

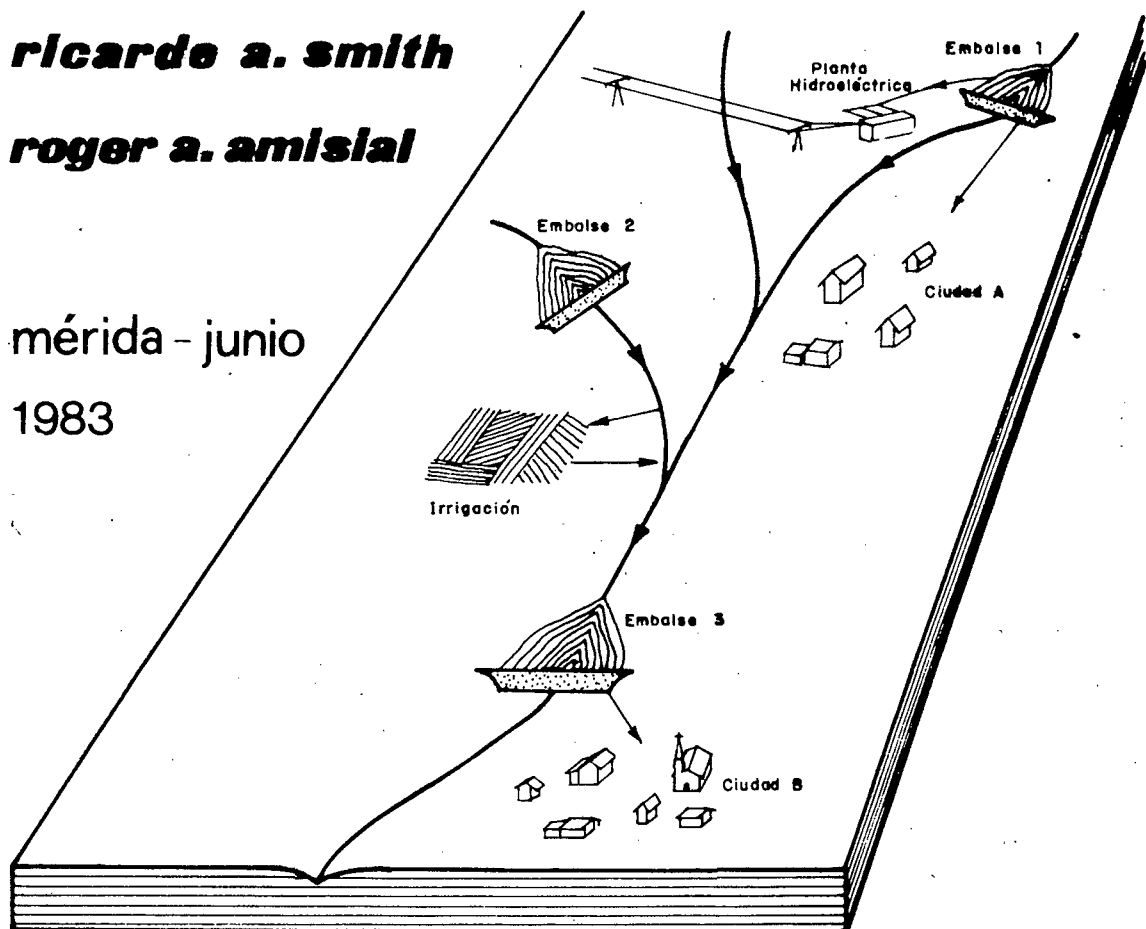
operación de embalses mediante el uso de la programación dinámica

ricardo a. smith

roger a. amislal

mérida - junio

1983



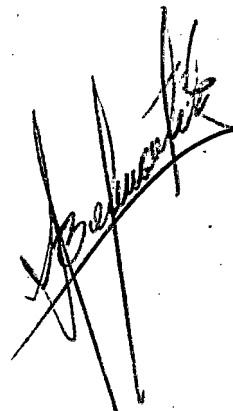
Luis C. Gutierrez V.
CIDIAT
6-47-2775



OPERACION DE EMBALSES MEDIANTE EL USO
DE LA PROGRAMACION DINAMICA

Serie: Planificación
PR-17

Ricardo A. Smith
Roger A. Amisial

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Ricardo A. Smith', written over a horizontal line.



INDICE

	Página
I. INTRODUCCION AL USO DE LA PROGRAMACION DINAMICA EN OPERACION DE EMBALSES.	1
1.1. Descripción del problema.	1
1.2. Notación y formulación.	5
1.3. Generalidades sobre la formulación del problema de programación dinámica.	12
II. ALGORITMO DE PROGRAMACION DINAMICA EN OPERACION DE EMBALSES.	20
2.1. El algoritmo general.	20
2.2. La programación dinámica discreta.	27
2.3. La programación dinámica continua.	32
2.4. Comentarios finales sobre el algoritmo de programación dinámica.	38
III. EJEMPLOS DE PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA.	44
3.1. Ejemplo de abastecimiento de agua usando programación dinámica discreta.	44
3.2. Ejemplo de hidroelectricidad usando programación dinámica discreta.	59
3.3. Ejemplo de abastecimiento de agua usando programación dinámica continua.	69
3.4. Ejemplo de operación conjunta de dos embalses usando programación dinámica.	74
IV. PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA.	82
4.1. Programación dinámica estocástica implícita, el método de Monte Carlo.	83
4.2. Programación dinámica estocástica explícita, el método de Cadenas de Markov.	89
V. EJEMPLOS DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA.	94
5.1. Ejemplo de programación dinámica estocástica explícita para el caso no-cíclico.	94
5.2. Ejemplo de programación dinámica estocástica explícita para el caso cíclico.	104
VI. CASOS DE APLICACION REAL.	118
6.1. Aplicación de la programación dinámica estocástica explícita para definir la regla de operación mensual del embalse de Salvajina sobre el río Cauca, Colombia.	118

INDICE (Continuación)

	Página
6.2. Aplicación de la programación dinámica determinística continua en la operación del embalse Guárico sobre el río Guárico, Venezuela.	162
VI. PROBLEMAS.	183
VIII. BIBLIOGRAFIA.	195

I. INTRODUCCION AL USO DE LA PROGRAMACION DINAMICA EN OPERACION DE EMBALSES

1.1. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

La vida humana se ha desarrollado alrededor de áreas en donde podía encontrar de forma confiable los recursos suficientes para su subsistencia. Sin embargo, con el aumento de la población, estos recursos que antes eran abundantes ahora son escasos. Uno de los recursos más importantes para el desarrollo de la vida humana es el agua, que es usada no sólo para su consumo sino también para usos industriales, generación de energía, preservación del ambiente, y otros múltiples usos. Si para abastecer las necesidades de agua que tiene la comunidad ésta se toma directamente del río, la variabilidad de las cantidades de agua transportadas por el río a lo largo del año harían del recurso agua un recurso poco confiable. Durante los períodos húmedos o de invierno las necesidades de agua pueden ser satisfechas tomando ésta directamente del río, pero durante los períodos secos o de sequía el agua en el río no es suficiente para satisfacer las necesidades.

Para hacer el agua del río un recurso más confiable se construyen embalses de almacenamiento. Los embalses pueden guardar las cantidades de agua sobrantes durante los períodos de invierno para luego usarlas durante los períodos de sequía. También pueden almacenarse las cantidades de agua correspondientes a crecidas o avenidas del río evitando o disminuyendo daños aguas abajo del embalse.

Un embalse que sea construido para satisfacer ciertas necesidades y que es operado independientemente de cualquier otro embalse recibe el nombre de un sistema de un embalse. Embalses que son operados en conjunto para satisfacer ciertas necesidades reciben el nombre de sistema de múltiples embalses. Cuando un sistema de embalses es construido para satisfacer un sólo propósito, abastecimiento de agua o generación de energía o control de inundaciones o cualquier otro uso, se dice que el sistema es de un sólo propósito, pero cuando

es construido para satisfacer varios propósitos al mismo tiempo se dice que el sistema es de múltiples propósitos.

El hecho de que embalses son construidos no significa que las demandas de agua van a ser siempre satisfechas. Algunos períodos pueden ser tan secos que pueden dejar el embalse completamente vacío sin posibilidades de satisfacer ningún tipo de demanda. Esta situación podría empeorarse si la demanda se satisficse totalmente. hasta el momento en que el período extremadamente seco se presenta pues esto no dejaría suficiente agua en el embalse como para satisfacer las necesidades futuras. Si la ocurrencia de estos períodos secos pudiera predecirse de algún modo los beneficiarios del agua en el embalse aceptarían racionamientos de agua ahora para tener algo de agua durante esos períodos. El criterio que define cómo usar el agua en el embalse a través del tiempo recibe el nombre de regla de operación del embalse. Esta regla es básicamente una guía para operar el embalse a fin de minimizar la ocurrencia de largos períodos de déficit y de déficits de gran magnitud.

La regla de operación de un embalse representa entonces el criterio con que se debe usar el agua del embalse. Este criterio puede definirse usando la experiencia que se tiene con embalses que se encuentran bajo circunstancias similares o usando métodos de optimización y simulación o utilizando una combinación de ambos. Los métodos de optimización son usados eficientemente para definir la regla de operación de un embalse en la medida en que ilustren el comportamiento óptimo del embalse bajo diversas circunstancias. El comportamiento u operación óptima de un embalse durante el horizonte de planificación de T períodos de tiempo se define como aquellos estados del sistema para esos T períodos de tiempo que minimizan o maximizan cierta función objetivo. La operación óptima de un embalse es pues una herramienta que sirve para definir de una forma más racional la regla de operación del mismo.

En general un embalse dado debe tratar de usarse tanto como se pueda, es decir, debe tratar de usarse para satisfacer tantos usuarios como sea posible. Todos estos usos estarán condicionados a la habilidad con que el embalse pueda modificar la distribución espacial y temporal del agua. La regla de operación del embalse es un compendio de esta habilidad y representa el camino a seguir para tener el mayor beneficio posible del embalse bajo cualquier circunstancia.

La esencia de la aplicación de análisis de sistemas en operación de embalses es el desarrollo de modelos matemáticos que pueden ser usados para encontrar las mejores políticas de operación del embalse, la regla de operación, entre muchas políticas alternativas. Estas políticas pueden ser desarrolladas dentro de dos contextos: diseño y operación.

Usadas dentro del contexto de diseño sirven como base para definir la capacidad, alcances y limitaciones de las obras en estudio. Dentro del contexto de operación pueden usarse para asegurar que lo prometido se cumpla tanto como sea posible, es decir, que las demandas que se supone el embalse debe satisfacer sean satisfechas tanto como sea posible. En el primer caso la palabra clave es confiabilidad, es decir, por ejemplo, el valor de la energía es más atractivo cuando ella está disponible, cuando es confiable, y cuando es consistente. Esta situación da lugar a la definición del término caudal seguro máximo o rendimiento firme que teóricamente corresponde al caudal máximo que puede ser entregado siempre y de manera confiable y continua.

Observe que la definición del rendimiento firme a ser suministrado por el embalse dentro del contexto de diseño afecta grandemente las decisiones dentro del contexto de operación, pues muchos de los problemas deficitarios dentro de la operación se pueden deber a que se especifica un rendimiento firme muy alto para el embalse. Debido a esto, el rendimiento firme debe definirse dentro del contexto de diseño de tal forma que exista una probabilidad aceptable de que puedan ocurrir déficits. Este es un problema interesante pues si la probabilidad de falla aceptable es cero el embalse estará completamente subutilizado

durante la mayor parte del tiempo, pero si esta probabilidad es alta el embalse reportará mayores beneficios pero ocurrirán déficits con respecto a la demanda con una frecuencia tolerable.

Dentro del análisis de sistemas una de las técnicas de optimización más utilizadas para solucionar problemas de operación y diseño de embalses es la programación dinámica.

La programación dinámica es una técnica de optimización que permite resolver problemas en donde las decisiones se toman en forma secuencial. En la mayoría de los problemas de recursos hidráulicos que incluyen algún procedimiento de optimización, se trata de determinar los valores óptimos de las variables de decisión, es decir, de aquellas variables que pueden ser controladas o cambiadas. En algunos casos estos problemas de decisión pueden ser descompuestos en componentes menores o subproblemas o etapas, con una estructura secuencial, en donde la decisión para un subproblema o etapa afecta las decisiones en todos los subproblemas o etapas restantes. Los problemas de optimización en recursos hidráulicos que pueden ser descompuestos en una secuencia de subproblemas o etapas reciben el nombre de procesos de decisión de múltiples etapas. La programación dinámica es una técnica muy conveniente para solucionar esta clase de problemas.

El uso de la programación dinámica no está restringido a ningún requisito de linealidad o convexidad, ni siquiera a requisitos de continuidad. Sin embargo, está restringida a formas específicas de la función objetivo, la cual debe ser separable, permitiendo así descomponer el problema de interés en subproblemas de decisiones secuenciales.

Existe un consenso entre los escritores más famosos del área de programación dinámica, de que la mejor forma de aprender esta técnica es a través de su uso para solucionar una gran variedad de problemas particulares. Sin embargo, se presenta ahora una formulación general de la técnica de programación dinámica antes de su aplicación a casos específicos.

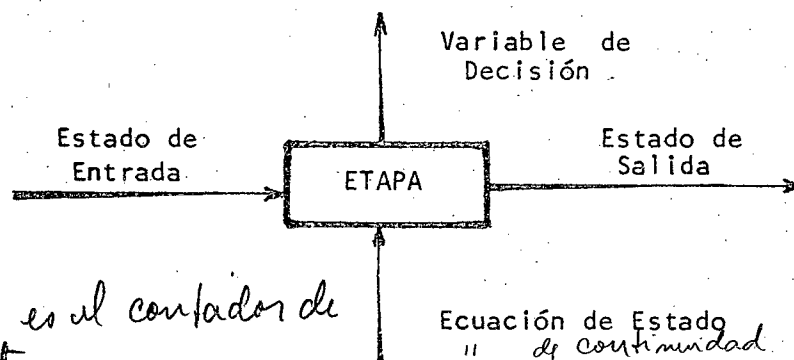
1.2. NOTACION Y FORMULACION

Para facilitar la presentación, serán definidos algunos términos de uso común en programación dinámica.

ETAPA: Es un subproblema o una porción del problema para la que una decisión separada puede ser tomada.

VARIABLE DE ESTADO: Es la variable o parámetro de enlace que transmite información entre las etapas. En cualquier etapa, la variable de estado resume el estatus actual del sistema, evitando la tediosa labor de investigar los resultados de las etapas anteriores.

VARIABLE DE DECISION: Es aquella cuyos valores pueden ser directamente manipulados en cada etapa, y están gobernados por algún tipo de ecuación o regla llamada ecuación de transformación o de estado, que relaciona esta variable con los estados de entrada y salida de la etapa. Esto se puede ver gráficamente como:



nº de Etapas es el contador de los proyectos.

FUNCION DE RETORNO: En cada etapa se toma una decisión, la cual tiene un valor o beneficio relativo representado por una función llamada la función de retorno.

FUNCION OBJETIVO: La combinación de estas funciones de retorno define la función objetivo del problema original o global. Se puede decir entonces que la

función objetivo del problema global debe ser separable, o sea, debe estar compuesta de funciones objetivos individuales (funciones de retorno) para cada etapa que depende solamente de la variable de estado y/o de la variable de decisión. En cada etapa, las funciones de retorno deben combinarse de tal forma que permita la separabilidad de la función objetivo global. Formas conocidas de separabilidad son la sumatoria de las funciones de retorno de todas las etapas, el producto de las funciones de retorno de todas las etapas, el máximo (o el mínimo) del mínimo (o del máximo) valor de las funciones de retorno de todas las etapas. La forma más común de combinación encontrada en problemas de recursos hidráulicos es la sumatoria.

Para un mejor entendimiento de los términos definidos y del procedimiento a ser explicado se presenta en forma paralela ejemplos ilustrativos a medida que se procede con la explicación teórica.

EJEMPLO 1.

