} \tag{123}$$

$$A f = b \tag{124}$$

La matriz A se llama tridiagonal debido a la forma que tiene. Este sistema tridiagonal de ecuaciones, puede resolverse a través del algoritmo de Thomas que se basa en el método tradicional de eliminación de Gauss o también llamado de sustitución, y cuya solución a través de un programa de computación se muestra en el Apéndice B. En una forma general el sistema matricial dado por la ecuación 123 puede escribirse como sigue:

3.- La capa de arcilla está en equilibrio antes que la sobrecarga ΔP sea aplicada, significa que no hay presión de poros en exceso, esto es, se ha disipado.

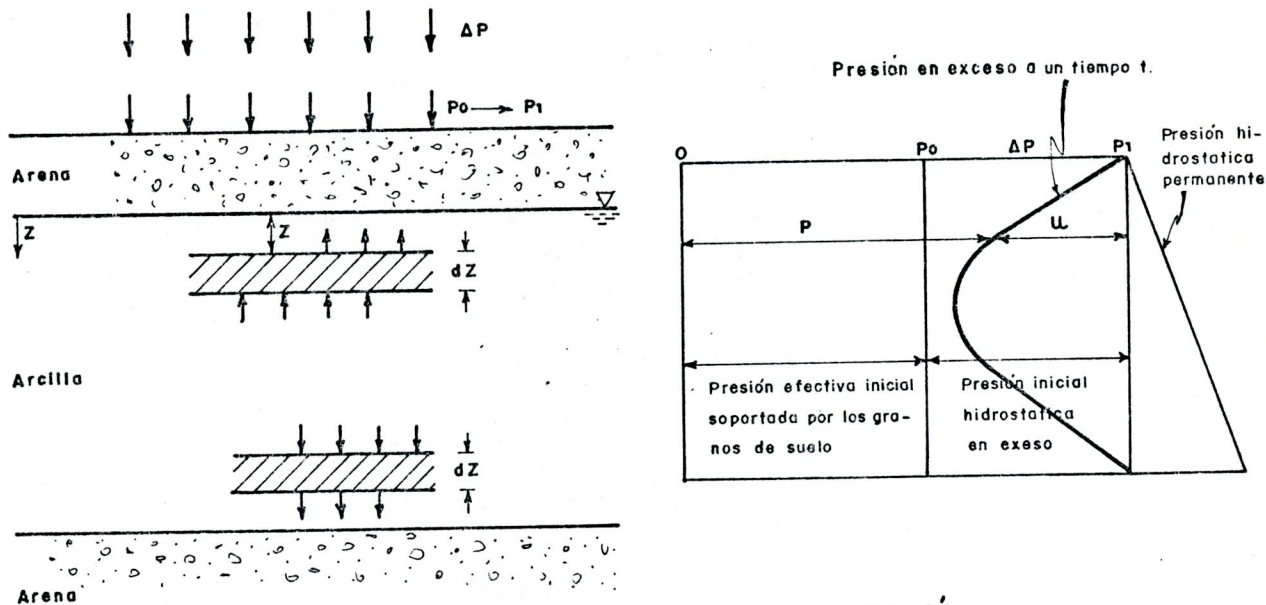


Figura 7.- Diagrama de presiones para el problema de consolidación

u = presión hidrostática en exceso a un tiempo t cualquiera. Siempre es cierto o se cumple que:

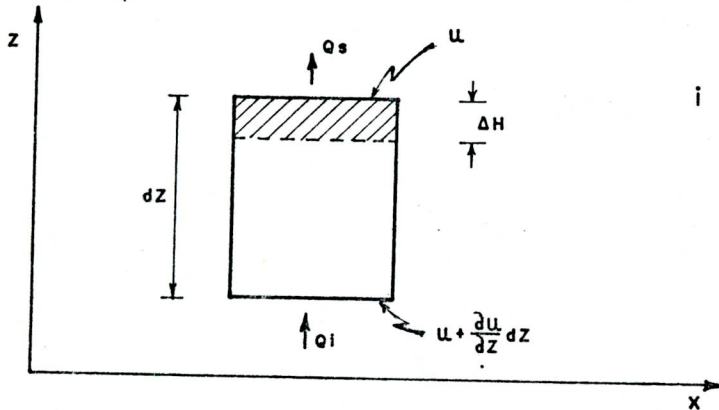
$$P_1 = P + u \quad (126)$$

P = presión efectiva soportada por los granos de los suelos. A medida que transcurre el tiempo, la presión de poros en exceso (u) se va disipando debido al drenaje y entonces P tiende a P_1 , siendo esta última la presión total.

$$u = f(z, t) \quad (127)$$

Consideremos un elemento del estrato de arcilla de área unitaria y es-

pesor dz , y vamos a determinar el agua que drena o que sale por la parte superior del elemento que hemos tomado y cuál es el agua que entra por la parte inferior del mismo elemento en un intervalo de tiempo dt .



$$i = f(x, z) \text{ (Gradiente hidráulico)}$$

$$di = \frac{\partial i}{\partial z} dz + \frac{\partial i}{\partial x} dx$$

$$di = di_z + di_x$$

La parte superior del elemento está sometida a un gradiente:

$$i_z = \frac{\partial h}{\partial z} \quad (128)$$

La parte inferior del elemento estará sometida al gradiente.

$$i_{z+dz} = i_z + di_z = i_z + \frac{\partial i}{\partial z} dz \quad (129)$$

$$\frac{u}{\gamma_w} = h \quad (130)$$

u = presión hidrostática en exceso.

Reemplazando la ecuación 130 en 128 y 129:

$$i_z = \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\gamma_w} \right) = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (131)$$

$$i_{z+dz} = i_z + \frac{\partial i_z}{\partial z} dz = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \quad (132)$$

Para determinar el caudal que en un tiempo dt drena, usamos la ecuación de Darcy:

$$Q_s = k i_z A = k \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \times 1 \quad (133)$$

$$V_s = \text{Volumen} = Q_s \times dt = k \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \times 1 \times dt \quad (134)$$

$$Q_i = k i_{z+dz} A = k \left(\frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \right) \times 1 \quad (135)$$

$$V_i = k \times \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \times 1 \times dt + k \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \times 1 \times dz \times dt \quad (136)$$

Volumen que drena en un tiempo dt .

$$V_i - V_s = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} dt + \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz dt - \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} dt$$

$$V_i - V_s = V_D = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz dt \quad (137)$$

Al drenar determinado volumen de agua lógicamente habrá una reducción en el espesor del elemento, considerado esto, habrá un asentamiento (ΔH) de la columna de suelo. Como relacionar el volumen desplazado con el asentamiento ΔH ?

Volumen de asentamiento = $\Delta H \times A = \Delta H \times 1 =$ volumen desplazado

Luego:

$$\Delta H = V_D = \frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz dt \quad (138)$$

Necesitamos ahora otra ecuación para ΔH con el fin de relacionarla con la anterior.

Supongamos que tenemos nuestra columna de suelo con una relación de vacíos inicial e_0 , un volumen de sólidos de 1 y una sección transversal también de 1; estas dos últimas suposiciones son muy comunes de aplicar en Mecánica de Suelos. El proceso y las comparaciones se muestran en la figura siguiente:

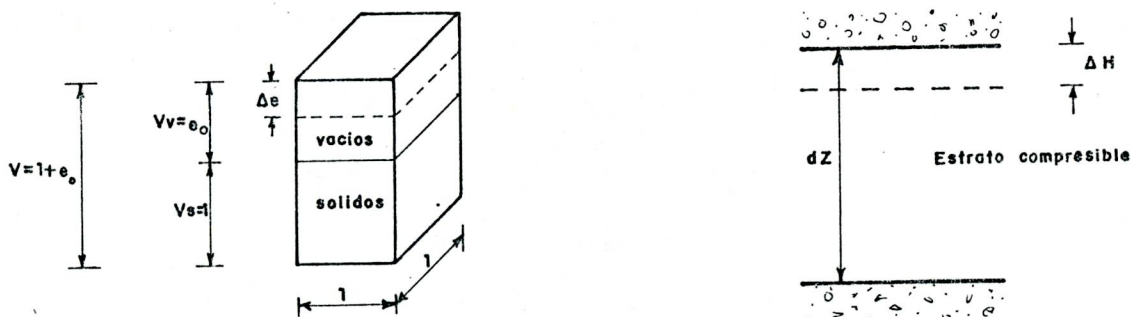
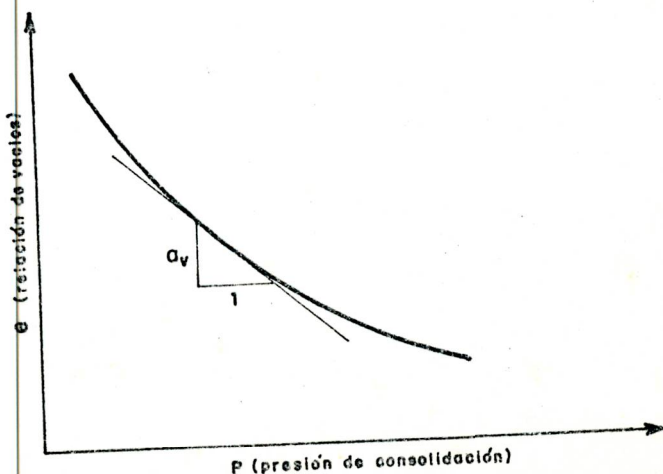


Figura 8. Comparación del asentamiento de un estrato o muestra de suelo de espesor dz , con los cambios en la altura de una muestra cuya altura inicial es $1 + e_0$.

$$\frac{\Delta H}{dz} = \frac{\Delta e}{1 + e_0} \rightarrow \Delta H = \frac{\Delta e}{1 + e_0} dz \quad (139)$$

Curvas de consolidación típicas se muestran a continuación a escala aritmética o lineal.



$$a_v = - \frac{\Delta e}{\Delta P} = - \frac{d e}{d P} \quad (140)$$

$$d e = -a_v d P \quad (141)$$

a_v = coeficiente de compresibilidad.

Reemplazando el valor (d e) de la ecuación 141 en la 139:

$$\Delta H = - \frac{a_v dP}{1 + e_0} dz \quad (142)$$

Volviendo a la ecuación 126 y tomando diferenciales

$$P_1 = P + u = \text{constante}$$

$$dP_1 = dP + du = 0 \rightarrow dP = - du \quad (143)$$

Reemplazando este valor en la ecuación 142.

$$\Delta H = \frac{a_v du}{1 + e_0} dz \quad (144)$$

Pero la diferencial total del exceso de presión hidrostática se puede expresar matemáticamente, así:

$$u = f(z, t)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} ; \text{ pero } z \text{ no varía con } t, \text{ luego:}$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (145)$$

Reemplazando este valor en la ecuación 144.

$$\Delta H = \frac{a_v}{1 + e_0} \frac{\partial u}{\partial t} dt dz \quad (146)$$

Igualando las ecuaciones 146 y 138.

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz dt = \frac{a_v}{1 + e_0} \frac{\partial u}{\partial t} dt dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k (1 + e_0)}{a_v \gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$c_v = \frac{k (1 + e_0)}{a_v \gamma_w} = \text{coeficiente de consolidación}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (147)$$

y esta es la ecuación de Terzaghi que rige la variación dinámica de la presión de poros (u) o lo que es lo mismo, del exceso de presión hidrostática, en forma unidimensional.