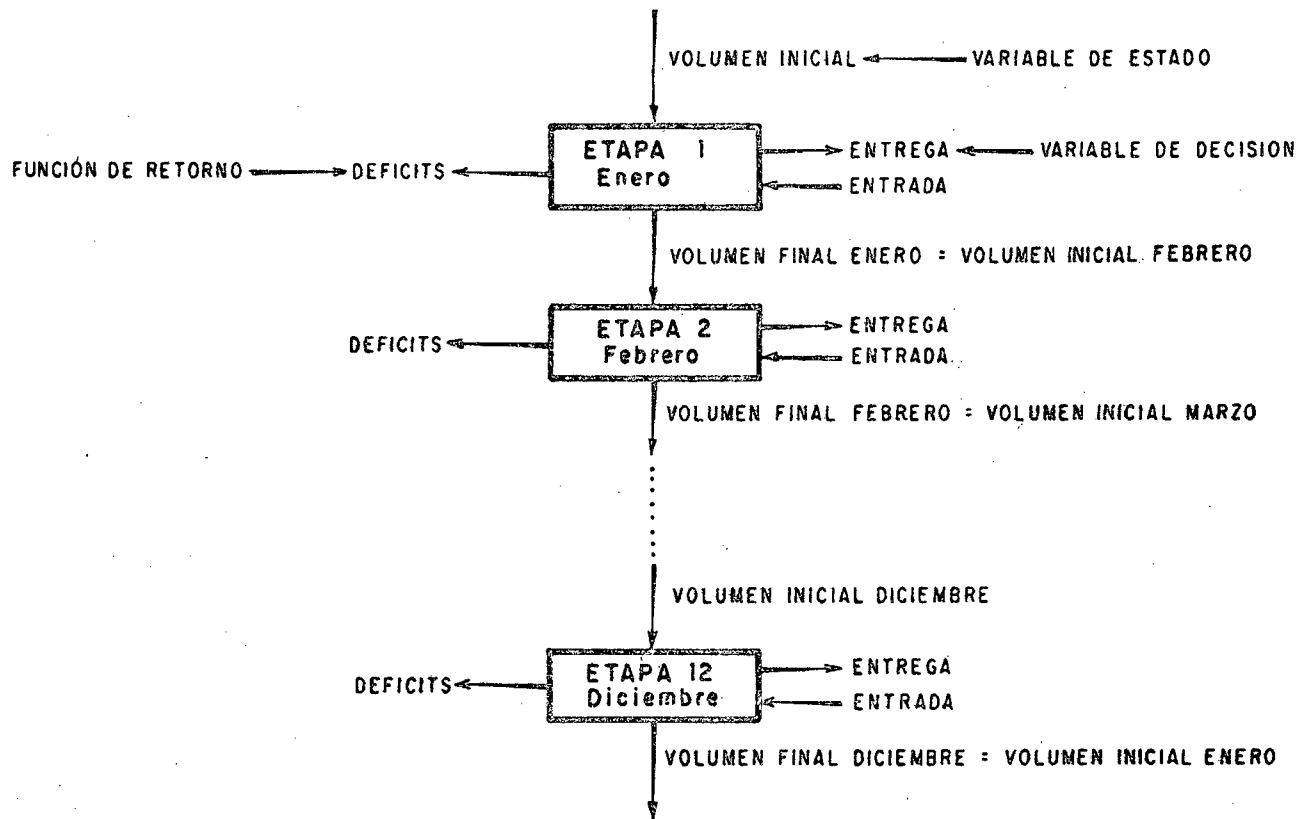
La definición de la operación mensual de un embalse para abastecimiento de agua a un distrito de riego de tal forma que se minimicen las diferencias entre el agua demandada o solicitada y el agua entregada por el embalse, es decir, que se minimicen los déficits a través del tiempo, constituye un problema con una estructura de decisiones secuenciales tal como se puede visualizar en la figura siguiente.

En este problema las etapas son los subproblemas definidos para cada uno de los meses o períodos en los cuales se toma una decisión.

La variable de estado es el volumen de agua almacenada en el embalse al inicio del mes pues es la variable que transmite información de un mes al otro o sea de un subproblema al otro. Las variables de decisión son las entregas del embalse durante el mes, pues es la única variable manipulable o controlable. La ecuación de transformación que relaciona la variable de decisión con las variables de estado para este problema está dada por la ecuación del balance de masa, que en forma muy general se puede escribir para cada eta-

pa como:

$$\text{Volumen Final} = \text{Volumen Inicial} + \text{Entradas} - \text{Entregas} \quad (1.1)$$



Cuando la ecuación de estado tiene tal forma que permite expresar la variable de decisión como una función explícita de las variables de estado, se dice que la ecuación de estado es invertible. En general los problemas de optimización a ser resueltos usando programación dinámica son más fáciles de solucionar cuando son invertibles. Observe que en el ejemplo planteado la ecuación de estado es invertible pues puede escribirse como:

$$\text{Entregas} = \text{Volumen Inicial} - \text{Volumen Final} + \text{Entradas} \quad (1.2)$$

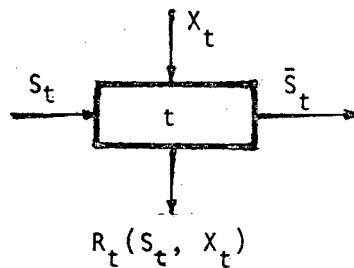
La función objetivo del problema de los déficits a través del tiempo puede escribirse como:

$$F = \text{Min} \sum_{t=1}^T (D_t - X_t) \quad (1.3)$$

en donde D_t es la demanda de agua para el mes o período t , y X_t es la cantidad de agua entregada por el embalse durante el mes t que representa la variable de decisión del problema. Como se puede ver esta función objetivo es separable pues permite definir funciones de retorno individuales para cada etapa como:

$$R_t (S_t, X_t) = D_t - X_t \quad (1.4)$$

en donde $R_t (S_t, X_t)$ es la función de retorno para el mes t que en general depende de la variable de estado de la etapa S_t y/o de la variable de decisión de la misma X_t . Esto se puede ver gráficamente como:

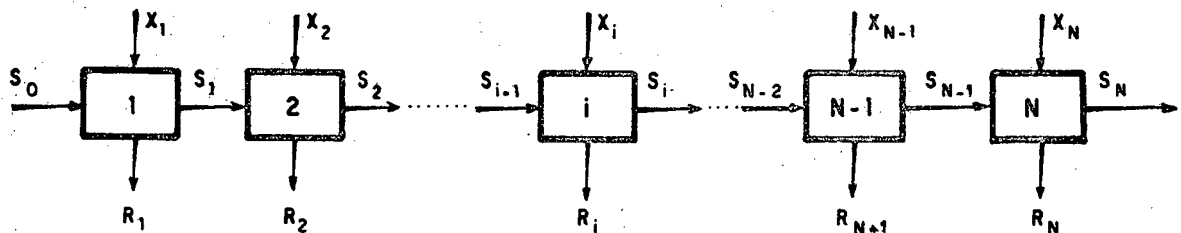


en donde t es la etapa, S_t es el estado de entrada, X_t es la decisión, \bar{S}_t es el estado de salida (en general igual a S_{t+1} , el estado de entrada para la próxima etapa) y R_t es la función de retorno.

Observe que la función de retorno depende solamente de la variable de decisión X_t como se puede ver en la ecuación (1.4). La función objetivo global es una combinación sumatoria de las funciones de retorno de cada etapa pudiendo expresarse como:

$$F = \text{Min} \sum_{t=1}^T R_t \quad (1.5)$$

El estado de salida de una etapa representa el estado de entrada de la siguiente etapa, gráficamente un problema de optimización con N etapas se puede ver como:



La función objetivo del problema original consiste en maximizar o minimizar una combinación separable de los retornos para cada etapa. La programación dinámica resuelve esta optimización multivariada secuencialmente, es decir, etapa por etapa. Es necesario entonces mantener un registro de los retornos acumulados en el proceso de decisión a medida de que éste pasa de etapa a etapa.

El primer paso para resolver el problema de optimización mediante la aplicación del algoritmo de la programación dinámica es identificar para el problema en cuestión los diferentes términos definidos anteriormente y plantear el problema dentro del formato de un proceso de múltiples etapas.

En este se puede determinar si el problema en cuestión puede ser solucionado mediante el uso de esta técnica. El formato de un proceso de múltiples etapas consiste en identificar para el problema las variables y formular las ecuaciones que forman la columna vertebral de la técnica. En resumen, la formulación del proceso consiste en:

- a. Definir las etapas
- b. Definir las variables de estado y de decisión

- c. Definir la ecuación de transformación
- d. Definir la función de retorno para cada etapa
- e. Definir las restricciones asociadas con cada etapa

Una vez que el problema original ha sido ajustado al formato de un proceso de decisión de múltiples etapas, la aplicación de la programación dinámica para resolver el problema se facilita bastante.

EJEMPLO 2:

Plantear el problema del Ejemplo 1 según el formato de un proceso de múltiples etapas.

El primer paso es definir las etapas secuenciales, y para este problema esas etapas son los subproblemas planteados, uno para cada mes de operación. El segundo paso es identificar las variables de decisión y de estado. Para el ejemplo en consideración la variable de decisión X_t es la entrega de agua del embalse durante el mes t , y la variable de estado S_t es el volumen de agua en el embalse al inicio del mes t . El tercer paso es definir la ecuación de transformación que en este caso está dada por la ecuación (1.1) y que se puede escribir como:

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t \quad (1.6)$$

en donde S_t y X_t ya fueron definidos y q_t es el volumen de agua que entra al embalse durante el mes t . Observe que esta ecuación de transformación es invertible ya que puede escribirse como:

$$X_t = S_t + q_t - S_{t+1} \quad (1.7)$$

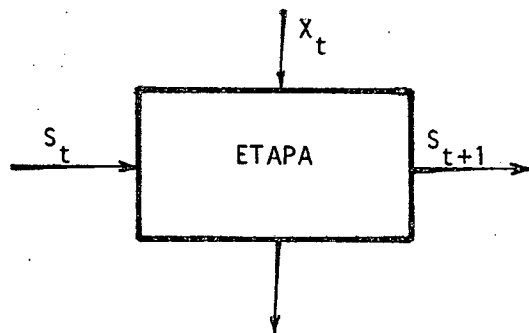
El cuarto paso es definir la ecuación de retorno, que para este ejemplo está dada por la ecuación (1.4). El quinto paso es definir las restricciones para cada etapa, que para el ejemplo bajo consideración pueden ser restriccio-

nes de almacenamiento del embalse y de capacidad de los conductos de descarga esto se puede escribir como:

$$S_{\text{MIN}} \leq S_t \leq S_{\text{MAX}} \quad (1.8a)$$

$$X_{\text{MIN}} \leq X_t \leq X_{\text{MAX}} \quad (1.8b)$$

en donde S_{MAX} y S_{MIN} son el almacenamiento máximo y mínimo del embalse respectivamente (límites de la variable de estado) y X_{MAX} y X_{MIN} son la máxima y mínima capacidad de los conductos de descarga (límites de la variable de decisión). El formato general para este ejemplo se puede poner gráficamente como:



$$R_t(X_t, S_t) = D_t - X_t$$

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t$$

$$S_{\text{MIN}} \leq S_t \leq S_{\text{MAX}}$$

$$X_{\text{MIN}} \leq X_t \leq X_{\text{MAX}}$$

Aquellos problemas de optimización que pueden ser ajustados al formato general se dice que tienen una estructura separable, es decir, tanto la función de retorno, las restricciones y la ecuación de transformación de una etapa dependen de variables de otras etapas solamente a través del estado de salida

de la etapa inmediatamente anterior. Este tipo de problemas puede ser resuelto mediante el uso del algoritmo de programación dinámica que se presenta con algún detalle a continuación.

1.3. GENERALIDADES SOBRE LA FORMULACION DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION DINAMICA

Existen dos algoritmos de programación dinámica y ambos son extensivamente usados en problemas de optimización en Recursos Hidráulicos. Ambos algoritmos reciben su nombre de acuerdo a como solucionan el problema con respecto al flujo de información. Si lo solucionan en el mismo sentido del flujo de información, es decir, empezando en el primer período de tiempo y moviéndose hacia el último período recibe el nombre de algoritmo de programación dinámica hacia adelante. Si soluciona el problema en sentido contrario al flujo de información, es decir, empezando en el último período de tiempo y moviéndose hacia el primer período recibe el nombre de algoritmo de programación dinámica hacia atrás. En el caso del algoritmo hacia atrás las etapas crecen en sentido contrario a los períodos de tiempo tal como se ilustra gráficamente en la Figura 1, pero en el caso del algoritmo hacia adelante ambos crecen en el mismo sentido como se ilustra en la Figura 2. Para cualquier período de tiempo t la ecuación de transformación para el algoritmo hacia atrás estaría dado como,

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t$$

mientras que para el algoritmo hacia adelante estaría dado como,

$$S_{t-1} = S_t + X_t - q_t$$

indicando una preferencia a calcular los estados óptimos para cada etapa en el primer caso para cada posible valor del estado de entrada y en el segundo caso para cada posible valor del estado de salida. Observe que esto es sólo una preferencia y no una norma pues una manipulación de la ecuación de transformación permitiría la definición de los estados óptimos para cada valor del estado de salida en el primer caso y del estado de entrada en el segundo caso.

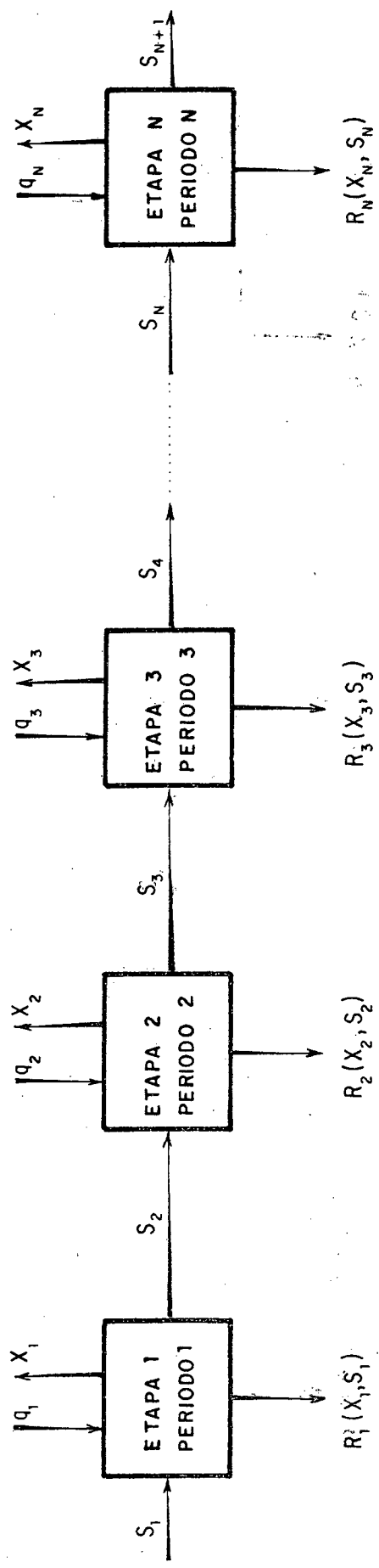


Figura 1.- Carácter Secuencial del Problema de Operación de Embalse

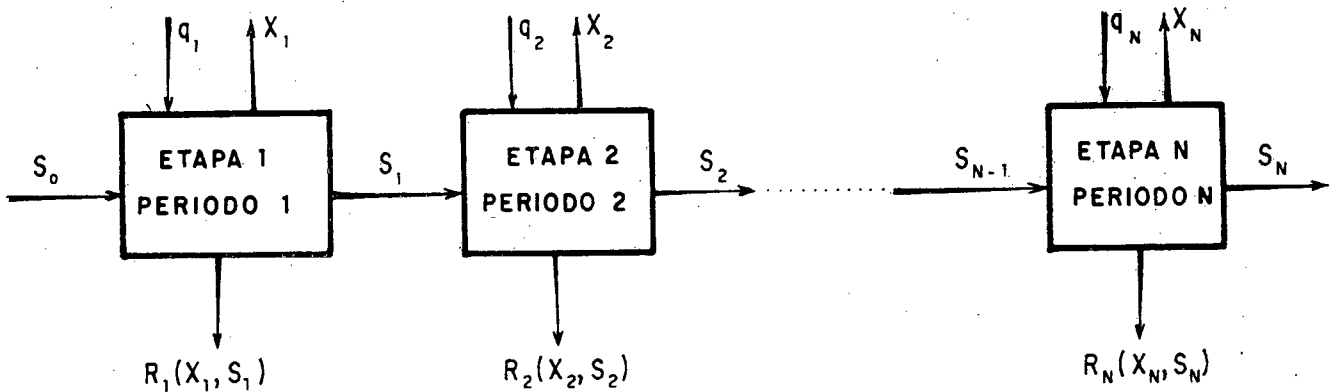


Figura 2. - Característica Secuencial del Problema de Operación de un Embalse
(algoritmo hacia adelante)

En realidad ambos algoritmos de programación dinámica dan la misma respuesta al mismo problema de optimización, pero en el caso de operación de embalses el uso del algoritmo hacia atrás no sólo ha sido mucho más popular sino que parece ajustarse mejor al desarrollo físico de este problema y es por esto que este algoritmo se presenta con más detalle acá. Sin embargo, cuando sea del caso se resaltarán las diferencias entre los dos algoritmos y cuando se presente el primer ejemplo práctico este será resuelto por ambos.

Si el problema de optimización a ser resuelto puede ser ajustado al formato general de un proceso de decisión de múltiples etapas se puede notar lo siguiente:

1. Hay exactamente N etapas en cada una de las cuales una decisión debe ser tomada.
2. Si se empieza en la etapa N , la decisión óptima en esta etapa es sólo afectada por el estado de entrada al sistema en esa etapa y por la decisión tomada en ella.

3. La etapa N-1 sólo afecta el estado de entrada a la etapa N, y la decisión óptima en esta etapa es sólo gobernada por el estado del sistema en esta etapa y por la decisión tomada en ella.
4. La etapa N-2 sólo afecta el estado de entrada a la etapa N-1 que a su vez afecta la decisión en la etapa N. La decisión óptima en la etapa N-2 sólo depende del estado del sistema en esta etapa y de la decisión tomada en ella.
5. Lo mismo se puede escribir para las etapas restantes hasta la etapa 1.

Se supone por simplicidad que la función objetivo del problema original busca minimizar o maximizar la suma de las funciones de retorno para todas las etapas, o sea:

$$\text{Min (o Max) } \left\{ \sum_{t=1}^N R_t (S_t, X_t) \right\} \quad (1.9)$$

Si se empieza primero por plantear el problema solamente para la última etapa, este se puede escribir como:

$$f_N(S_N) = \text{Min (o Max) } \{R_N (S_N, X_N)\} \quad (1.10)$$

sujeto a la ecuación de transformación y las restricciones inherentes a esta etapa. Se trata entonces de definir el valor óptimo de las variables de estado y decisión, es decir, el valor de S_N y X_N que minimice (o maximice) la función de retorno R_N . Observe que el estado del sistema está relacionado con la decisión por medio de la ecuación de transformación. Si los estados óptimos (de entrada y salida) S_N^* y S_{N+1}^* se pueden determinar de alguna manera, la decisión óptima X_N^* para esta etapa se determina simplemente usando la ecuación de estado.

Una vez resuelto el problema para la etapa N se pasa a plantear y resolver el problema para las dos últimas etapas. En este caso se trata de definir el va-

lor óptimo de las variables de estado y de decisión que minimicen (o maximicen) el retorno para las dos últimas etapas ($R_{N-1} + R_N$). La función objetivo se puede escribir entonces como:

$$f_{N-1}(S_{N-1}) = \text{Min (o Max)} \{R_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}) + R_N(S_N, X_N)\}$$

ó

$$f_{N-1}(S_{N-1}) = \text{Min (o Max)} \{R_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}) + f_N(S_N)\}$$

ó

$$f_{N-1}(S_{N-1}) = \text{Min (o Max)} \{R_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}) + f_N(S_{N-1}, X_{N-1})\}$$

que indica que sólo se debe optimizar con respecto a la variable de estado S_{N-1} y a la variable de decisión X_{N-1} de la etapa N-1.

Una vez resuelto el problema para las dos últimas etapas se pasa a resolver el problema para las tres últimas etapas. En este caso se debe definir el valor óptimo de las variables de estado y de decisión que minimicen (o maximicen) el retorno de las tres últimas etapas ($R_{N-2} + R_{N-1} + R_N$). La función objetivo en este caso se puede escribir como:

$$f_{N-2}(S_{N-2}) = \text{Min(o Máx)} \{R_{N-2}(S_{N-2}, X_{N-2}) + R_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}) + R_N(S_N, X_N)\}$$

ó

$$f_{N-2}(S_{N-2}) = \text{Min (o Max)} \{R_{N-2}(S_{N-2}, X_{N-2}) + f_{N-1}(S_{N-1})\}$$

ó

$$f_{N-2}(S_{N-2}) = \text{Min(o Max)} \{R_{N-2}(S_{N-2}, X_{N-2}) + f_{N-1}(S_{N-2}, X_{N-2})\} \quad (1.11)$$

A esta última ecuación se llega teniendo en cuenta la relación que existe entre S_{N-1} , S_{N-2} y X_{N-2} por medio de la ecuación de estado. La ecuación (1.11) indica entonces que se debe encontrar el valor óptimo de la variable de decisión X_{N-2} y de estado S_{N-2} .

En general, se puede decir que el problema a resolver en la etapa t está dado por:

$$f_t(S_t) = \text{Min(o Max)} \{R_t(S_t, X_t) + f_{t+1}(S_{t+1})\} \quad (1.12)$$

sujeto a las restricciones inherentes a la etapa t , que en general son de la forma:

$$X_{\text{MIN}} \leq X_t \leq X_{\text{MAX}}$$

$$S_{\text{MIN}} \leq S_t \leq S_{\text{MAX}}$$

en donde X_{MIN} y X_{MAX} son los límites inferior y superior para la variable de decisión, y S_{MIN} y S_{MAX} son los límites inferior y superior para la variable de estado.

El problema original planteado en la ecuación (1.9) es solucionado cuando en la ecuación (1.12) se considera $t = 1$, y se puede escribir como:

$$f_1(S_1) = \text{Min (o Max)} \{R_1(S_1, X_1) + f_2(S_2)\} \quad (1.13)$$

Si el valor de la variable de estado S_1 es conocida, el problema para esta etapa sólo tiene que ser solucionado una vez. Para el valor de S_1 hay que determinar el valor de S_2 que minimice la función objetivo de la ecuación (1.12) y el valor óptimo de la variable de decisión X_1 se determina usando la ecuación de estado. Una vez que el valor óptimo de la variable S_2 ha sido definido, el valor óptimo de los estados para todas las demás etapas se determina automáticamente pues ya se conocen de los resultados anteriores.

Si el valor de la variable de estado S_1 no es conocido, el problema se puede resolver para todos los posibles valores de esta variable. Cada valor de S_1 tendrá su trayectoria óptima de estados y un valor asociado de la función objetivo. De esta manera, se podría, si es del caso, escoger cuál es el "Mejor"

estado inicial S_1 , que sería el valor de S_1 que produzca el mínimo valor de la función objetivo.

La ecuación (1.12) representa una ecuación general para cualquier etapa t , y plantea el problema a ser resuelto en cada etapa teniendo en cuenta la solución encontrada en etapas anteriores. Esta ecuación tiene una forma general no sólo para el problema planteado sino para cualquier problema cuya función objetivo global tenga la forma de sumatoria de las funciones de retorno de cada etapa. Para los algoritmos de programación dinámica dicha ecuación recibe el nombre de ecuación o función recursiva pues su solución en forma recursiva da eventualmente la solución al problema global tal como se ha mostrado acá. La ecuación (1.12) es la ecuación recursiva cuando se usa el algoritmo de programación dinámica hacia atrás. En el caso de usarse el algoritmo hacia adelante dicha función o ecuación recursiva podría escribirse como:

$$f_t(S_t) = \text{Min (o Max)} \{R_t(S_t, X_t) + f_{t-1}(S_{t-1})\} \quad (1.14)$$

Se ha presentado en forma general en qué consiste el algoritmo de programación dinámica hacia atrás, el cual se puede resumir con el concepto básico del principio de optimalidad propuesto por Richard Bellman:

"El conjunto óptimo de decisiones en un proceso de múltiples etapas tiene la propiedad de que no importa cuál es la etapa, el estado y las decisiones iniciales, las decisiones restantes deben constituir una secuencia de decisiones óptimas para el resto del problema"

Como se anotó en la formulación la única diferencia entre el algoritmo de programación dinámica hacia atrás (presentado en detalle aquí) y el algoritmo hacia adelante es la dirección en que resuelven el problema. Sin embargo, existen algunos casos en donde sólo uno de los dos algoritmos puede ser usado. En el caso de problemas de planificación en recursos hidráulicos, problemas de selección e itinerario de proyectos, sólo el algoritmo

de programación dinámica hacia adelante puede ser usado. En el caso en que la ecuación de transformación no sea invertible el algoritmo de programación dinámica hacia atrás debe ser usado.

Las características básicas de la programación dinámica se pueden resumir en tonces como:

1. El problema original debe ser separable: la función objetivo puede ser optimizada en etapas subsecuentes en lugar de hacerse simultáneamente.
2. La programación dinámica tiene que ver con problemas en donde se toman decisiones en cada etapa.
3. Los estados y las decisiones en cada etapa están relacionados por medio de la ecuación de transformación.
4. Con cada decisión en cada etapa hay una función de retorno que evalúa la bondad de esa decisión, y la contribución que esa decisión puede tener sobre el objetivo general.
5. Dado un estado, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en las etapas anteriores.

Observe que en la discusión presentada del algoritmo de programación dinámica se asumió que la ecuación de transformación es invertible y que sólo se presenta un estado por etapa. La programación dinámica es un algoritmo que permite solucionar problemas no invertibles y de múltiples estados, pero se cree que para efectos introductorios estas suposiciones permiten un mejor entendimiento del algoritmo.

Se ha presentado brevemente en este capítulo de una forma general el algoritmo de programación dinámica. En el próximo capítulo se presenta este algoritmo dentro del contexto de operación de embalses.

II. ALGORITMO DE PROGRAMACION DINAMICA EN OPERACION DE EMBALSES

2.1. EL ALGORITMO GENERAL

La programación dinámica ha sido utilizada con cierto éxito en la determinación de la política de operación de uno o varios embalses.

El problema de operación de un embalse puede ser visto como un proceso de decisiones secuenciales en el tiempo, donde el resultado de una decisión debe ser considerado en las decisiones futuras. En efecto, la operación siempre se realiza para un horizonte de tiempo relativamente corto, el cual puede ser dividido en varios períodos de tiempo. El problema consiste en determinar la cantidad de agua a ser entregada en cada uno de los períodos con el fin de optimizar una función objetivo que depende de esa cantidad y, a veces, de la cantidad de agua que queda almacenada en el embalse.

Al principio de un período cualquiera t , el embalse contiene una cierta cantidad de agua almacenada S_t . Durante este período los ríos aportan al embalse una cierta cantidad de agua q_t , mientras que del embalse sale la entrega X_t . También se pueden considerar otras variables como la cantidad de agua evaporada durante el período y la cantidad de agua percolada en el embalse durante el mismo período, pero para efectos de simplicidad en la explicación estas "pérdidas" no se tendrán en cuenta aquí.

El almacenamiento al principio del período S_t , es entonces transformado al valor S_{t+1} , la cantidad de agua en el embalse al final del período. El valor de S_{t+1} sirve ahora de almacenamiento inicial para el siguiente período y construye el elemento de enlace de un período al siguiente. Este carácter secuencial fue resaltado gráficamente en la Figura 1. La formulación matemática del problema de operación óptima de un embalse, asumiendo que los aportes al embalse en todos los períodos son conocidos, es la siguiente:

$$\text{Maximizar } \{F_N\} \quad (2.1)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

a) Restricciones de balance de masas:

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t \quad \forall t \quad (2.2a)$$

b) Restricción de máxima descarga posible:

$$X_t \leq S_t + q_t - S_{\text{MIN}} \quad \forall t \quad (2.2b)$$

c) Restricción de almacenamiento:

$$S_{\text{MIN}} \leq S_t \leq S_{\text{MAX}} \quad \forall t \quad (2.2c)$$

d) Restricción de descarga:

$$0 \leq X_{\text{MIN}} \leq X_t \leq X_{\text{MAX}} \quad \forall t \quad (2.2d)$$

en donde F_N representa la función objetivo en todo el horizonte de operación de N períodos de tiempo, S_{MIN} y S_{MAX} son los almacenamientos mínimos y máximos permitidos en el embalse respectivamente, y X_{MIN} y X_{MAX} son las descargas mínima y máxima permitidas respectivamente.

Como se anotó anteriormente la función objetivo a ser optimizada depende en general de las cantidades de agua entregadas por el embalse, X_t , y del agua almacenada en el embalse, S_t , en cada período de tiempo t . La función objetivo del problema está entonces definida por una combinación de la contribución que cada período de tiempo hace a esa función objetivo. Esta combinación debe ser de tal forma que garantice la separabilidad del problema de tal manera que éste pueda ser solucionado mediante el algoritmo de programación dinámica. En el caso de operación de embalses esta combinación es, en general, de forma sumatoria, y si $R_t(X_t, S_t)$ es la función de retorno que mide la contribución de cada período de tiempo a la función objetivo general ésta última se podría escribir como:

$$F_N = \sum_{t=1}^N R_t(X_t, S_t) \quad (2.3)$$

en el caso de que la combinación de las funciones de retorno fuera de tipo sumatoria.

Como se dijo en el párrafo anterior, en general las funciones objetivos, en el caso de operación de embalse, son de tipo sumatoria; sin embargo, se pueden presentar casos en que estas funciones tengan otra forma y aún se pueda seguir usando el algoritmo de programación dinámica para solucionar el problema. En algunos casos de hidroelectricidad y de operación de sistemas de riego la función objetivo puede ser de forma multiplicativa y se podría escribir como:

$$F_N = \prod_{t=1}^N R_t(X_t, S_t)$$

la cual sigue garantizando la separabilidad del problema y por lo tanto su solución mediante el uso de la programación dinámica.

El problema planteado de la operación óptima de un embalse puede ser solucionado usando programación dinámica mediante el siguiente procedimiento:

1. Se identifican primero las etapas, las variables de estado y las variables de decisión.

En este problema cada subproblema planteado para un período de tiempo representa una etapa, la cantidad de agua almacenada en el embalse al inicio del período representa la variable de estado (es la variable que transmite información de una etapa a la otra), y la cantidad de agua entregada durante el período representa la variable de decisión.

2. La función objetivo se formula como una ecuación de recurrencia para cada etapa. Esta ecuación debe representar la solución óptima para cualquier etapa y las etapas restantes hasta la última etapa (el principio de optimalidad) y puede ser planteada como:

$$f_t(S_t) = \text{Max} \{R_t(X_t) + f_{t+1}(S_{t+1})\} \quad (2.4a)$$

sujeto a:

$$X_t \leq S_t + q_t - S_{\text{MIN}}$$

$$S_{\text{MIN}} \leq S_t \leq S_{\text{MAX}}$$

$$X_t \geq 0$$

en el caso que se use el algoritmo hacia adelante la función recursiva estaría dada como:

$$f_t(S_t) = \text{Max} \{R_t(X_t) + f_{t-1}(S_{t-1})\} \quad (2.4b)$$

3. La ecuación de estado o transformación está dada por la ecuación de balance de masas o continuidad que para el caso del algoritmo hacia atrás se escribe como:

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t \quad (2.5a)$$

y para el caso del algoritmo hacia adelante como:

$$S_{t-1} = S_t + X_t - q_t \quad (2.5b)$$

4. Se empieza a solucionar el problema etapa por etapa, empezando en la última o en la primera etapa de acuerdo al algoritmo usado. En el caso del algoritmo hacia atrás se calcula $f_N(S_N)$ como:

$$f_N(S_N) = \text{Max}\{R_N(X_N)\} \quad (2.6a)$$

sujeto a:

$$0 \leq X_N \leq S_N + q_N - S_{\text{MIN}}$$

$$S_{\text{MIN}} \leq S_N \leq S_{\text{MAX}}$$

En el caso del algoritmo hacia adelante se calcula $f_1(S_1)$ como:

$$f_1(S_1) = \text{Max}\{R_1(X_1)\} \quad (2.6b)$$

sujeto a:

$$0 \leq X_1 \leq S_0 + q_1 - S_{\text{MIN}}$$

$$S_{\text{MIN}} \leq S_1 \leq S_{\text{MAX}}$$

5. Se resuelve ahora la función recursiva etapa por etapa, empezando en la etapa N hasta la etapa 1. En el caso del algoritmo hacia atrás sería:

$$f_t(S_t) = \text{Max}\{R_t(X_t) + f_{t+1}(S_t + q_t - X_t)\} \quad (2.7a)$$

para $t = N-1, N-2, \dots, 2, 1$.