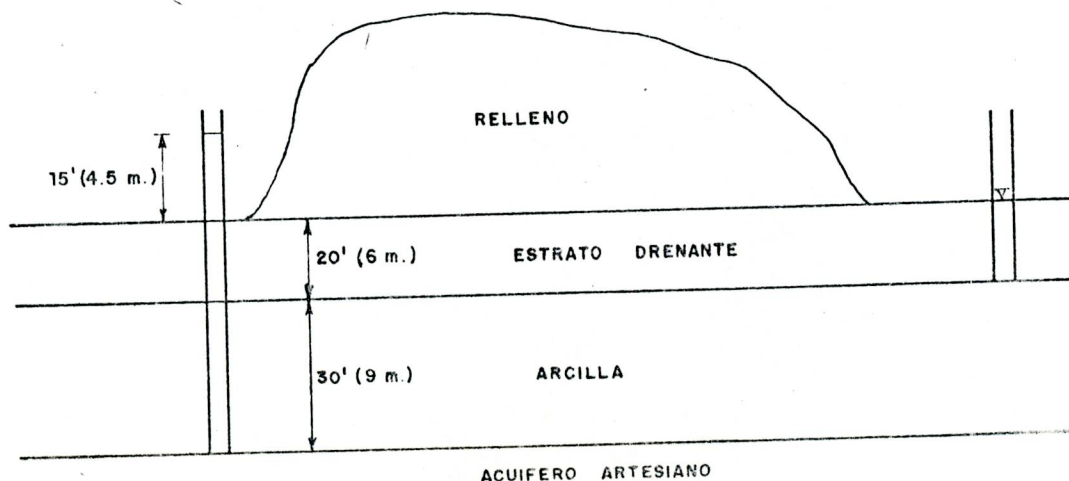
8.2. EJEMPLO DE APLICACION DEL METODO IMPLICITO DE CRANK-NICOLSON

Este ejemplo consistirá en desarrollar una solución computarizada de un problema práctico de consolidación aplicado al campo de la Ingeniería Civil, utilizando el método implícito de diferencias finitas de Crank-Nicolson.

Enunciado del Problema

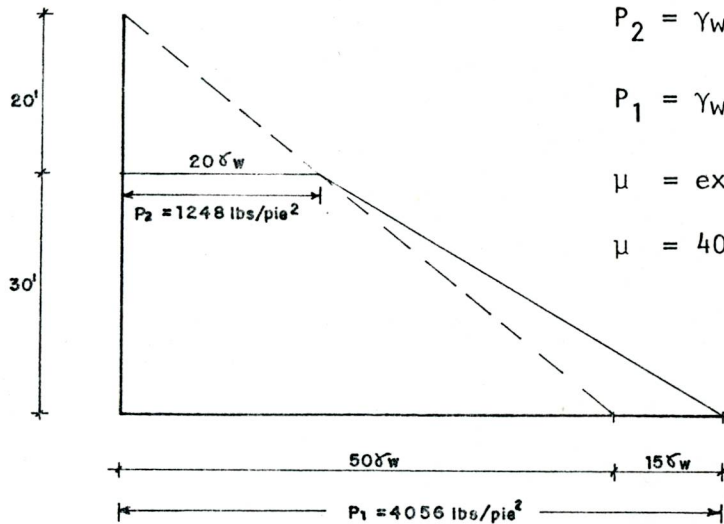
Un terraplén de una carretera ha sido justamente colocado en un sitio húmedo por debajo del cual existe un estrato de arcilla de 30 pies (9 m) de espesor el cual empieza 20' (6 m) por debajo del terreno. Un estrato de arena existe debajo del estrato de arcilla el cual está bajo presión artésiana, suficiente para elevar el agua 15' (4,5 m) por encima de la superficie del terreno antes de colocar el relleno. El peso del relleno o terraplén causará un incremento de la presión de 40 libras/pul² (275.800 N/m²).

El coeficiente de consolidación C_v en la ecuación $\frac{\partial P}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$, varía linealmente desde 1×10^{-6} pies²/seg ($0,0929 \times 10^{-6}$ m²/seg) en el fondo del estrato de arcilla hasta $0,8 \times 10^{-6}$ pies²/seg ($0,07432 \times 10^{-6}$ m²/seg) en el tope del mismo. La solución debe proveer la distribución de la presión total en la arcilla en un tiempo de 50 días para intervalos sucesivos de 2 días. En la fórmula anterior P es igual a la hidrostática más la presión hidrostática en exceso.



DESARROLLO DE LAS CONDICIONES INICIALES Y DE BORDE

Antes de colocar la sobrecarga del relleno, el estrato arcilloso se encuentra bajo las siguientes condiciones de presión hidrostática y artesiana.