En el caso del algoritmo hacia adelante se empezará en la etapa 1 y se solucionará hasta la etapa N, es decir:

$$f_t(S_t) = \text{Max}\{R_t(X_t) + f_{t-1}(S_t + X_t - q_t)\} \quad (2.7b)$$

para $t = 1, 3, 4, \dots, N$

6. Una vez que se ha solucionado el problema para la primera o la última etapa se escoge el valor máximo de f_1 o de f_N y se identifica el correspondiente valor de la entrega, que representará la entrega óptima para esta etapa. En el caso del algoritmo hacia atrás se identifica X_1^* la entrega óptima en la primera etapa y en el caso del algoritmo hacia adelante X_N^* , la entrega óptima en la última etapa, el primer período de tiempo.

7. Para determinar la entrega óptima en las demás etapas se procede como sigue:

a) Para el caso del algoritmo hacia atrás se calcula:

$$S_2^* = S_1^* + q_1 - X_1^*$$

con este valor de S_2^* se identifica el valor de $f_2(S_2^*)$ y el correspondiente valor de la entrega óptima X_2^* . En cualquier etapa a partir de S_t^* y X_t^* conocidos se calcula:

$$S_{t+1}^* = S_t^* + q_t - X_t^* \quad (2.8a)$$

con este valor de S_{t+1}^* se identifica el valor de $f_{t+1}(S_{t+1}^*)$ y el valor correspondiente de X_{t+1}^* .

b) Para el caso del algoritmo hacia adelante se calcula:

$$S_{N-1}^* = S_N^* - q_N + X_N^*$$

con este valor de S_{N-1}^* se identifica el valor de $f_2(S_{N-1}^*)$ y el correspondiente valor de la entrega óptima X_{N-1}^* . En cualquier etapa a partir de S_t^* y X_t^* conocidos se calcula:

$$S_{t-1}^* = S_t^* - q_t + X_t^* \quad (2.8b)$$

con este valor de S_{t-1}^* se identifica el valor de $f_{t-1}(S_{t-1}^*)$ y el valor correspondiente de X_{t-1}^* .

La solución del problema de operación de un embalse se ha planteado usando el algoritmo de programación dinámica. El problema de operación se ha planteado en esta etapa introductoria dentro de un contexto completamente determinístico, es decir, se ha asumido que los caudales de entrada al embalse en los diferentes períodos de tiempo q_t son conocidos. La solución del problema de operación de un embalse dentro de un contexto estocástico será planteado en una sección posterior al desarrollo de ejemplos dentro del caso determinístico.

El problema de operación de embalse planteado dentro del esquema de programación dinámica puede ser solucionado usando la programación dinámica discreta o la programación dinámica continua. En el primer caso la variable de estado (los almacenamientos) es discretizada en un número razonable de valores que garanticen una solución adecuada al problema, y en el segundo caso se resuelve para cada etapa el problema de optimización usando métodos de cálculo matemático o algún método de búsqueda. La gran ventaja de la programación dinámica discreta es que su uso está generalizado para solucionar problemas de operación de embalses y presenta los resultados de una forma tabular fácil de entender. La desventaja de esta metodología es que si la discretización escogida para la variable de estado es muy grande puede encontrar una solución muy alejada del óptimo y si ésta es muy pequeña el encontrar la solución puede

tomar un tiempo interminable. La gran ventaja de la programación dinámica continua es que para ciertas formas de la función de retorno y de la ecuación de estado garantiza el óptimo global. La desventaja de esta técnica es que para funciones de retorno y ecuaciones de estado complejas no garantiza encontrar este óptimo. Se presenta ahora una breve descripción de estos dos métodos de cálculo de la programación dinámica dentro del contexto de operación de embalses y usando el algoritmo hacia atrás, pues como se dijo antes es el algoritmo más utilizado en este caso.

2.2. LA PROGRAMACION DINAMICA DISCRETA

Se describe brevemente ahora el método de cálculo de la programación dinámica discreta dentro del contexto de la operación de un embalse.

Se empieza primero por plantear el problema solamente para la última etapa, y éste se puede escribir como:

$$f_N(S_N) = \text{Min (o Max) } \{R_N(S_N, X_N)\}$$

sujeto a la ecuación de estado y las restricciones inherentes a esta etapa. Se trata de definir, para el último período de tiempo (la última etapa) y para cada valor posible del volumen de agua en el embalse al inicio del período, cuál es el volumen de agua óptimo al final del período. Es decir, para cada valor del volumen de agua al inicio del período, se calcula la descarga correspondiente a cada valor del volumen de agua al final del período, y se escoge como óptimo el volumen de agua al final del período que produzca la descarga que minimiza el déficit para el último período de tiempo. El procedimiento se puede sistematizar como sigue:

1. Discretizar el volumen inicial S_N y el final S_{N+1} , para la última etapa o sea, se definen $S_N(i)$ y $S_{N+1}(i)$, $i = 1, 2, \dots, M$, en donde $S_N(i)$ es el valor discreto i para el volumen inicial y $S_{N+1}(i)$, es el valor discreto i para el volumen final, y M es el número de valores discretos.

2. Para cada $S_N(i)$ y para cada $S_{N+1}(j)$ se calcula la descarga $X_N(i,j)$ correspondiente usando la ecuación de transformación, es decir:

Para cada $S_N(i)$, $i = 1, \dots, M$

Se calcula:

$$X_N(i,j) = S_N(i) + q_N - S_{N+1}(j), \quad j = 1, \dots, M$$

en donde $X_N(i,j)$ es la descarga correspondiente a un volumen inicial $S_N(i)$ y a un volumen final $S_{N+1}(j)$.

3. Para cada $S_N(i)$ se escoge $S_{N+1}(j)$ de tal forma que:

$$X_N(i,j) = S_N(i) + q_N - S_{N+1}(j)$$

produzca el mínimo déficit. Estos valores de $S_{N+1}(j)$ y de $X_N(i,j)$ se designan como $S_{N+1}^*(i)$ y $X_N^*(i)$.

4. Se almacenan o se guardan los valores de $S_{N+1}^*(i)$ para cada valor discreto de $S_N(i)$, $i = 1, \dots, M$.

Una vez resuelto el problema para la etapa N se pasa a resolver el problema para las dos últimas etapas. En este caso se trata de definir el valor óptimo de las variables de estado y de decisión que minimicen (o maximicen) el retorno para las dos últimas etapas ($R_{N-1} + R_N$). La función objetivo se puede escribir entonces como:

$$f_{N-1}(S_{N-1}) = \text{Min (o Max)} \{R_{N-1}(S_{N-1}) + R_N(S_N, X_N)\}$$

ó

$$f_{N-1}(S_{N-1}) = \text{Min (o Max)} \{R_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}) + f_N(S_N)\}$$

ó

$$f_{N-1}(S_{N-1}) = \text{Min (o Max)} \{R_{N-1}(S_{N-1}) + f_N(S_{N-1}, X_{N-1})\}$$

que indica que sólo se debe optimizar con respecto a la variable de estado S_{N-1} . Debido a que no se conoce el valor óptimo de S_{N-1} , el problema es resuelto para todos los posibles valores discretos de S_{N-1} . El problema se reduce entonces a:

Para cada valor de S_{N-1} encontrar

$$\text{Min (o Máx)} \{R_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}) + f_N(S_N)\}$$

Se trata entonces de encontrar el valor óptimo de la variable de decisión para la etapa N-1, para cada valor de la variable de estado S_{N-1} . Esto se resuelve de una manera similar a lo planteado para el estado N, es decir, para cada valor de S_{N-1} se determina el valor óptimo de S_N y el valor correspondiente de la variable de decisión X_{N-1} . Observe que cada valor de S_N tiene asociado un óptimo estado S_{N+1} definido en la etapa N que ya ha sido resuelta o sea, una vez que se defina el óptimo valor de S_N , el correspondiente valor óptimo de S_{N+1} se obtiene de los resultados de la última etapa.

El procedimiento será entonces como sigue:

1. Discretizar el volumen S_{N-1} para la etapa N-1, es decir, se define $S_{N-1}(i)$, $i = 1, \dots, M$, en donde $S_{N-1}(i)$ es el valor discreto i para el volumen inicial en la etapa N-1, y M es el número de valores discretos.
2. Para cada $S_{N-1}(i)$ y para cada $S_N(j)$ se calcula la descarga $X_{N-1}(i, j)$ correspondiente usando la ecuación de estado, es decir, para cada $S_{N-1}(i)$, $i = 1, \dots, M$ se calcula:

$$X_{N-1}(i,j) = S_{N-1}(i) + q_{N-1} - S_N(j), \quad j = 1, \dots, M$$

3. Para cada $S_{N-1}(i)$ se escoge el valor de $S_N(j)$, $j = 1, \dots, M$ de tal forma que la suma de:

$$R_{N-1}(X_{N-1}(i,j)) + f_N(S_N(j))$$

sea mínima. En donde $R_{N-1}(X_{N-1}(i,j))$ representa los déficits ocurridos en la etapa $N-1$ si las entregas del embalse durante esa etapa son $X_{N-1}(i,j)$, y $f_N(S_N(j))$ representa el mínimo déficit para las etapas siguientes si el volumen inicial para esas etapas es $S_N(j)$.

4. Se almacenan o se guardan los valores de $S_N^*(i)$ correspondientes a cada valor discreto de $S_{N-1}(i)$, $i = 1, 2, \dots, M$.

Una vez resuelto el problema para las dos últimas etapas se pasa a resolver el problema para las tres últimas etapas. En este caso se debe definir el valor óptimo de las variables de estado y de decisión que minimicen (o maximicen) el retorno de las tres últimas etapas ($R_{N-2} + R_{N-1} + R_N$). La función objetivo en este caso se puede escribir como:

$$f_{N-2}(S_{N-2}) = \text{Min(ó Max)} \{R_{N-2}(S_{N-2}, X_{N-2}) + R_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}) + R_N(S_N, X_N)\}$$

ó

$$f_{N-2}(S_{N-2}) = \text{Min(ó Max)} \{R_{N-2}(S_{N-2}, X_{N-2}) + f_{N-1}(S_{N-1})\}$$

ó

$$f_{N-2}(S_{N-2}) = \text{Min(ó Max)} \{R_{N-2}(S_{N-2}, X_{N-2}) + f_{N-1}(S_{N-2}, X_{N-2})\}$$

a esta última ecuación se llega teniendo en cuenta la relación que existe entre S_{N-1} , S_{N-2} y X_{N-2} por medio de la ecuación de transformación. La ecuación anterior indica entonces que se debe encontrar el valor óptimo de la variable

de decisión X_{N-2} y de estado S_{N-2} . Como el valor óptimo de la variable de estado no se conoce, el problema es resuelto para todos los valores posibles de S_{N-2} y se puede escribir como:

Para cada valor de S_{N-2} encontrar

$$\text{Min (ó Max) } \{R_{N-2}(S_{N-2}, X_{N-2}) + f_{N-1}(S_{N-2})\}$$

El procedimiento en este caso es completamente análogo al de la etapa anterior y define para cada valor discreto $S_{N-2}(i)$, $i = 1, \dots, M$ el correspondiente valor óptimo de $S_{N-1}^*(i)$.

En general, se puede escribir que el problema a resolver en la etapa t está dado por:

$$f_t(S_t) = \text{Min(ó Max) } \{R_t(S_t, X_t) + f_{t+1}(S_{t+1})\}$$

el cual es resuelto para cada valor discreto de la variable de estado S_t , de la misma forma como se ha indicado antes. Cada valor de S_t tendrá asociado una serie de valores óptimos para la variable de estado desde la etapa t hasta la última etapa N , que han sido determinados en esas etapas. El procedimiento general para esta etapa será:

1. Discretizar el volumen S_t para la etapa t , es decir, se define $S_t(i)$, $i = 1, \dots, M$, en donde $S_t(i)$ es el valor discreto i para el volumen inicial en la etapa t , y M es el número de valores discretos.
2. Para cada $S_t(i)$ y para cada $S_{t+1}(j)$ se calcula las entregas $X_t(i, j)$ correspondientes usando la ecuación de estado, es decir, para cada $S_t(i)$, $i = 1, \dots, M$ se calcula:

$$X_t(i, j) = S_t(i) + q_t - S_{t+1}(j), \quad j = 1, \dots, M$$

3. Para cada $S_t(i)$ se escoge el valor de $S_t(j)$, $j = 1, \dots, M$ de tal forma que la suma,

$$R_t(X_t(i,j)) + f_{t+1}(S_{t+1}(j))$$

sea mínima.

4. Se almacenan o se guardan los valores de $S_{t+1}^*(i)$ correspondiente a cada valor discreto de $S_t(i)$, $i = 1, \dots, M$.

El problema original es solucionado cuando se resuelve la función recursiva para la primera etapa, y se puede escribir como:

$$f_1(S_1) = \text{Min (ó Max) } \{R_1(S_1, X_1) + f_2(S_2)\}$$

Si el valor de la variable de estado S_1 es conocida, el problema para esta etapa sólo tiene que ser solucionado una vez. Para el valor de S_1 hay que determinar el valor de S_2 que minimice la función objetivo anterior y el valor óptimo de la variable de decisión X_1 se determina usando la ecuación de estado. Una vez que el valor óptimo de la variable S_2 ha sido definido, el valor óptimo de los estados para todas las demás etapas se determina automáticamente pues ya se conocen de los resultados anteriores.

Si el valor de la variable de estado S_1 no es conocido, el problema se puede resolver para cada valor discreto de esta variable. Cada valor discreto de S_1 tendrá su trayectoria óptima de estados y un valor asociado de la función objetivo. De esta manera, se podría, si es del caso, usar esta información general para definir la regla de operación del embalse.

2.3. LA PROGRAMACION DINAMICA CONTINUA

Se describe ahora brevemente el método de cálculo de la programación dinámica continua dentro del contexto de operación de embalses.

Este método de cálculo es bastante aceptable cuando se tiene una ecuación de transformación lineal y una función de retorno cuadrática, pues en estos casos existe una garantía de que los métodos de cálculo darán un mínimo (o máximo) global y no relativo. En cuanto a la ecuación de transformación se puede decir que, en los problemas de operación de embalses ésta es siempre lineal y de la forma,

$$S_{t+1} = S_t - X_t + a_t$$

en donde a_t representa un término constante (caso determinístico) que incluye tanto los aportes al embalse como las pérdidas que ocurren en él durante el período de tiempo t .

Las funciones de retorno no son siempre de forma cuadrática, sin embargo, como una primera aproximación se asume que éstas son cuadráticas. Funciones de retorno cuadráticas de uso común en operación de embalses son el cuadrado de los déficits, y el cuadrado de los déficits con respecto a una entrega prefijada más el cuadrado de la diferencia de los almacenamientos con respecto a almacenamientos prefijados. Estas funciones de retorno pueden escribir como:

$$R_t(X_t, S_t) = (D_t - X_t)^2$$

y

$$R_t(X_t - S_t) = (D_t - X_t)^2 + (G_t - S_t)^2$$

en donde, D_t es la cantidad de agua deseada del embalse, la demanda, y G_t es la cantidad de agua que se desea quede almacenada en el embalse, durante el período de tiempo t .

Se presenta ahora el método de cálculo de la programación dinámica continua para solucionar un problema de operación de embalse usando una función de retorno dada por el cuadrado de los déficits. El problema se plantea inicialmente para la última etapa como:

$$f_N(S_N) = \text{Min}\{(D_N - X_N)^2\}$$

sujeto a:

$$S_{N+1} = S_N - X_N + a_N$$

o sea:

$$X_N = S_N - S_{N+1} + a_N$$

y reemplazando esta expresión en la función recursiva anterior se puede escribir que:

$$\begin{aligned} f_N(S_N) &= (D_N - S_N + S_{N+1} - a_N)^2 \\ &= (b_N - S_N)^2 \end{aligned}$$

en donde $b_N = D_N + S_{N+1} - a_N$

El problema a ser resuelto cuando se consideran las dos últimas etapas es:

$$f_{N-1}(S_{N-1}) = \text{Min}\{(D_{N-1} - X_{N-1})^2 + f_N(S_N)\}$$

sujeto a:

$$S_N = S_{N-1} - X_{N-1} + a_{N-1}$$

o sea:

$$\begin{aligned} f_{N-1}(S_{N-1}) &= \text{Min}\{(D_{N-1} - X_{N-1})^2 + f_N(S_{N-1} - X_{N-1} + a_{N-1})\} \\ &= \text{Min}\{(D_{N-1} - X_{N-1})^2 + (b_N - S_{N-1} + X_{N-1} - a_{N-1})^2\} \end{aligned}$$

el valor de X_{N-1} que minimiza esta función recursiva se obtiene derivando la función con respecto a X_{N-1} e igualando a cero el resultado, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{N-1}}{\partial X_{N-1}} &= 2(X_{N-1} - D_{N-1}) + 2(b_N - S_{N-1} + X_{N-1} - a_{N-1}) \\ &= 4X_{N-1} + 2(b_N - D_{N-1} - S_{N-1} - a_{N-1}) = 0 \end{aligned}$$

lo cual da:

$$X_{N-1}^* = \frac{-b_N + D_{N-1} + S_{N-1} + a_{N-1}}{2}$$

la segunda derivada de la función recursiva da $4 > 0$, lo cual garantiza un mínimo. Reemplazando el valor de X_{N-1}^* en la función recursiva anterior se puede escribir que:

$$\begin{aligned} f_{N-1}(S_{N-1}) &= \left(D_N - \frac{-b_N + D_{N-1} + S_{N-1} + a_{N-1}}{2} \right)^2 \\ &+ \left(b_N - S_{N-1} + \frac{-b_N + D_{N-1} + S_{N-1} + a_{N-1}}{2} - a_{N-1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[(2D_N + b_N - D_{N-1} - S_{N-1} - a_{N-1})^2 + (b_N - S_{N-1} + D_{N-1} - a_{N-1})^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(b_{N-1} - S_{N-1})^2 + (c_{N-1} - S_{N-1})^2 \right] \end{aligned}$$

en donde $b_{N-1} = 2D_N + b_N - D_{N-1} - a_{N-1}$ y $c_{N-1} = b_N + D_{N-1} - a_{N-1}$

El problema a ser resuelto cuando se consideran las tres últimas etapas se puede escribir como:

$$f_{N-2}(S_{N-2}) = \text{Min} \{ (D_{N-2} - X_{N-2})^2 + f_{N-1}(S_{N-1}) \}$$

sujeto a:

$$S_{N-1} = S_{N-2} - X_{N-2} + a_{N-2}$$

o sea:

$$\begin{aligned} f_{N-2}(S_{N-2}) &= \text{Min} \{ (D_{N-2} - X_{N-2})^2 + f_{N-1}(S_{N-2} - X_{N-2} + a_{N-2}) \} \\ &= \text{Min} \{ (D_{N-2} - X_{N-2})^2 + \frac{1}{4} [(b_{N-1} - S_{N-2} + X_{N-2} - a_{N-2})^2 \\ &+ (c_{N-1} - S_{N-2} + X_{N-2} - a_{N-2})^2] \} \end{aligned}$$

El valor de X_{N-2} que minimiza esta función recursiva se obtiene derivando la función con respecto a X_{N-2} e igualando a cero el resultado, es decir:

$$\frac{\partial f_{N-2}}{\partial X_{N-2}} = 2(X_{N-2} - D_{N-2}) + \frac{1}{2} (b_{N-1} - S_{N-2} + X_{N-2} - a_{N-2})$$

$$+ \frac{1}{2} (c_{N-1} - S_{N-2} + X_{N-2} - a_{N-2})$$

$$\frac{\partial f_{N-2}}{\partial X_{N-2}} = 3X_{N-2} - 2D_{N-2} + \frac{1}{2} (b_{N-1} + c_{N-1}) - S_{N-2} - a_{N-2} = 0$$

lo cual da:

$$X_{N-2}^* = \frac{2D_{N-2} + S_{N-2} + a_{N-2} - \frac{1}{2} (b_{N-1} + c_{N-1})}{3}$$

La segunda derivada de la ecuación recursiva da $3 > 0$, lo cual garantiza que X_{N-2}^* es el valor que minimiza la función de retorno. Reemplazando X_{N-2}^* en la función recursiva anterior se obtendrá un resultado de la forma:

$$f_{N-2}(S_{N-2}) = \frac{1}{9} [(b_{N-2} - S_{N-2})^2 + \frac{1}{4} (c_{N-2})^2 + \frac{1}{4} (d_{N-2} + S_{N-2})^2]$$

en donde b_{N-2} , c_{N-2} y d_{N-2} son constantes función de D_{N-2} , a_{N-2} , c_{N-1} y b_{N-1} a ser determinadas.

En general el procedimiento para cada etapa es similar al presentado anteriormente para las tres últimas etapas. El problema original se resuelve cuando se resuelve la etapa 1 en donde se obtendrá una expresión de la forma:

$$X_1^* = g(S_1)$$

y

$$f_1(S_1) = h(S_1)$$

en donde $g(\)$ y $h(\)$ son funciones a ser determinadas. Una vez que estas

funciones han sido determinadas por el procedimiento de cálculo de programación dinámica continua, la solución óptima se obtiene definiendo o asumiendo un valor para S_1 y con este valor se define X_1^* y con la ecuación de transformación se define S_2 como:

$$S_2^* = S_1 - X_1^* + a_1$$

Con este valor de S_2^* se encuentra el valor de X_2^* y con estos dos valores se encuentra S_3^* como:

$$S_3^* = S_2^* - X_2^* + a_2$$

y se continua de esta forma hasta determinar S_N^* y X_N^* . Observe que la solución depende tanto del valor inicial S_1 como del valor final S_{N+1} , los cuales pueden ser dados o asumidos. El mínimo valor de la función objetivo estará dado por:

$$f_1(S_1) = h(S_1)$$

que da la respuesta al problema original.

Se ha presentado aquí el procedimiento de cálculo de la programación dinámica continua cuando se asume que la función de retorno es cuadrática. En el caso de que tanto la ecuación de estado como la función de retorno sean complejas el procedimiento de solución es similar al presentado. Incluso si las expresiones en cada etapa son tan complejas que métodos de cálculo convencional no pueden definir expresiones óptimas para la variable de decisión, podría entonces usarse algún método de búsqueda para definir el valor de dicha variable. El problema que se tiene con expresiones complejas para la función de retorno y/o para la ecuación de estado es que no hay forma de garantizar que la solución encontrada corresponda a un mínimo (o a un máximo) global y no local.

2.4. COMENTARIOS FINALES SOBRE EL ALGORITMO DE PROGRAMACION DINAMICA

Se presentan ahora unos comentarios finales sobre la aplicación del algoritmo de programación dinámica para resolver el problema de operación de embalses.

Cuando se presentó el método de cálculo de la programación dinámica discreta aparentemente todos los valores de la variable de estado para cada etapa debían ser especificados. Este trabajo es tedioso y no justificado y lo que se hace en estos casos es que una vez conocidos los límites de la variable de estado se especifica un intervalo de discretización (de acuerdo a la exactitud que se desee), y el problema es resuelto para cada etapa para todos los valores discretos de la variable de estado especificados por ese intervalo. Por ejemplo, si $S_{MAX,t}$ y $S_{MIN,t}$ son los límites máximo y mínimo para la variable de estado en el período de tiempo t , el problema de optimización para la etapa t es resuelto para los valores de S_t especificados por:

$$S_{MIN,t}, S_{MIN,t} + \Delta S, S_{MIN,t} + 2\Delta S, \dots, S_{MAX,t} - \Delta S, S_{MAX,t}$$

en donde ΔS es el intervalo de discretización. Esta forma de usar el método de cálculo de programación dinámica discreta recibe el nombre de programación dinámica diferencial discreta.

El número total de intervalos de discretización a ser considerados en cada etapa está dado como:

$$M_t = \frac{S_{MAX,t} - S_{MIN,t}}{\Delta S}$$

y la definición de este número depende de la exactitud buscada en la solución del problema. Si es muy pequeño se puede encontrar una solución alejada de la óptima pero si es grande el computador puede tomar mucho tiempo en dar la solución. Cuando el número de intervalos de discretización es inevitablemente grande, como es el caso cuando se tiene un embalse de gran capacidad, existen varias formas de reducir el número de discretizaciones a considerar y aún ob-

tener una solución dentro de la exactitud buscada. Tal vez la forma más popular de solucionar este problema es con el uso de la técnica llamada programación dinámica incremental la cual parte de definir una trayectoria inicial en base al conocimiento que se tiene del problema. Se define entonces un corredor de ancho D a ambos lados de la trayectoria inicial y se restringen las posibles soluciones a este corredor. Se resuelve el problema y se encuentra una nueva trayectoria, se define el corredor de ancho D a ambos lados de la nueva trayectoria y se vuelve a solucionar el problema. El procedimiento continúa de esta forma hasta que la trayectoria óptima encontrada no toque ningún límite del corredor artificial. Esta forma de cálculo de la programación dinámica es bastante eficiente.

El algoritmo de programación dinámica presentado en esta sección considera sólo una variable de estado y una variable de decisión por etapa. Sin embargo, en problemas de operación conjunta de múltiples embalses se tendrán más de una variable de estado por etapa, y en este caso se debe usar el algoritmo de programación dinámica multidimensional. Para el caso multidimensional la función recursiva es similar a la del caso unidimensional pero ésta se pone ahora en forma vectorial, es decir:

$$f_t(\underline{S}_t) = \text{Min} \{R_t(\underline{X}_t, \underline{S}_t) + f_{t+1}(\underline{S}_{t+1})\} \quad (2.9)$$

sujeto a:

$$\underline{S}_{t+1} = \underline{S}_t + \underline{q}_t - \underline{X}_t \quad (2.10)$$

en donde \underline{S}_t es el vector de estados al inicio del período de tiempo t , \underline{X}_t es el vector de entregas del embalse durante el período de tiempo t , y \underline{q}_t es el vector de aportaciones al embalse durante el período de tiempo t .

El problema de aplicación de programación dinámica multidimensional discreta es el exceso de combinación de estados a ser consideradas en cada etapa, que hacen que muchas veces estos problemas sean prácticamente insolubles. Los programas de programación dinámica multidimensional discreta que se conocen

llegan a solucionar problemas de 100 etapas con cinco estados por etapa y 25 intervalos de discretización para cada etapa, lo cual equivale a considerar 25^5 combinaciones en cada etapa. Cuando el problema de operación conjunta de embalses pasa de tres embalses se recomienda mejor recurrir a técnicas simplificadoras del problema tales como descomposición, simplificación, y agregación.

Con la descomposición, el problema original se divide en sus componentes principales o embalses los cuales son ahora operados individualmente, luego se sigue un proceso iterativo que volverá a recomponer el sistema original asegurando una solución para este sistema. Con la simplificación el problema original de múltiples embalses es reducido de acuerdo al conocimiento que se tiene del sistema, hasta unas dimensiones que permiten su solución. Se debe tener mucho cuidado con las simplificaciones que se hacen del sistema pues puede llegarse a resolver un problema que no tiene nada que ver con el problema que se quería resolver. Con la agregación el sistema de múltiples embalses es representado por un sistema equivalente de menores dimensiones al cual se le encuentra solución. Sigue luego un proceso iterativo que define a partir de la operación óptima del sistema equivalente la operación del sistema original de múltiples embalses.

En el algoritmo de programación dinámica presentado en esta sección no se asumieron pérdidas dentro de la ecuación de transformación. En ciertos lugares del mundo y de Venezuela existen algunas de estas pérdidas que son tan importantes como para ser incluidas en la ecuación de balance de masas. En Venezuela, por ejemplo, en el embalse Guárico sobre el río Guárico ocurren pérdidas medias anuales de $1.5 \times 10^9 \text{ m}^3$ por evaporación, y de $0.8 \times 10^9 \text{ m}^3$ por percolación o infiltración. Una de las pérdidas más comunes a incluir en la ecuación de estado es entonces la evaporación. Pero la evaporación en el embalse durante el período t es función del área media del espejo de agua durante ese período que a su vez es función del almacenamiento medio durante ese período. Se podría entonces escribir que:

$$e_t = g \left(\frac{S_t + S_{t+1}}{2} \right) \quad (2.11)$$

en donde e_t es la evaporación durante el período de tiempo t . Como se ve entonces la evaporación es función del almacenamiento inicial y del almacenamiento final durante el período de tiempo t , o sea, de la variable de estado al inicio y al final de la etapa. Pero en el problema de operación del embalse estas variables de estado no se conocen, el problema consiste en determinar su valor óptimo. El problema debe entonces resolverse en forma iterativa: Se asume un valor inicial para la variable de estado en todos los períodos de tiempo, con estos valores de la variable de estado se calcula la evaporación durante cada período de tiempo y se resuelve el problema de operación óptima del embalse, se compara los valores obtenidos para la variable de estado con los asumidos inicialmente, si son diferentes el problema se soluciona de nuevo calculando la evaporación con los nuevos valores de la variable de estado y si son iguales se ha encontrado la solución al problema. Este procedimiento iterativo puede usarse con cualquier otra "perdida" que se quiera considerar en la ecuación de transformación y que sea función del almacenamiento medio en el embalse. En la práctica se ha encontrado que este procedimiento converge en sólo 2 ó 3 iteraciones.

Para definir la operación óptima de un sistema de embalses se han usado muchas formas de la función objetivo la cual representa el problema que se quiere resolver. Siempre que sea posible se debe tratar de usar funciones objetivo que tengan cierto contenido social, es decir, que reaccionen favorablemente a los intereses de los usuarios sin llegar a perjudicar la operación del embalse. Por ejemplo, una función objetivo que minimice el cuadrado de los déficits a través del tiempo es una función que tiende a castigar más los déficits de gran magnitud que los de pequeña magnitud, produciendo una distribución más suave de los déficits a través del tiempo. En general las cantidades totales de déficits producidos por una función objetivo que no tenga contenido social y por una que si lo tenga son los mismos, pero los usuarios del sistema estarán en mejores condiciones si los déficits van ocurriendo gradualmente que si ocurren todos al mismo tiempo. Debe entonces tratar de usarse

una función objetivo de contenido social, y funciones de este tipo de uso común en operación de embalses son la minimización del cuadrado de los déficits y la minimización de los costos de operación del sistema cuando se incluye en ellos costos por racionamiento.

En el algoritmo presentado de programación dinámica se han considerado sólo restricciones en la variable de estado (los almacenamientos) y en la variable de decisión (las entregas del embalse). Puede ocurrir en algunos problemas de operación de embalses que existan restricciones adicionales a estas dos y la forma de considerar estas restricciones en el caso de la programación dinámica es por medio de funciones de castigo, que es una función que aparece en la función objetivo sólo cuando la restricción de interés ha sido violada. Un caso común en operación de embalses es que se quisiera que el agua vertida por el aliviadero no pase de cierta cantidad pues produciría daños aguas abajo del embalse. El balance de masas o ecuación de estado puede escribirse como:

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t - e_t$$

en donde todos los términos ya fueron definidos. El agua vertida por el aliviadero durante el período de tiempo t , W_t , puede calcularse como:

$$W_t = S_{t+1} - S_{MAX} \quad \text{si } S_{t+1} > S_{MAX}$$

$$W_t = 0 \quad \text{si } S_{t+1} \leq S_{MAX}$$

es decir, sólo ocurrirán vertimientos si el almacenamiento en el embalse está por encima del nivel máximo del mismo. Si ocurren vertimientos puede ocurrir que éstos estén por debajo del nivel que produce daños b y en ese caso la función recursiva es idéntica a la planteada anteriormente y se puede escribir como:

$$f_t(S_t) = \text{Min} \{R_t(S_t, X_t) + f_{t+1}(S_{t+1})\} \quad \text{si } W_t \leq b$$

pero puede ocurrir que los vertimientos estén por encima del nivel que produce daños b y en este caso la función recursiva debe incluir un término de cas tigo y se puede escribir como:

$$f_t(S_t) = \text{Min} \{R_t(S_t, X_t) + f_{t+1}(S_{t+1}) + C\} \quad \text{si } W_t > b$$

en donde C es un número muy alto (podría ser $C = 10^6$). El efecto de este término de castigo es que siempre que la restricción $W_t \leq b$ sea violada va a darle a la función recursiva un valor tan desfavorable que la solución final va a tratar de no violar esta restricción.