$$P_2 = \gamma_w \times 20 = 62.4 \times 20 = 1248 \text{ libras/pie}^2$$

$$P_1 = \gamma_w \times 65 = 62.4 \times 65 = 4056 \text{ libras/pie}^2$$

$$\mu = \text{exceso de presión hidrostática} = 40 \text{ lbs/pul}^2$$

$$\mu = 40 \times 144 = 5760 \text{ lbs/pie}^2$$

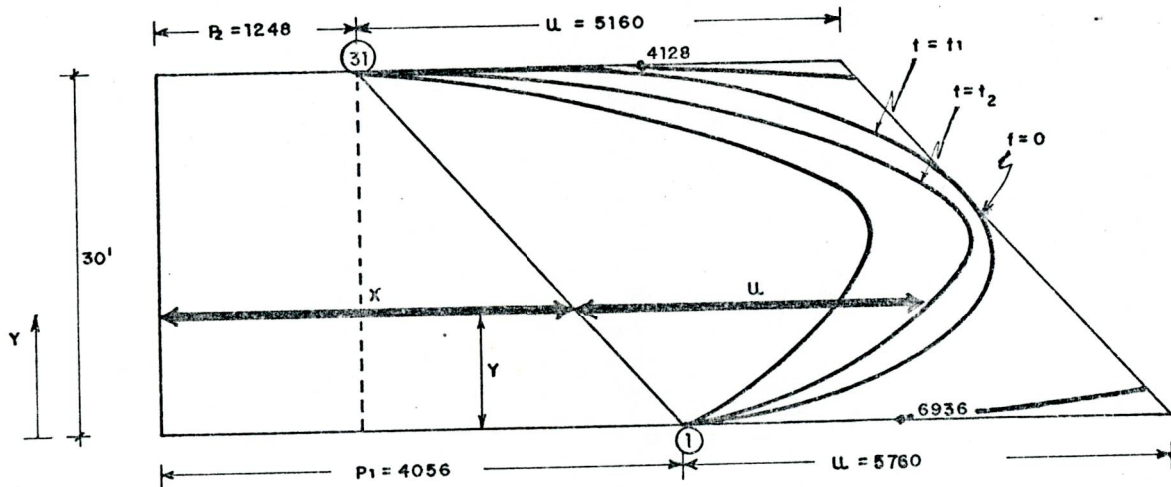
CONDICIONES DE BORDE

Antes que se desarrolle el exceso de presión de poros y una vez que ésta se disipe las condiciones hidrostáticas permanecen, lo que se incrementaría serían los esfuerzos efectivos; siendo así, las condiciones de borde en la parte inferior del estrato serían $P_1 = 4056 \text{ lbs/pie}^2$ y en la parte superior $P_2 = 1248 \text{ lbs/pie}^2$

CONDICION INICIAL ($t = 0$)

Al colocar el relleno sobre el suelo, la sobrecarga de 5760 lbs/pie^2 según la teoría de consolidación, es agarrada por el agua de los poros y no por los granos de suelos, dando origen a una sobre-elevación de la presión hidrostática instantáneamente en una cantidad equivalente a la sobrecarga; este aumento de presión hidrostática o presión de poros varía o se va disipando con el tiempo, y entonces de la misma manera los granos de suelos irán

asumiendo la sobrecarga; bajo este razonamiento las condiciones iniciales al aplicar la sobrecarga serían las siguientes:



$$P = x + u$$

$$P = P_1 - \left(\frac{P_1 - P_2}{30} \right) y + u$$

$$P = 4056 + 5760 - \left(\frac{4056 - 1248}{30} \right) y = 9816 - 93,6y$$

$$P = 9816 - 93,6 y$$

(148)

En términos generales podemos decir que la ecuación 148 es:

$$P = C_1 - C_2 y + u$$

(149)

$$P = P(y, t)$$

$$u = u(y, t)$$

Derivando parcialmente la Ecuación 149 con respecto a y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -C_2 + \frac{\partial u}{\partial y} \implies \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + C_2$$

tomando segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \quad (150)$$

Derivando parcialmente la Ecuación 149 con respecto a t .

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_2 \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

pero $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ ya que y no depende de t

luego:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (151)$$

Lo anterior significa que en la ecuación general que rige el exceso de presión hidrostática, $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, puede usarse en vez de u la presión total, P , el anterior razonamiento nos faculta entonces a utilizar la ecuación,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \text{ tal como lo plantea el enunciado del problema.}$$

COEFICIENTE DE CONSOLIDACION (c_v) Y SUS VARIACION RESPECTO A LA ALTURA

c_v (parte inferior del estrato de arcilla) = 1×10^{-6} pies²/seg = 0,0864 pies²/día.

c_v (Parte superior del estrato de arcilla) = $0,8 \times 10^{-6}$ pies²/seg = 0,06912 pies²/día.

Desarrollo del operador a utilizar en la solución computarizada

$$\frac{\partial P}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

$$\frac{1}{C_v} \frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\Delta t} = \sigma \left(\frac{P_{i+1}^{j+1} - 2P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1}}{\Delta y^2} \right) + (1 - \sigma) \left[\frac{P_{i+1}^j - 2P_i^j + P_{i-1}^j}{\Delta y^2} \right]$$

Método Implícito de Crank-Nicolson: $\sigma = 1/2$

$$\frac{1}{C_v} \frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_{i+1}^{j+1} + 2P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1}}{\Delta y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{P_{i+1}^j - 2P_i^j + P_{i-1}^j}{\Delta y^2} \right)$$

$$P_i^{j+1} - P_i^j = \frac{1}{2} \frac{\Delta t C_v}{\Delta y^2} (P_{i+1}^{j+1} - 2P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1} + P_{i+1}^j - 2P_i^j + P_{i-1}^j)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta y^2} = \lambda$$

$$P_i^{j+1} - P_i^j = \frac{C_v \lambda}{2} (P_{i+1}^{j+1} - 2P_i^{j+1} + P_{i-1}^{j+1} + P_{i+1}^j - 2P_i^j + P_{i-1}^j)$$

$$2P_i^{j+1} - 2P_i^j = C_v \lambda P_{i+1}^{j+1} - 2C_v \lambda P_i^{j+1} + C_v \lambda P_{i-1}^{j+1} + C_v \lambda P_{i+1}^j - 2C_v \lambda P_i^j + C_v \lambda P_{i-1}^j$$

$$-C_v \lambda P_{i-1}^{j+1} + 2P_i^{j+1} + 2C_v \lambda P_i^{j+1} - C_v \lambda P_{i+1}^{j+1} = C_v \lambda P_{i-1}^j + 2P_i^j - 2C_v \lambda P_i^j + C_v \lambda P_{i-1}^j$$

$$-C_v \lambda P_{i-1}^{j+1} + 2(1+C_v \lambda) P_i^{j+1} - C_v \lambda P_{i+1}^{j+1} = C_v \lambda P_{i-1}^j + 2(1-C_v \lambda) P_i^j + C_v P_{i-1}^j$$

Dividiendo la expresión anterior por $C_v \lambda$

$$- P_{i-1}^{j+1} + \frac{2(1+C_v \lambda)}{C_v \lambda} P_i^{j+1} - P_{i+1}^{j+1} = P_{i-1}^j + \frac{2(1-C_v \lambda)}{C_v \lambda} P_i^j + P_{i-1}^j$$

Definimos ahora algunos coeficientes, A y A₁

$$A = \frac{2(1+C_v \lambda)}{C_v \lambda}$$

$$A_1 = \frac{2(1-C_v \lambda)}{C_v \lambda}$$

en donde λ fue definido previamente como

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$$

y así obtenemos el operador siguiente

$$- P_{i-1}^{j+1} + A P_i^{j+1} - P_{i+1}^{j+1} = P_{i-1}^j + A_1 P_i^j + P_{i-1}^j \quad (153)$$