La programación dinámica puede considerar restricciones adicionales a las variables de estado y de decisión de la forma antes planteada, es decir, implicitamente. Este hecho es uno de los principales problemas en el uso de la programación dinámica pues cuando las restricciones adicionales son muy complejas el definir los términos de castigo no es fácil. También puede ocurrir que a pesar de usarse el término de castigo, como éste sólo castiga y no obliga, la solución óptima final sea de la forma en donde varios estados siguen violando la restricción adicional.

En el algoritmo de programación dinámica presentado se asume que los flujos de entrada al embalse son conocidos. Cuando se hace esta suposición se dice que se está usando programación dinámica determinística, y el algoritmo de programación dinámica ha sido presentado haciendo esta suposición para efectos introductorios y de mejor entendimiento.

Quando se consideran los caudales de los ríos o cualquier otra variable del problema como variables aleatorias se dice que se está usando programación dinámica estocástica. Hay dos formas de considerar la variable aleatoria en cualquier problema cuando se usa el algoritmo de programación dinámica. Una es incluyendo su distribución de probabilidades directamente en la función objetiva.

vo (que tendrá la forma de valor esperado) en lo que se conoce con el nombre de programación dinámica estocástica explícita. La otra es mediante la generación de trazas de la variable aleatoria y solucionando el problema determinísticamente para cada traza en lo que se conoce con el nombre de programación dinámica estocástica implícita. Luego se da un tratamiento estadístico a los resultados obtenidos.

En el capítulo IV se presentará en detalle los algoritmos de programación dinámica estocástica dentro del contexto de operación de embalses.

Muchos autores coinciden en anotar que la mejor forma de aprender la programación dinámica es a través de su uso para solucionar diferentes tipos de problemas. Es por esto que en el próximo capítulo se presentan ejemplos de operación óptima de embalses usando la programación dinámica determinística.

III. EJEMPLOS DE PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA

En este capítulo se presenta el uso de la programación dinámica para solucionar problemas de operación de embalses dentro de un contexto determinístico. El primer ejemplo es sobre abastecimiento de agua y el segundo es sobre generación de energía, y ambos son solucionados usando el método de cálculo de la programación dinámica discreta. El tercer ejemplo es un ejemplo de abastecimiento y es solucionado usando la programación dinámica continua. Los tres ejemplos anteriores son sobre la operación óptima de un sólo embalse. El cuarto y último ejemplo es un ejemplo de la operación óptima de dos embalses para el abastecimiento de agua y es solucionado usando el método de cálculo de la programación dinámica discreta.

3.1. EJEMPLO DE ABASTECIMIENTO DE AGUA USANDO PROGRAMACION DINAMICA DISCRETA

Un embalse tiene una capacidad útil de 1 unidad de agua, y en cualquier momento la cantidad de agua almacenada puede ser de $0, 1/3, 2/3$ ó 1 unidad de agua es decir:

$$0 \leq S_t \leq 1, 0$$

en donde S_t , es la cantidad de agua almacenada durante el período de tiempo t . El agua es derivada del embalse para ser vendida a una zona industrial y a un distrito de riego, con los siguientes beneficios o retornos:

Cantidad de Agua entregada	Beneficio obtenido al vender X_t Unidades de agua
X_t	$R_t (X_t)$
0	0
1/3	2500
2/3	4000
1	3500

La capacidad de las obras de derivación es 1 unidad de agua por mes, y el agua descargada del embalse mediante el aliviadero no es utilizada y tampoco genera beneficios ni daños. Los pronósticos de las aportaciones del río al embalse durante los próximos 3 meses son los siguientes:

Mes t	Aportaciones q_t
1 (Enero)	2/3
2 (Febrero)	1/3
3 (Marzo)	0

Al principio del primer mes se tiene en el embalse un almacenamiento igual a la tercera parte de su capacidad útil, y al final del tercer mes se quiere tener en el embalse un volumen de agua igual a las dos terceras partes de la capacidad útil.

Se quiere definir la operación óptima del embalse durante estos tres meses, es decir, definir las entregas a hacer en cada mes de tal forma que se maximicen los beneficios por la venta del agua.

Este problema se puede plantear como un problema de optimización de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar } \left\{ \sum_{t=1}^3 R_t(X_t) \right\}$$

sujeto a:

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t - W_t \quad t = 1, 2, 3$$

$$X_t + W_t \leq S_t + q_t \quad t = 1, 2, 3$$

$$0 \leq X_t \leq 1 \quad t = 1, 2, 3$$

$$0 \leq S_t \leq 1 \quad t = 1, 2, 3$$

$$W_t \geq 0 \quad t = 1, 2, 3$$

en donde W_t , es la cantidad de agua vertida por el aliviadero durante el mes t , y las demás variables ya fueron definidas.

La solución de este problema de optimización se presenta ahora usando el algoritmo de programación dinámica hacia atrás y posteriormente se hará usando el algoritmo hacia adelante. Esta solución se presenta siguiendo paso a paso el procedimiento planteado en el capítulo anterior para la programación dinámica discreta.

1. Se identifica como primera etapa el subproblema planteado para el primer mes, la segunda como el del segundo mes, y la tercera como el del tercer mes. La variable de decisión para cada etapa es la cantidad de agua entregada en el mes X_t , y la variable de estado es la cantidad de agua en el embalse al inicio del mes, S_t .

2. Se define la ecuación de recursión para cada etapa. Para la última etapa:

$$f_3(S_3) = \text{Max } \{R_3(X_3)\}$$

Sujeto a:

$$0 < X_3 < 1$$

$$0 < S_3 < 1$$

$$X_3 + W_3 < S_3 + q_3$$

$$X_3 = S_3 + q_3 - S_4 - W_3$$

$$W_3 \geq 0$$

Para la segunda etapa:

$$f_2(S_2) = \text{Max } \{R_2(X_2) + f_3(S_2 + q_2 - X_2)\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

$$X_2 + W_2 \leq S_2 + q_2$$

$$X_2 = S_2 + q_2 - S_3 - W_2$$

$$0 \leq S_2 \leq 1$$

$$W_2 \leq 1$$

Para la primera etapa:

$$f_1(S_1) = \text{Max } \{R_1(X_1) + f_2(S_1 + q_1 - X_1)\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_1 + W_1 \leq S_1 + q_1$$

$$X_1 = S_1 + q_1 - S_2 - W_1$$

$$0 \leq S_1 \leq 1$$

$$W_1 \leq 1$$

3. Se calcula $f_3(S_3)$, para todos los valores posibles de S_3 ($0 \leq S_3 \leq 1$) como:

$$f_3(S_3) = \text{Max} \{R_3(X_3)\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_3 \leq 1$$

$$X_3 = S_3 + 0 - 2/3 - W_3$$

$$W_3 \geq 0$$

Recuerde que los aportes al embalse durante la última etapa son $q_3 = 0$ y que se quiere tener un volumen de agua al final de esta etapa de $2/3$.

Los cálculos correspondientes a esta etapa se presentan en la Tabla 1, y en la cual el asterisco indica el valor de $f_3(X_3)$ para cada valor posible de S_3 . Note que sólo son posibles valores de S_3 de $2/3$ y 1 para poder garantizar un valor de S_4 de $2/3$, en vista de que no hay aportes durante esta etapa. Los cálculos por ejemplo para S_3 de $1,0$ son:

$$\begin{aligned} f_3(1,0) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_3(X_3) \\ R_3(X_3) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_3(S_3 + q_3 - W_3 - S_4) \\ R(S_3 + q_3 - W_3 - S_4) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R(1,0 + 0 - 0 - 2/3) \\ R(1,0 + 0 - 1/3 - 2/3) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R(1/3) \\ R(0) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2500 \\ 0 \end{array} \right\} = 2500 \end{aligned}$$

es decir, $f_3(1,0) = 2500$ y el valor correspondiente de X_3 es $1/3$.

Tabla 1. Cálculo de $f_3(S_3)$ para la última etapa.

S_3	X_3	W_3	$R_3(X_3)$	$f_3(S_3)$	X_3^*
2/3	0	0	0*	0	0
1	1/3	0	2500*	2500	1/3
	0	1/3	0		

4. Se resuelve la ecuación recursiva para la segunda etapa y para cada valor posible de S_2 ($0 \leq S_2 \leq 1$), es decir:

$$f_2(S_2) = \text{Max} \{ R_2(X_2) + f_3(S_3) \}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

$$X_2 \leq S_2 + 1/3 - W_2$$

$$X_2 = S_2 - S_3 + 1/3 - W_2$$

$$0 \leq S_2 \leq 1$$

$$W_2 \geq 0$$

$$S_3 \geq 2/3$$

Estos cálculos se presentan en la Tabla 2, en la cual el asterisco indica el valor de $f_2(S_2)$ para cada valor posible de S_2 . Note que sólo son posibles valores de S_2 de 1/3, 2/3 y 1, para poder garantizar $S_3 \geq 2/3$, ya que los aportes durante esta etapa fueron de 1/3. Los cálculos por ejemplo para S_2 de 2/3 son:

$$\begin{aligned}
 f_2(2/3) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_2(X_2) + f_3(S_3) \\ R_2(X_2) + f_3(S_3) \\ R_2(X_2) + f_3(S_3) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_2(S_2 + q_2 - W_2 - S_3) + f_3(S_3) \\ R_2(S_2 + q_2 - W_2 - S_3) + f_3(S_3) \\ R_2(S_2 + q_2 - W_2 - S_3) + f_3(S_3) \end{array} \right\} \\
 &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_2(2/3 + 1/3 - 0 - 1) + f_3(1) \\ R_2(2/3 + 1/3 - 1/3 - 2/3) + f_3(2/3) \\ R_2(2/3 + 1/3 - 0 - 2/3) + f_3(2/3) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_2(0) + f_3(1) \\ R_2(0) + f_3(2/3) \\ R_2(1/3) + f_3(2/3) \end{array} \right\} \\
 &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 0 + 2500 \\ 0 + 0 \\ 2500 + 0 \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2500 \\ 0 \\ 2500 \end{array} \right\} = 2500
 \end{aligned}$$

es decir, $f_2(2/3) = 2500$ y el valor correspondiente de X_2 es $1/3$ ó 0 .

Tabla 2. Cálculo de $f_2(S_2)$ para la segunda etapa.

S_2	X_2	W_2	S_3	$f_3(S_3)$	$R_2(X_2)$	$R_2(X_2) + f_3(S_3)$	$f_2(S_2)$
1/3	0	0	2/3	0	0	0*	0
2/3	0	0	1	2500	0	2500*	2500
	0	1/3	2/3	0	0	0	
	1/3	0	2/3	0	2500	2500*	
1	0	1/3	1	2500	0	2500	5000
	0	2/3	2/3	0	0	0	
	1/3	0	1	2500	2500	5000*	
	1/3	1/3	2/3	0	2500	2500	
	2/3	0	2/3	0	4000	4000	

5. Se resuelve la ecuación recursiva para la primera etapa y para $S_1 = 1/3$ es decir:

$$f_1(S_1) = \text{Max} \{R_1(X_1) + f_2(S_2)\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_1 \leq 2/3 + 1/3 - W_1$$

$$X_1 = 2/3 + 1/3 - S_2 - W_2$$

$$S_2 \geq 1/3$$

$$W_1 \geq 0$$

$$S_1 = 1/3$$

Estos cálculos se presentan en la Tabla 3, en esta tabla el asterisco in dica el valor de $f_1(S_1)$ para el valor de $S_1 = 1/3$.

Tabla 3. Cálculo de $f_1(S_1)$ para la primera etapa.

S_1	X_1	W_1	S_2	$f_2(S_2)$	$R_1(X_1)$	$R_1(X_1) + f_2(X_2)$	$f_1(S_1)$
1/3	0	2/3	0	0	0	0	
	1/3	1/3	1/3	0	2500	2500	
	2/3	0	1/3	0	4000	4000	
	0	1/3	2/3	2500	0	2500	
	1/3	0	2/3	2500	2500	5000*	5000
	0	0	1	5000	0	5000*	

6. Se escoge el valor máximo de $f_1(S_1)$ que es:

$$f_1(S_1^*) = 5000$$

que corresponde a:

$$S_1^* = 1/3, \quad X_1^* = 1/3 \quad \text{y} \quad W_1^* = 0$$

ó

$$S_1^* = 1/3, \quad X_1^* = 0 \quad \text{y} \quad W_1^* = 0$$

7. Se calcula $S_2^* = S_1^* + q_1 - X_1^* - W_1^*$ que puede tener los valores de,
 $S_2^* = 2/3$ ó $S_2^* = 1$.

- a) Para $S_2^* = 2/3$ corresponde:

$$f_2(S_2^*) = 2500 \quad (\text{Ver Tabla 2}) \quad \text{a lo cual corresponde:}$$

$$X_2^* = 0 \quad \text{y} \quad W_2^* = 0,$$

ó

$$X_2^* = 1/3 \quad \text{y} \quad W_2^* = 0$$

- b) Para $S_2^* = 1$, se tiene que $f_2(S_2^*) = 5000$ a lo que corresponde $X_2^* = 1/3$
 $W_2^* = 0$.

8. Se calcula $S_3^* = S_2^* + q_2 - X_2^* - W_2^*$ que puede tener valores de $S_3^* = 1$ ó
 $S_3^* = 2/3$.

- a) Para $S_3^* = 1$ (Ver Tabla 1) se tiene que $f_3(S_3^*) = 2500$ y $X_3^* = 1/3$ y
 $W_3^* = 0$.

- b) Para $S_3^* = 2/3$ (Ver Tabla 1) se tiene que:

$$f_3(S_3^*) = 0, \quad X_3^* = 0 \quad \text{y} \quad W_3^* = 0$$

Las políticas óptimas son entonces las siguientes:

$$X_1^* = 1/3, \quad X_2^* = 0, \quad X_3^* = 1/3$$

ó

$$X_1^* = 1/3, \quad X_2^* = 1/3, \quad X_3^* = 0$$

ó

$$X_1^* = 0, \quad X_2^* = 1/3, \quad X_3^* = 1/3$$

y todas repercutirán en el mismo beneficio neto total para los tres meses de 5000 Bs.

Si se usa el algoritmo de programación dinámica hacia adelante la solución a este problema de operación óptima es como sigue.

1. Las etapas, las variables de estado y las variables de decisión son las mismas que para el caso del algoritmo hacia atrás.
2. Se define la ecuación de recursión para cada etapa, que en forma general está dada como:

$$f_t(S_t) = \text{Max} \{R_t(X_t) + f_{t-1}(S_{t-1})\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_t \leq 1$$

$$X_t \leq S_{t-1} + q_t - W_t$$

$$X_t = S_{t-1} - S_t + q_t - W_t$$

$$0 \leq S_t \leq 1$$

3. Se calcula $f_1(S_1)$, para todos los valores posibles de S_1 como:

$$f_1(S_1) = \text{Max} \{R_1(X_1)\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_1 \leq 1$$

$$X_1 \leq 1/3 + 2/3 - W_1$$

$$X_1 = 1/3 - S_1 + 2/3 - W_1$$

$$0 \leq S_1 \leq 1$$

Recuerde que los aportes al embalse durante la primera etapa son $q = 2/3$ y el volumen almacenado al inicio del primer mes es $S_0 = 1/3$. Los cálculos para la primera etapa se presentan en la Tabla 4 en la cual el asterisco indica el valor de $f_1(S_1)$ para cada valor de S_1 . Note que $S_2 > 2/3$ para garantizar que $S_3 = 2/3$ ya que $q_3 = 0$ y por lo tanto $S_1 > 1/3$ para garantizar que $S_2 > 2/3$ ya que $q_2 = 1/3$. Los cálculos por ejemplo para $S_1 = 2/3$ son:

$$\begin{aligned} f(2/3) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_1(X_1) \\ R_1(X_1) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_1(S_0 + q_1 - W_1 - S_1) \\ R_1(S_0 + q_1 - W_1 - S_1) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_1(1/3 + 2/3 - 0 - 2/3) \\ R_1(1/3 + 2/3 - 1/3 - 2/3) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_1(1/3) \\ R_1(0) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2500 \\ 0 \end{array} \right\} = 2500 \end{aligned}$$

es decir $f_1(2/3) = 2500$ y el valor correspondiente de $X_1 = 1/3$.