CALCULOS DE LOS COEFICIENTES A y A₁ PARA EL EJEMPLO EN CONSIDERACION

Se ha decidido tomar $\Delta y = 1$ pie

$$\Delta t = 2 \text{ días (imposición del problema)}$$

bajo estas circunstancias, tenemos:

$$A = \frac{2(1+C_v \lambda)}{C_v \lambda} = \frac{2}{C_v \lambda} + 2 = \frac{2 \times \Delta y^2}{C_v \Delta t} + 2 = \frac{2 \times 1^2}{C_v \times 2} + 2 = \frac{1}{C_v} + 2$$

$$A(1) = \frac{1}{C_v(1)} + 2 \quad (154)$$

de la misma manera:

$$A1(i) = \frac{1}{C_v(i)} - 2 \quad (155)$$

Se ha colocado $C_v(i)$ debido a que este coeficiente va a variar con la altura y, en este caso varía con los índices i que están asociados a las alturas.

DISCONTINUIDADES EN LOS PUNTOS $P(1, 1)$ y $P(N, 1)$

Aquí en estos dos puntos caben 3 opciones:

- 1.- Que como el terraplén no se coloca todo simultáneamente, al colocar las últimas capas ya se haya disipado algo de la presión hidrostática en exceso.
- 2.- Que no se haya disipado nada de la presión hidrostática en exceso tal como la considera la teoría de consolidación.
- 3.- Que en los extremos del estrato de arcilla ya se haya disipado la presión hidrostática en exceso.

Como un compromiso y posiblemente la solución que menos error daría sería la primera, y en ese caso en los puntos $P(1, 1)$ y $P(N, 1)$ se tendrían las siguientes presiones hidrostáticas totales:

$$P(1, 1) = 4056 + \frac{5760}{2} = 6936 \text{ lbs/pies}^2$$

$$P(N, 1) = 1248 + \frac{5760}{2} = 4128 \text{ lbs/pies}^2$$

En el Apéndice B se muestra un diagrama de flujo, el listado del programa y la solución completa del problema de consolidación en mención.

IX. BIBLIOGRAFIA

- Ames, W. F. 1977. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press. Segunda Edición.
- Carnahan, B. et al. 1969. Applied Numerical Methods. John Wiley & Sons.
- Conte, S. D, De Boor, C. 1980. Elementary Numerical Analysis. An Algorithmic Approach. Mc Graw-Hill Book Company. Tercera Edición.
- Dahlquist, G, Bjarck, A. 1974. Numerical Methods. Prentice - Hall, INC.
- Daugherty, R. L, Franzini, J. B. 1977. Fluid Mechanics With Engineering Applications. Mc Graw - Hill Book Company.
- Hildebrand, F. B. 1974. Introduction to Numerical Analysis. Mc Graw-Hill Inc. Segunda Edición.
- Henderson, F. M. 1966. Open Channel Flow. Mac Millan Publishing Co, INC. New York.
- Jeppson, R. W. 1981. Notas del Curso CE 753 "Numerical Methods" enseñado en Utah State University, Logan, Utah.
- Jeppson, R. W. 1980. Notas del Curso CE 655 "Open Channel Flow" enseñado en Utah State University, Logan, Utah.
- Mc Niven, H. D. 1980. Notas del Curso E-230A "Engineering Analysis" enseñado en la Universidad de California, Berkeley.
- Mitchell, J.K. 1979. Notas del Curso CE-122 "Soil Mechanics and Foundation Design" enseñado en la Universidad de California, Berkeley.
- Scheid, F. 1968. Theory and Problems of Numerical Analysis. Schaum's Outline Series. Mc Graw - Hill Book Company.
- Sowers, B. and Sowers F. 1970. Introductory Soil Mechanics and Foundations. Mac Millan Publishing Co, INC. New York. Tercera Edición.
- Wylie, C. R. 1975. Advanced Engineering Mathematics. Mc Graw - Hill Book Company. Tercera Edición.

A P E N D I C E . A

FORMULAS QUE DAN LAS DERIVADAS APROXIMADAS
POR DIFERENCIAS FINITAS PARA DIFERENTES
METODOS DE INTERPOLACION

Tabla A.1. Aproximación por diferencias finitas de las derivadas basadas en la fórmula de interpolación de Newton hacia adelante. Todas las derivadas han sido evaluadas en $K = 0$

Orden de Aproximación	Aproximación de la derivada por diferencias finitas
Primera Derivada, df/dx	
1º	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} (f_1 - f_0)$
2º	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{1}{2} f_2 + 2f_1 - \frac{3}{2} f_0\right)$
3º	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{3} f_3 - \frac{3}{2} f_2 + 3f_1 - \frac{11}{6} f_0\right)$
4º	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{1}{4} f_4 + \frac{4}{3} f_3 - 3f_2 + 4f_1 - \frac{25}{12} f_0\right)$
Segunda Derivada, d^2f/dx^2	
2º	$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (f_2 - 2f_1 + f_0)$
3º	$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0)$
4º	$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{11}{12} f_4 - \frac{14}{3} f_3 + \frac{19}{2} f_2 - \frac{26}{3} f_1 + \frac{35}{12} f_0\right)$
Tercera Derivada, d^3f/dx^3	
3º	$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x^3} (f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)$
4º	$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x^3} \left(-\frac{3}{2} f_4 + 7f_3 - 12f_2 + 9f_1 - \frac{5}{2} f_0\right)$
Cuarta Derivada, d^4f/dx^4	
4º	$\frac{d^4f}{dx^4} = \frac{1}{\Delta x^4} (f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0)$

Tabla A.2. Aproximación por diferencias finitas de las derivadas basadas en la fórmula de interpolación de Stirling de diferencias centrales. Todas las derivadas han sido evaluadas en $K = 0$

Orden de Aproximación	Aproximación de la derivada por diferencias finitas
Primera Derivada, df/dx	
2°	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\Delta x} (f_1 - f_{-1})$
4°	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{f_2}{12} + \frac{2}{3} f_1 - \frac{2}{3} f_{-1} + \frac{f_{-2}}{12} \right)$
Segunda Derivada, d^2f/dx^2	
2°	$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (f_1 - 2f_0 + f_{-1})$
4°	$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(-\frac{f_2}{12} + \frac{4}{3} f_1 - \frac{5}{2} f_0 + \frac{4}{3} f_{-1} - \frac{f_{-2}}{12} \right)$
Tercera Derivada, d^3f/dx^3	
4°	$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x^3} \left(\frac{f_2}{2} - f_1 + f_{-1} - \frac{f_{-2}}{2} \right)$
Cuarta Derivada, d^4f/dx^4	
4°	$\frac{d^4f}{dx^4} = \frac{1}{\Delta x^4} (f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2})$

Tabla A.3. Aproximación por diferencias finitas de las derivadas basadas en la fórmula de interpolación de Gregory-Newton hacia atrás. Todas las derivadas han sido evaluadas en $K = 0$

Orden de Aproximación	Aproximación de la derivada por diferencias finitas
Primera Derivada, df/dx	
1º	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} (f_0 - f_{-1})$
2º	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{3}{2} f_0 - 2f_{-1} + \frac{1}{2} f_{-2} \right)$
3º	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{11}{6} f_0 - 3f_{-1} + \frac{3}{2} f_{-2} - \frac{1}{3} f_{-3} \right)$
4º	$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{25}{12} f_0 - 4f_{-1} + 3f_{-2} - \frac{4}{3} f_{-3} + \frac{f_{-4}}{4} \right)$
Segunda Derivada, d^2f/dx^2	
2º	$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (f_0 - 2f_{-1} + f_{-2})$
3º	$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3})$
4º	$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{35}{12} f_0 - \frac{26}{3} f_{-1} + \frac{19}{2} f_{-2} - \frac{14}{3} f_{-3} + \frac{11}{12} f_{-4} \right)$
Tercera Derivada, d^3f/dx^3	
3º	$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x^3} (f_0 - 3f_{-1} + 3f_{-2} - f_{-3})$
4º	$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x^3} \left(-\frac{5}{2} f_0 - 9f_{-1} + 12f_{-2} - 7f_{-3} + \frac{3}{2} f_{-4} \right)$
Cuarta Derivada, d^4f/dx^4	
4º	$\frac{d^4f}{dx^4} = \frac{1}{\Delta x^4} (f_0 - 4f_{-1} + 6f_{-2} - 4f_{-3} + f_{-4})$

A P E N D I C E B

LISTADO DEL PROGRAMA PARA EL CALCULO DE
DISTRIBUCION DE PRESIONES EN UN SUELO,
DIAGRAMA DE FLUJO DEL MISMO Y SALIDA
DEL EJEMPLO PLANTEADO EN EL NUMERAL 8.2

SUBROUTINA EN FORTRAN PARA RESOLVER UN
SISTEMA TRIDIAGONAL $A \cdot F = B$

```

SUBROUTINE TRIDIA (N,C,A,F,B)
REAL G(N), A(N), F(N), B(N)
A(1)=1.0/A(1)
G(1)=A(1)*B(1)
DO 1 J=2,N
A(J)=1.0/(A(J)-A(J-1))
G(J)=A(J)*(B(J)+G(J-1))
1 CONTINUE
F(N)=G(N)
J=N
2 J=J-1
F(J)=G(J)+A(J)*F(J+1)
IF (J.GT.(1)) GO TO 2
RETURN
END

```

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & a_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1 & a_{N-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_N \end{bmatrix}$$

Si las condiciones de borde en cualquiera o en ambos de los finales (por ejemplo en 1 o N) producen valores conocidos para la variable dependiente, entonces los límites en la subrutina de arriba necesitan de ser cambiados, de lo contrario los elementos en A no corresponderán con los subíndices de las variables para los cuales se está resolviendo. Si la condición de borde en $X=0$ (por ejemplo $i=1$) produce un valor conocido entonces todos los 1 que están en () deben ser cambiados por 2, así (2) y el DO 1 J=2,N debe ser cambiado a DO 1 J=3,N.

De la misma manera si la condición de borde final produce un valor conocido, entonces N necesita ser reemplazado por N-1.