Tabla 4. Cálculo de $f_1(S_1)$ para la primera etapa.

S_1	X_1	W_1	$R_1(X_1)$	$f_1(S_1)$	X_1^*
1	0	0	0*	0	0
2/3	1/3	0	2500*	2500	1/3
	0	1/3	0		
1/3	2/3	0	4000*	4000	2/3
	0	2/3	0		
	1/3	1/3	2500		

4. Se resuelve la ecuación recursiva para la segunda etapa, es decir:

$$f_2(S_2) = \text{Max} \{R_2(X_2) + f_1(S_1)\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_2 \leq 1$$

$$X_2 = S_1 + q_2 - W_2 - S_2$$

$$2/3 \leq S_2 \leq 1$$

$$W_2 \geq 0$$

Los cálculos para esta etapa se presentan en la Tabla 5, en donde el asterisco indica el valor de $f_2(S_2)$ para cada valor de S_2 . Note que sólo son posibles valores de S_2 de 2/3 y 1 para garantizar que $S_3 = 2/3$ ya que $q_3 = 0$. Los resultados por ejemplo para $S_2 = 1$ son:

$$f_2(1) = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_2(X_2) + f_1(S_1) \\ R_2(X_2) + f_1(S_1) \\ R_2(X_2) + f_1(S_1) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_2(S_1 + q_2 - W_2 - S_2) + f_1(S_1) \\ R_2(S_1 + q_2 - W_2 - S_2) + f_1(S_1) \\ R_2(S_1 + q_2 - W_2 - S_2) + f_1(S_1) \end{array} \right\}$$

$$= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_2(1 + 1/3 - 0 - 1) + f_1(1) \\ R_2(1 + 1/3 - 1/3 - 1) + f_1(1) \\ R_2(2/3 + 1/3 - 0 - 1) + f_1(2/3) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_2(1/3) + f_1(1) \\ R_2(0) + f_1(1) \\ R_2(0) + f_1(2/3) \end{array} \right\}$$

$$f_2(1) = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2500 + 0 \\ 0 + 0 \\ 0 + 2500 \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 2500 \\ 0 \\ 2500 \end{array} \right\} = 2500$$

es decir, $f_2(1) = 2500$ y X_2^* puede ser $1/3$ ó 0 .

Tabla 5. Cálculo de $f_2(S_2)$ para la segunda etapa.

S_2	X_2	W_2	S_1	$f_1(S_1)$	$R_2(X_2)$	$f_1(S_1) + R_2(X_2)$	$f_2(S_2)$
1	1/3	0	1	0	2500	2500*	2500
	0	1/3	1	0	0	0	
	0	0	2/3	2500	0	2500*	
2/3	2/3	0	1	0	4000	4000	5000
	0	2/3	1	0	0	0	
	1/3	1/3	1	0	2500	2500	
	1/3	0	2/3	2500	2500	5000*	
	0	1/3	2/3	2500	0	2500	
	0	0	1/3	4000	0	4000	

5. Se resuelve la ecuación recursiva para la tercera y última etapa, es decir:

$$f_3(S_3) = \text{Max} \{R_3(X_3) + f_2(S_2)\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq X_3 \leq 1$$

$$X_3 = S_2 + q_3 - W_3 - S_3$$

$$S_3 = 2/3$$

$$W_3 \geq 0$$

Los cálculos para esta etapa se presentan en la Tabla 6.

Tabla 6. Cálculo de $f_3(S_3)$ para la tercera y última etapa.

S_3	X_3	W_3	S_2	$f_2(S_2)$	$R_3(X_3)$	$f_2(S_2)+R_3(X_3)$	$f_3(S_3)$
2/3	0	0	2/3	5000	0	5000*	5000
	1/3	0	1	2500	2500	5000*	
	0	1/3	1	2500	0	2500	

6. Se escoge el valor de $f_3(S_3)$ que es:

$$f_3(S_3) = 5000$$

que corresponde a:

$$X_3^* = 1/3, \quad S_2^* = 1 \quad \text{y} \quad W_3^* = 0$$

ó

$$X_3^* = 0, \quad S_2^* = 2/3 \quad \text{y} \quad W_3^* = 0$$

7. Con estos valores de S_2^* se entra en la Tabla 5 y se obtiene que:

a) Para $S_2^* = 1$ puede ser:

$$X_2^* = 1/3, \quad S_1^* = 1 \quad \text{y} \quad W_2^* = 0$$

ó

$$X_2^* = 0, \quad S_1^* = 2/3 \quad \text{y} \quad W_2^* = 0$$

b) Para $S_2^* = 2/3$ se obtiene:

$$X_2^* = 1/3, \quad S_1^* = 2/3 \quad \text{y} \quad W_2^* = 0$$

8. Con estos valores de S_1^* se entra en la Tabla 4 y se obtiene que:

a) Para $S_1^* = 1$, $X_1^* = 0$ y $W_1^* = 0$

b) Para $S_1^* = 2/3$, $X_1^* = 1/3$ y $W_1^* = 0$

Las políticas óptimas son entonces las siguientes:

$$X_1^* = 0, \quad X_2^* = 1/3, \quad X_3^* = 1/3$$

ó

$$X_1^* = 1/3, \quad X_2^* = 1/3, \quad X_3^* = 0$$

ó

$$X_1^* = 1/3, \quad X_2^* = 0, \quad X_3^* = 1/3$$

con un beneficio neto total de 5000 Bs.

Como se puede observar la aplicación del algoritmo de programación dinámica hacia adelante produce los mismos resultados que el algoritmo hacia atrás. Sin embargo, dada la popularidad del uso del algoritmo hacia atrás para solucionar problemas de operación de embalses, es este el algoritmo que se usa para solucionar los siguientes problemas.

3.2. EJEMPLO DE HIDROELECTRICIDAD USANDO PROGRAMACION DINAMICA DISCRETA

Inicialmente se definen algunos términos de uso común en el caso de operación de un embalse con fines de generación de energía hidroeléctrica, y se plantea también el problema general de optimización dentro de un contexto de diseño y dentro de uno de operación, aunque el ejemplo numérico solucionado es para la operación óptima de un embalse. Una cantidad de agua X (volumen por unidad de tiempo) cayendo una altura efectiva h sobre las turbinas dan una potencia de:

$$P = KXh \quad (\text{KW}) \quad (3.1)$$

Si se tiene información sobre la relación entre almacenamientos y alturas en el embalse se puede decir que la energía firme total en KW-horas durante las horas picos (horas en que ocurre la demanda pico) de cualquier mes t es una función del caudal promedio a través de las turbinas y del almacenamiento medio en el embalse durante el mes t , multiplicado por el número total de horas pico en el mes, es decir:

$$P_t = K X_t h \left(\frac{S_t + S_{t+1}}{2} \right) \Delta t \quad (3.2)$$

en donde $h (S_t + S_{t+1}/2)$ está indicando que la altura neta sobre las turbinas es una función del almacenamiento medio en el embalse durante el mes, Δt es el número de horas pico en el mes t , y P_t es la energía firme total para el mes.

Se puede también asumir que se conocen coeficientes de distribución mensual de energía b_t los cuales permiten determinar la energía firme mensual a partir de la energía firme total para el año, es decir, si P es la energía firme total para el año se puede escribir que:

$$P_t = b_t P \quad (3.3)$$

Dentro de un contexto de diseño lo que interesa es definir el nivel de P que maximiza los beneficios obtenidos del embalse. Este problema de optimización puede escribirse como:

$$\text{Max } \{P\}$$

y está sujeto a las siguientes restricciones:

a) La ecuación de balance de masas,

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t - e_t \quad \forall t$$

en donde q_t representa los flujos de entrada al embalse durante el mes t , e_t la evaporación durante ese mes, y las demás variables ya fueron definidas.

b) Límites en los almacenamientos,

$$S_{\text{MIN}} \leq S_t \leq S_{\text{MAX}} \quad \forall t$$

c) Límites en las descargas del embalse,

$$X_{\text{MIN}} \leq X_t \leq X_{\text{MAX}} \quad \forall t$$

d) Límites en la producción de energía,

$$P_{\text{MIN}} \leq P_t \leq P_{\text{MAX}} \quad \forall t$$

en donde:

$$P_t = KX_t h \left(\frac{S_t + S_{t+1}}{2} \right) \Delta t \quad \forall t$$

$$P_t = b_t P$$

Esta última restricción es necesaria para evitar daños en las turbinas y para no exceder la capacidad generadora de las mismas.

El problema de optimización anterior sirve para determinar el rendimiento firme de generación de energía del embalse y se plantea dentro de un contexto de diseño. Dentro del contexto de operación interesa determinar la cantidad de energía a ser generada por el embalse de tal forma que se minimice cierta función de retorno. Este problema de optimización puede entonces escribirse como:

$$\text{Min } \sum_{t=1}^N \{R_t\} \quad (3.4)$$

en donde N es el horizonte de operación y R_t es la función de retorno definida como:

$$\begin{aligned} R_t &= (D_t - P_t)^2 \quad \text{si } P_t < D_t \\ R_t &= 0 \quad \text{si } P_t \geq D_t \end{aligned} \quad (3.5)$$

en donde D_t es la demanda por energía durante el período de tiempo t .

Este problema está sujeto a las siguientes restricciones:

a) De balance de masas,

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t - e_t$$

b) Límites en los almacenamientos,

$$S_{MIN} \leq S_t \leq S_{MAX} \quad \forall t$$

c) Límites en las descargas del embalse,

$$X_{MIN} \leq X_t \leq X_{MAX} \quad \forall t$$

d) Límites en la generación de energía,

$$P_{MIN} \leq P_t \leq P_{MAX} \quad \forall t$$

en donde:

$$P_t = KX_t h \left(\frac{S_t + S_{t+1}}{2} \right) \Delta t \quad \forall t$$

La función objetivo anterior puede también incluir formas de beneficios por venta de energía secundaria generada o funciones de castigo que indiquen lo que se quiere hacer con el sistema. Ambos problemas de optimización planteados pueden ser resueltos usando el algoritmo de programación dinámica y se presenta ahora un problema práctico de operación para generación de energía.

Se tiene un embalse con las características que se presentan a continuación:

Volumen de Almacenamiento Máximo,	$S_{MAX} = 1270.0 \times 10^6 \text{ m}^3$
Volumen de Almacenamiento Mínimo,	$S_{MIN} = 830.0 \times 10^6 \text{ m}^3$
Descargas Mínimas Permitidas,	$X_{MIN} = 0.0 \text{ m}^3/\text{s}$
Evaporación en el Embalse,	$e_t = 67 \text{ mm/mes}$
Tipo de Turbinas,	Turbinas a reacción
Cabeza Hidráulica Máxima,	$H_{MAX} = 95.0 \text{ m}$
Cabeza Hidráulica Mínima,	$H_{MIN} = 73.0 \text{ m}$
Cabeza Hidráulica Promedio,	$H_{PRO} = 83.9 \text{ m}$
Eficiencia de la Turbina,	$E = 85\%$
Factor de carga de la Turbina,	$F = 100\%$

Pérdidas Hidráulicas en el Sistema,	$H_p = 1 \text{ m}$
Capacidad Total del Sistema,	$C = 1050. \text{ MW}$
Altura sobre el Nivel del Mar de la turbina,	$H_f = 325.0 \text{ m}$

La elevación media del agua por encima del nivel del mar puede ser determinada como función del almacenamiento medio en el embalse por medio de una ecuación poligonal dada como:

$$H_t = 3.66 \times 10^2 + 3.391 \times 10^{-2} \bar{S}_t - 7.503 \times 10^{-6} \bar{S}_t^2$$

en donde H_t es la elevación media del agua sobre el nivel del mar para el período de tiempo t y \bar{S}_t es el volumen medio almacenado en el embalse durante ese período de tiempo y calculado como:

$$\bar{S}_t = \frac{S_t + S_{t+1}}{2}$$

Una vez que para un mes cualquiera se ha determinado la elevación media, la energía generada estará dada para ese mes como:

$$P_t = 2.7242 E X_t (H_t - H_f - H_p) \quad \text{MW-hora}$$

ó

$$P_t = h_t X_t$$

en donde $h_t = 2.7242 E (H_t - H_f - H_p)$ es el factor de conversión de energía para el embalse durante el mes t , es decir, en este embalse un volumen de descarga X_t durante el mes t genera una energía correspondiente a $h_t X_t$ MW-hora.

Asumiendo una demanda y unos flujos de entrada al embalse para los tres siguientes meses dados como:

Mes t	Demanda (Eqv. MW)	Flujo de Entrada	
		(m^3/s)	($10^6 m^3/mes$)
1	100.0	88.2	228.5
2	150.0	173.03	448.5
3	100.0	88.2	228.5

y además asumiendo que el embalse se encuentra lleno al inicio del primer mes se desea determinar la operación óptima del embalse que minimice la función de retorno para los tres meses dado como:

$$R_t = (D_t - P_t)^2 \quad P_t < D_t$$

$$R_t = 0 \quad P_t \geq D_t$$

Este problema puede ser resuelto mediante el uso de la programación dinámica en donde el número de etapas es el número de meses, la variable de estado es el almacenamiento del embalse S_t , y la variable de decisión son las descargas a través de las turbinas durante el mes X_t . La ecuación de estado está dada por la ecuación del balance de masas como:

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t - e_t \quad \forall t$$

La función de retorno está dada por la ecuación anterior, y las restricciones sobre la variable de estado son:

$$830.0 \leq S_t \leq 1270.0 \quad \forall t$$

y para la variable de decisión son:

$$0.0 \leq X_t \quad \forall t$$

La función recursiva del algoritmo de programación dinámica está dada como:

$$f_t(S_t) = \text{Min} \{R_t + f_{t+1}(S_{t+1})\}$$

Antes de resolver este problema de optimización con el algoritmo de programación dinámica vale la pena anotar lo siguiente. Debido a que éste es un ejemplo ilustrativo se asume un intervalo de discretización para la variable de estado de $220.0 \times 10^6 \text{ m}^3$ dando como resultado que los almacenamientos sólo pueden tomar valores de 830.0 , 1050 y $1270 \times 10^6 \text{ m}^3$. Aunque la evaporación varía de mes a mes de acuerdo al área media del espejo de agua en el embalse ésta se va a asumir como constante para todos los meses e igual a $8.50 \times 10^6 \text{ m}^3$ por mes. Se asumió también para este problema un período de demanda pico de 8 horas. El problema es resuelto ahora con el algoritmo de programación dinámica etapa por etapa empezando en la última.

La ecuación recursiva para la última etapa se puede escribir como:

$$f_3(S_3) = \text{Min} \{R_3\}$$

sujeto a:

$$830.0 \leq S_3 \leq 1270.0$$

$$0.0 \leq X_3$$

Los resultados para esta etapa se presentan en la Tabla 7.

La ecuación recursiva para la segunda etapa se puede escribir como:

$$f_2(S_2) = \text{Min} \{R_2 + f_3(S_2 - X_2 + q_2 - e_2)\}$$

sujeto a:

$$830.0 \leq S_2 \leq 1270.0$$

$$0.0 \leq X_2$$

los resultados para esta etapa se presentan en la Tabla 8.

La ecuación recursiva para la primera etapa puede escribirse como:

$$f_1(S_1) = \text{Min} \{R_1 + f_2(S_1 - X_1 + q_1 - e_1)\}$$

sujeto a:

$$S_1 = 1270.0$$

$$X_1 \geq 0.0$$

los resultados para esta etapa se presentan en la Tabla 9.

Los cálculos para cualquier estado S_t en cualquier etapa son los siguientes:

1. Conocido S_t y S_{t+1} se calcula X_t como:

$$X_t = S_t + q_t - e_t - S_{t+1}$$

que tendrá unidades de 10^6 m^3 .