&DISPR T=00004 IS ON CRO0011 USING 00010 BLKS R=0000

```

0001 FTN7X
0002 PROGRAM DISPRE
0003 *****
0004 *
0005 * EL SIGUIENTE PROGRAMA ENCUENTRA LA DISTRIBUCION *
0006 * DE PRESIONES PARA DIFERENTES TIEMPOS DE CONSOLIDACION. *
0007 *
0008 *****
0009 REAL P(31),P1(31),B(31),A(31),CV(31),G(31),Y(31)
0010 INTEGER I
0011 WRITE(1,20)
0012 20 FORMAT(' DAR UNIDAD DE ENTRADA Y SALIDA')
0013 READ(1,*)LECT,NPRI
0014 WRITE(1,(' de los valores de N, BC1, BC2, NT, separados por coma"
0015 1)')
0016 READ(LECT,*)N,BC1,BC2,NT
0017 WRITE(NPRI,89)
0018 WRITE(NPRI,99) N,BC1,BC2,NT
0019 99 FORMAT(10X,'** DATOS **',/,10X,11('-',)/,8X,'N=',I4,/,
0020 1 8X,'Condiciones de borde:',/,8X,'BC1=',F12,3,/,8X,'BC2=',
0021 2 F12,3,/,8X,'Nro. de intervalos',/,8X,'NT=',I4,/,
0022 3 12X,'** RESULTADOS **',/,13X,16('='))
0023 DO 10 I=1,N
0024 Y(I)=1-I
0025 CV(I)=0.0864-0.000575*Y(I)
0026 10 P(I)=9816-93.6*Y(I)
0027 P(1)=6936
0028 P(31)=4128
0029 88 FORMAT(12X,' DISTRIBUCION DE PRESIONES PARA',/,12X,
0030 1 ' DIFERENTES TIEMPOS DE CONSOLIDACION, EN ESTE',/,12X,
0031 2 ' CASO ESPECIFICO SE TIENE AT=2 DIAS',/))
0032 T=0
0033 WRITE(NPRI,33)T
0034 WRITE(NPRI,34)(P(I),I=1,N)
0035 33 FORMAT(/,3X,'T=',I3)
0036 34 FORMAT(/,4(3X,6F8.2,/))
0037
0038 N1=N-1
0039 DO 45 J=1,NT
0040 DO 48 I=2,N1
0041 A(I)=1./CV(I)-2.
0042 48 B(I)=P(I-1)+A(I)*P(I)+P(I+1)
0043 P(I)=BC1
0044 P1(I)=BC1
0045 B(2)=B(2)+BC1
0046 B(N1)=B(N1)+BC2
0047 DO 75 I=2,N1
0048 75 A(I)=1./CV(I)+2.
0049 CALL TRIDIA(N,G,A,P1,B)
0050 P(N)=BC2
0051 P1(N)=BC2
0052 T=2*J
0053 WRITE(NPRI,33)T
0054 WRITE(NPRI,34)(P(I),I=1,N)
0055 DO 84 I=2,N1
0056 84 P(I)=P1(I)
0057 45 CONTINUE
0058 STOP
0059 END
0060 SUBROUTINE TRIDIA(N,G,A,P,B)
0061 REAL G(N),A(N),P(N),B(N)
0062 A(2)=1./A(2)
0063 G(2)=A(2)*B(2)
0064 N1=N-1
0065 DO 77 I=3,N1
0066 77 A(I)=1./(A(I)-A(I-1))
0067 G(I)=A(I)*(B(I)+G(I-1))
0068 P(N1)=G(N1)
0069 DO I=N-1,2,-1
0070 P(I)=G(I)+A(I)*P(I+1)
0071 END DO
0072 RETURN
0073 END

```

DISTRIBUCION DE PRESIONES PARA
 DIFERENTES TIEMPOS DE CONSOLIDACION, EN ESTE
 CASO ESPECIFICO SE TIENE AT=2 DIAS

** DATOS **

N= 31
 Condiciones de borde:
 BC1= 4056.000
 BC2= 1248.000
 Nro. de intervalos
 NT= 26

** RESULTADOS **

T= 0

6936.00	9722.40	9629.80	9535.20	9441.60	9348.00	9254.40	9160.80
9067.20	8973.60	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00
8318.40	8224.80	8131.20	8037.60	7944.00	7850.40	7756.80	7663.20
7569.60	7476.00	7382.40	7288.80	7195.20	7101.60	4128.00	

T= 2

4056.00	9086.10	9582.21	9531.91	9441.35	9347.93	9254.40	9160.80
9067.20	8973.60	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00
8318.40	8224.80	8131.20	8037.60	7944.00	7850.40	7756.80	7663.20
7569.60	7475.99	7382.27	7288.76	7162.39	6571.09	1248.00	

T= 4

4056.00	8412.36	9452.42	9516.50	9439.92	9347.94	9254.39	9160.80
9067.20	8973.60	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00
8318.40	8224.80	8131.20	8037.60	7944.00	7850.40	7756.80	7663.20
7569.59	7475.92	7381.47	7277.52	7072.99	6863.08	1248.00	

T= 6

4056.00	7913.26	9271.45	9482.67	9435.14	9347.29	9254.33	9160.79
9067.20	8973.60	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00
8318.40	8224.80	8131.20	8037.60	7944.00	7850.40	7756.80	7663.20
7569.57	7475.67	7379.00	7257.17	6948.05	5666.25	1248.00	

T= 8

4056.00	7532.59	9072.82	9430.12	9425.45	9345.85	9254.15	9160.78
9067.20	8973.60	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00
8318.40	8224.80	8131.20	8037.60	7944.00	7850.40	7756.80	7663.19
7569.49	7474.99	7373.79	7224.83	6806.73	5350.24	1248.00	

T= 10

4056.00	7234.34	8873.84	9362.14	9409.56	9342.95	9253.70	9160.71
9067.19	8973.60	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00
8318.40	8224.80	8131.20	8037.60	7944.00	7850.40	7756.80	7663.17
7569.30	7473.58	7365.04	7161.80	6660.33	5093.95	1248.00	

T= 12

4056.00	6994.91	8682.94	9282.84	9367.08	9338.04	9252.81	9160.57
9067.17	8973.60	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00
8318.40	8224.80	8131.20	8037.60	7944.00	7850.40	7756.79	7663.11
7568.91	7471.14	7352.32	7130.04	6515.36	4882.54	1248.00	

T= 14

4056.00	6798.53	8503.82	9196.00	9358.23	9330.68	9251.27	9160.30
9067.13	8973.59	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00
8318.40	8224.80	8131.20	8037.60	7944.00	7850.40	7756.79	7663.00
7568.21	7467.39	7335.58	7071.81	6375.39	4705.43	1248.00	

T= 16

4056.00	6634.40	8337.64	9104.72	9323.61	9320.61	9248.87	9159.81
9067.04	8973.58	8880.00	8786.40	8692.80	8599.20	8505.60	8412.00

8318.40 8224.80 8131.20 8037.60 7944.00 7850.40 7756.75 7662.80
7567.10 7462.10 7314.72 7088.40 6242.23 4554.95 1248.00

T= 18

4056.00 6474.96 8194.32 9011.36 9284.02 9307.69 9245.44 9159.04
9066.89 8973.55 8879.99 8786.40 8692.80 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.20 8037.60 7944.00 7850.39 7756.69 7662.47
7565.46 7455.12 7290.27 6942.02 6116.66 4425.46 1248.00

T= 20

4056.00 6374.80 8043.14 8917.69 9240.29 9291.93 9240.80 9157.88
9066.63 8973.50 8879.98 8786.40 8692.80 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.20 8037.60 7943.99 7850.37 7756.59 7661.96
7563.18 7446.37 7262.53 6873.77 5998.82 4312.76 1248.00

T= 22

4056.00 6267.98 7913.13 8824.94 9193.27 9273.43 9234.84 9156.25
9066.25 8973.42 8879.97 8786.40 8692.80 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.20 8037.60 7943.99 7850.34 7756.43 7661.23
7560.18 7435.82 7231.94 6804.68 5888.51 4213.68 1248.00

T= 24

4056.00 6177.57 7793.24 8733.96 9143.72 9252.36 9227.50 9154.08
9065.69 8973.29 8879.94 8786.39 8692.80 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.20 8037.60 7943.98 7850.29 7756.20 7660.23
7556.38 7423.49 7198.93 6735.55 5785.35 4125.79 1248.00

T= 26

4056.00 6095.34 7682.48 8645.33 9092.30 9223.95 9218.73 9151.29
9064.91 8973.10 8879.90 8786.38 8692.80 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.20 8037.57 7943.96 7850.22 7756.37 7659.91
7551.73 7407.45 7163.92 6666.97 5688.87 4047.19 1248.00

T= 28

4056.00 6021.58 7579.91 8559.38 9039.60 9203.42 9208.52 9147.82
9063.69 8972.63 8879.83 8786.37 8692.79 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.20 8037.57 7943.94 7850.11 7756.42 7657.22
7546.18 7393.80 7127.29 6599.38 5598.58 3976.40 1248.00

T= 30

4056.00 5954.94 7484.69 8476.31 8986.09 9176.04 9196.91 9143.62
9062.56 8972.46 8879.74 8786.35 8692.79 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.19 8037.56 7943.91 7849.86 7754.93 7655.13
7539.72 7376.64 7089.40 6533.89 5513.97 3912.23 1248.00

T= 32

4056.00 5894.36 7396.06 8396.21 8932.19 9147.86 9183.95 9138.66
9060.91 8971.97 8879.61 8786.32 8692.78 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.19 8037.57 7943.85 7849.75 7754.86 7652.61
7532.34 7358.11 7050.56 6468.31 5434.58 3853.73 1248.00

T= 34

4056.00 5838.98 7313.35 8319.09 8878.22 9116.70 9169.69 9132.92
9058.28 8971.34 8879.43 8786.27 8692.77 8599.20 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.19 8037.55 7943.78 7849.48 7753.11 7649.62
7524.06 7338.32 7011.04 6405.20 5359.97 3800.12 1248.00

T= 36

4056.00 5788.10 7235.98 8244.92 8824.45 9085.19 9154.21 9126.39
9056.47 8970.54 8879.20 8786.21 8692.76 8599.19 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.18 8037.53 7943.69 7849.13 7751.95 7646.15
7514.89 7317.41 6971.08 6343.83 5289.74 3750.77 1248.00

T= 38

4056.00 5741.15 7163.43 8173.62 8771.08 9052.74 9137.60 9119.06
9053.63 8969.57 8878.89 8786.12 8692.73 8599.17 8505.60 8412.00
8318.40 8224.80 8131.17 8037.49 7943.57 7848.70 7750.56 7642.17
7504.85 7295.51 6930.88 6284.25 5223.50 3705.15 1248.00

T= 40

4056.00	5697.64	7095.24	8105.09	8718.29	9017.53	9119.95	9110.95
9050.36	8968.39	8878.51	8785.01	8692.70	8599.18	8505.60	8412.09
8318.40	8224.79	8131.16	8037.45	7943.41	7848.16	7748.92	7637.68
7494.00	7272.74	6990.59	6226.47	5160.95	3662.61	1248.00	

T= 42

4056.00	5657.19	7031.02	8039.23	8666.20	8985.73	9101.35	9102.67
9046.63	8966.99	8878.04	8785.56	8692.66	8599.17	8505.59	8412.00
8318.40	8224.79	8131.15	8037.39	7943.20	7847.51	7747.02	7632.68
7482.36	7249.23	6850.38	6170.49	5101.76	3623.38	1248.00	

T= 44

4056.00	5619.44	6970.40	7975.91	8614.91	8951.48	9081.98	9092.46
9042.44	8965.36	8877.46	8785.88	8692.61	8599.15	8505.59	8412.00
8318.40	8224.78	8131.13	8037.31	7942.95	7846.73	7744.83	7627.16
7469.98	7225.07	6810.35	6116.26	5045.67	3586.53	1248.00	

T= 46

4056.00	5584.11	6913.07	7915.04	8564.50	8916.91	9061.63	9082.12
9037.77	8963.47	8878.78	8785.45	8692.54	8599.13	8505.59	8412.00
8318.39	8224.77	8131.10	8037.22	7942.54	7845.82	7742.36	7621.12
7456.92	7200.37	6770.61	6063.78	4992.43	3552.05	1248.00	

T= 48

4056.00	5550.96	6858.76	7856.47	8515.01	8882.15	9040.70	9071.11
9032.64	8961.33	8875.96	8785.17	8692.45	8599.11	8505.59	8412.00
8318.39	8224.76	8131.06	8037.10	7942.27	7844.75	7739.59	7614.56
7443.20	7175.23	6731.23	6012.94	4941.63	3519.63	1248.00	

T= 50

4056.00	5519.76	6807.21	7800.11	8466.49	8847.28	9019.16	9059.45
9027.03	8958.91	8875.02	8784.83	8692.34	8599.07	8505.57	8411.99
8318.39	8224.75	8131.02	8036.95	7941.83	7843.54	7735.51	7607.56
7428.90	7149.72	6692.28	5963.75	4893.66	3489.10	1248.00	

T= 52

4056.00	5490.34	6758.21	7745.83	8418.95	8812.39	8997.08	9047.16
9020.56	8956.20	8873.93	8784.43	8692.20	8599.03	8505.56	8411.99
8318.38	8224.73	8130.95	8036.78	7941.32	7842.16	7733.12	7600.05
7414.05	7123.92	6652.80	5916.12	4847.73	3460.29	1248.00	