2. Con S_t y S_{t+1} se calcula la altura neta media sobre la turbina como:

$$\begin{aligned} \text{Altura neta}_t &= 3,66 \times 10^2 + 2.291 \times 10^{-2} \bar{S}_t \\ &\quad - 7.503 \times 10^{-6} \bar{S}_t^2 - H_p - H_f \end{aligned}$$

3. Con la altura neta y el caudal X_t se calcula la energía generada como:

$$P_t = 2.7242 \times 0.85 X_t \text{ Altura Neta}_t \text{ (MW-h)}$$

4. La energía anterior se divide por el número de horas en el mes para obtener esta energía en Mega-watts equivalentes, es decir:

Tabla 7. Cálculo de $f_3(S_3)$

S_3 ($10^6 m^3$)	X_3 ($10^6 m^3$)	S_4 ($10^6 m^3$)	Altura Neta (m)	P_3 (Eqv. MW)	R_3	$f_3(S_3)$	X_3^*
1270.0	220.0	1270.0	95.2	67.4	1062.8		
	440.0	1050.0	89.4	126.5	0.0	0.0	440.0
	660.0	830.0	84.0	178.3	0.0		660.0
1050.0	0.0	1270.0	89.4	0.0	10000.0		
	220.0	1050.0	84.0	59.4	1648.4		
	440.0	830.0	78.5	111.1	0.0	0.0	440.0
830.0	0.0	1050.0	78.5	0.0	10000.0		
	220.0	830.0	73.3	51.9	2313.6	2313.6	220.0

Tabla 8. Cálculo de $f_2(S_2)$

S_2 ($10^6 m^3$)	X_2 ($10^6 m^3$)	S_3 ($10^6 m^3$)	Altura Neta (m)	P_2 (Eqv. MW)	R_2	f_3	R_2+f_3	f_2	X_2^*
1270.0	440.0	1270.0	95.2	134.7	234.1	0.0	234.1		
	660.0	1050.0	89.4	189.8	0.0	0.0	0.0	0.0	660.0
	880.0	830.0	84.0	237.7	0.0	2313.6	2313.6		
1050.0	220.0	1270.0	89.4	63.2	7534.2	0.0	7534.2		
	440.0	1050.0	84.0	118.9	967.2	0.0	967.2	967.0	440.0
	660.0	830.0	78.5	166.6	0.0	2313.6	2313.6		
830.0	0.0	1270.0	84.0	0.0	22500.0	0.0	22500.0		
	220.0	1050.0	78.5	55.5	8930.2	0.0	8930.2		
	440.0	830.0	73.3	103.7	2143.7	2313.6	4457.3	4457.3	440.0

$$P_t = P_t / 720.0 \quad (\text{Eqv.MW})$$

5. Se calcula la función de retorno como:

$$R_t = 0 \quad \text{si} \quad P_t \geq D_t$$

$$R_t = (D_t - P_t)^2 \quad \text{si} \quad P_t < D_t$$

6. Se procede con la selección del mejor paso para cada estado de la variable S_t .

Tabla 9. Cálculo de $f_1(S_1)$

S_1 (10^6m^3)	X_1 (10^6m^3)	S_2 (10^6m^3)	Altura Neta (m)	P_1 (Eqv.MW)	R_1	f_2	R_1+f_2	f_1	X_1^*
1270.0	220.0	1270.0	95.2	67.4	1062.8	0.0	1062.8		
	440.0	1050.0	89.4	126.5	0.0	967.2	967.2	967.2	440.0
	660.0	830.0	84.0	178.3	0.0	4457.3	4457.3		

La solución al problema se puede obtener de los resultados de la Tabla 9 y estos son:

$$X_1^* = 440.0 \quad (\text{Tabla 9})$$

con $S_2 = 1050.0$ se obtiene:

$$X_2^* = 440.0 \quad (\text{Tabla 8})$$

con $S_3 = 1050.0$ se obtiene:

$$X_3^* = 440.0 \quad (\text{Tabla 7})$$

estas descargas dan como resultado un déficit de energía sobre los tres meses de 967.2.

3.3. EJEMPLO DE ABASTECIMIENTO DE AGUA USANDO PROGRAMACION DINAMICA CONTINUA

Un embalse tiene una capacidad útil de 1 unidad de agua. El agua es derivada del embalse para ser vendida a una zona industrial y a un distrito de riego, y los beneficios obtenidos por esta venta están dados como:

$$R_t = -49.07 + 10420.38 X_t - 6824.40 X_t^2$$

en donde R_t es el beneficio obtenido por la venta de X_t unidades de agua durante el período de tiempo t .

La capacidad de las obras de desviación es 1 unidad de agua por mes, y el agua descargada del embalse mediante el aliviadero no genera beneficios ni daños. Los pronósticos de las aportaciones del río al embalse durante los próximos 3 meses son los siguientes:

Mes t	Aportaciones q_t
1	2/3
2	1/3
3	0

Al principio del primer mes se tiene en el embalse un almacenamiento igual a la tercera parte de su capacidad útil, y al final del tercer mes se quiere tener en el embalse un volumen de agua igual a las dos terceras partes de la capacidad útil.

Se quiere definir la operación óptima del embalse durante esos tres meses, es decir, definir las entregas a hacer en cada mes de tal manera que se maximicen los beneficios por la venta del agua.

Este problema se puede plantear como un problema de optimización como:

$$\text{Maximizar } \left\{ \sum_{t=1}^3 R_t(X_t) \right\}$$

Sujeto a:

$$S_{t+1} = S_t + q_t - X_t \quad t = 1, 2, 3$$

$$0 \leq X_t \leq 1 \quad t = 1, 2, 3$$

$$0 \leq S_t \leq 1 \quad t = 1, 2, 3$$

La solución a este problema de optimización se presenta ahora usando el algoritmo de programación dinámica hacia atrás con el método de cálculo de la programación dinámica continua. El problema es entonces resuelto etapa por etapa empezando en la última.

El problema a ser solucionado en la última etapa se puede escribir como:

$$f_3(S_3) = \text{Max} \{R_3(X_3)\}$$

es decir:

$$f_3(S_3) = \text{Max} \{-49.07 + 10420.38X_3 - 6824.40 X_3^2\}$$

sujeto a:

$$S_4 = S_3 + q_3 - X_3$$

pero se sabe que $S_4 = 2/3$ y $q_3 = 0$, es decir:

$$X_3 = S_3 - 2/3 \quad (3.6)$$

y reemplazando esta expresión en la función recursiva anterior se puede escribir que:

$$f_3(S_3) = -49.07 + 10420.38(S_3 - 2/3) - 6824.40(S_3 - 2/3)^2$$

o sea:

$$f_3(S_3) = -10029.05 + 19519.58 S_3 - 6824.40 S_3^2$$

El problema a ser solucionado en la segunda etapa se puede escribir como:

$$f_2(S_2) = \text{Max} \{R_2(X_2) + f_3(S_3)\}$$

sujeto a:

$$S_3 = S_2 + q_2 - X_2$$

$$S_3 \geq 2/3$$

pero se sabe que $q_2 = 1/3$, es decir:

$$S_3 = S_2 + 1/3 - X_2 \quad (3.7)$$

y reemplazando esta expresión en la función recursiva anterior se puede escribir que:

$$f_2(S_2) = \text{Max} \{R_2(X_2) + f_3(S_2 + 1/3 - X_2)\}$$

y usando las respectivas expresiones para R_2 y f_3 en esta ecuación daría que:

$$f_2(S_2) = \text{Max} \{-49.07 + 10420.38X_2 - 6824.40X_2^2 - 10029.05 \\ + 19519.58(S_2 + 1/3 - X_2) - 6824.40(S_2 + 1/3 - X_2)^2\}$$

el valor de X_2 que maximiza esta función recursiva está dado por la derivada parcial de la función con respecto a X_2 e igualando el resultado a cero, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2(S_2)}{\partial X_2} &= 10420.38 - 13648.80X_2 - 19519.58 + 13648.80(S_2 + 1/3 - X_2) \\ &= -4549.61 - 27297.60 X_2 + 13648.80 S_2 = 0\end{aligned}$$

o sea:

$$X_2^* = \frac{13648.80 S_2 - 4549.61}{27297.60} = \frac{S_2}{2} - \frac{1}{6} \quad (3.8)$$

Observe que la segunda derivada parcial de la función recursiva anterior con respecto a X_2 daría:

$$\frac{\partial^2 f_2(S_2)}{\partial X_2^2} = -27297.60 < 0$$

lo cual garantiza que el valor de X_2 definido por la ecuación (3.8) maximiza la función recursiva $f_2(S_2)$. Reemplazando el resultado de la ecuación (3.8) en la función recursiva $f_2(S_2)$ se puede escribir que:

$$\begin{aligned}f_2(S_2) &= -49.07 + 10420.38 \left(\frac{S_2}{2} - \frac{1}{6}\right) - 6824.40 \left(\frac{S_2}{2} - \frac{1}{6}\right)^2 \\ &\quad - 10029.05 + 19519.58 \left(S_2 + \frac{1}{3} - \frac{S_2}{2} + \frac{1}{6}\right) \\ &\quad - 6824.40 \left(S_2 + \frac{1}{3} - \frac{S_2}{2} + \frac{1}{6}\right)^2\end{aligned}$$

o sea:

$$f_2(S_2) = -3950.73 + 12695.18 S_2 - 3412.20 S_2^2$$

El problema a ser solucionado en la primera etapa se puede escribir como:

$$f_1(S_1) = \text{Max} \{R_1(X_1) + f_2(S_2)\}$$

sujeto a: $S_2 = S_1 + q_1 - X_1$

pero se sabe que $S_1 = 1/3$ y $q_1 = 2/3$, es decir:

$$S_2 = 1 - X_1 \quad (3.9)$$

y reemplazando esta expresión en la función recursiva anterior se puede escribir que:

$$f_1(S_1) = \text{Max} \{R_1(X_1) + f_2(1 - X_1)\}$$

y usando las respectivas expresiones para R_1 y f_2 en esta ecuación daría que:

$$f_1(S_1) = \text{Max} \{-49.07 + 10420.38X_1 - 6824.40X_1^2 \\ -3950.73 + 12695.18(1 - X_1) - 3412.20(1 - X_1)^2\}$$

el valor de X_1 que maximiza esta función recursiva está dada por la derivada parcial de la función con respecto a X_1 e igualando el resultado a cero, es decir:

$$\frac{\partial f_1(S_1)}{\partial X_1} = 10420.38 - 13648.80X_1 - 12695.18 + 6824.40(1 - X_1) \\ = 4549.60 - 20473.20 X_1 = 0$$

lo cual daría:

$$X_1^* = \frac{4549.60}{20473.20} = 2/9$$

reemplazando este valor de X_1^* en la ecuación (3.9) se obtiene que:

$$S_2^* = 1 - X_1^* = 1 - 2/9 = 7/9$$

Usando este valor de S_2^* en la ecuación (3.8) se obtiene:

$$X_2^* = \frac{7}{18} - \frac{3}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

reemplazando este valor de X_2^* y S_2^* en la ecuación (3.7) da que:

$$S_3^* = \frac{7}{9} + \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

y usando este resultado en la ecuación (3.6) se obtiene que:

$$X_3^* = S_3^* - \frac{2}{3} = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

y las políticas óptimas son entonces:

$$X_1^* = \frac{2}{9}, \quad X_2^* = \frac{2}{9}, \quad \text{y} \quad X_3^* = \frac{2}{9}$$

que repercute en un beneficio total de 5788.69 unidades, el cual se obtiene de reemplazar la solución óptima en la función recursiva $f_1(S_1)$ o en reemplazar la solución óptima en la función objetivo general.

3.4. EJEMPLO DE OPERACION CONJUNTA DE DOS EMBALSES USANDO PROGRAMACION DINAMICA DISCRETA.

Como última ilustración de la aplicación de la programación dinámica para definir la operación de sistemas de embalses dentro de un contexto determinístico se presenta ahora un ejemplo de la operación óptima de dos embalses. El lector podrá darse cuenta con este ejemplo lo explosivo que es el método de cálculo de la programación dinámica discreta cuando aumenta el número de estados por etapa.

Para encontrar la solución al problema se usa el algoritmo de programación dinámica hacia atrás, dejando al lector interesado el planteo y solución del problema usando el algoritmo hacia adelante, y mediante el método de cálculo de la programación dinámica discreta.

Se desea definir la operación de un sistema de dos embalses en paralelo durante los próximos tres meses de tal manera que se minimice la suma del cuadrado de la diferencia entre el agua necesitada y el agua entregada por el sistema durante los tres meses. La demanda en cada uno de los meses es de 100 millones de m^3 y las capacidades de los dos embalses son de también 100 millones de m^3 . Se asume que al inicio del primer mes el embalse 1 tiene almacenados 50 millones de m^3 y el embalse 2 se encuentra vacío. La operación del sistema debe ser tal que al final del tercer período el embalse 1 se encuentre lleno y el embalse 2 tenga 50 millones de m^3 . Los aportes a cada uno de los embalses durante estos tres meses serían los siguientes:

Mes t	Aportes Embalse 1 q_t^1 ($10^6 m^3$)	Aportes Embalse 2 q_t^2 ($10^6 m^3$)
1	100	100
2	100	50
3	50	0

Se asume que en cualquier período de tiempo el embalse puede contener 0, 50, ó 100 millones de m^3 .

Las etapas para este problema son los subproblemas planteados para los períodos de tiempo o meses, las variables de estado, que serán dos por etapa, son los almacenamientos en cada embalse al inicio de cada mes, y las variables de decisión, que también son dos por etapa, son las cantidades de agua entregada por cada embalse durante el mes. La ecuación recursiva puede escribirse para cada etapa como,

Para la tercera etapa:

$$f_3(S_3^{(1)}, S_3^{(2)}) = \text{Min} \{R_3(X_3^{(1)}, X_3^{(2)})\}$$

sujeto a:

$$0 \leq S_3^{(1)} \leq 100$$

$$0 \leq S_3^{(2)} \leq 100$$

$$X_3^{(1)} = S_3^{(1)} + q_3^{(1)} - S_4^{(1)}$$

$$X_3^{(2)} = S_3^{(2)} + q_3^{(2)} - S_3^{(2)}$$

$$X_3^{(1)} \geq 0 \quad X_3^{(2)} \geq 0$$

Para la segunda etapa:

$$f_2(S_2^{(1)}, S_2^{(2)}) = \text{Min } \{R_2(X_2^{(1)}, X_2^{(2)}) + f_3(S_3^{(1)}, S_3^{(2)})\}$$

sujeto a:

$$0 \leq S_2^{(1)} \leq 100$$

$$0 \leq S_2^{(2)} \leq 100$$

$$X_2^{(1)} = S_2^{(1)} + q_2^{(1)} - S_3^{(1)}$$

$$X_2^{(2)} = S_2^{(2)} + q_2^{(2)} - S_3^{(2)}$$

$$X_2^{(1)} \geq 0 \quad X_2^{(2)} \geq 0$$

Para la primera etapa:

$$f_1(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}) = \text{Min } \{R_1(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}) + f_2(S_2^{(1)}, S_2^{(2)})\}$$

Sujeto a:

$$0 \leq S_1^{(1)} \leq 100$$

$$0 \leq S_1^{(2)} \leq 100$$

$$X_1^{(1)} = S_1^{(1)} + q_1^{(1)} - S_2^{(1)}$$

$$X_1^{(2)} = S_1^{(2)} + q_1^{(2)} - S_2^{(2)}$$

$$X_1^{(1)} \geq 0 \quad X_1^{(2)} \geq 0$$

en donde:

$$R_t(X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) = \{D_t - (X_t^{(1)} + X_t^{(2)})\}^2$$

en donde $S_t^{(1)}$ y $S_t^{(2)}$ son los almacenamientos al inicio del mes t en el embalse 1 y en el embalse 2 respectivamente, $X_t^{(1)}$ y $X_t^{(2)}$ son las entregas durante el mes t por el embalse 1 y el embalse 2 respectivamente, $q_t^{(1)}$ y $q_t^{(2)}$ son los aportes durante el mes t al embalse 1 y al embalse 2 respectivamente, y D_t es la demanda por agua durante el mes t .

El problema se resuelve ahora etapa por etapa empezando en la última etapa.

1. Cálculo de $f_3(S_3^{(1)}, S_3^{(2)})$ como:

Para todas las combinaciones posibles de $S_3^{(1)}$ y $S_3^{(2)}$

$$f_3(S_3^{(1)}, S_3^{(2)}) = \text{Min} \{R_3(X_3^{(1)}, X_3^{(2)})\}$$

sujeto a:

$$0 \leq S_3^{(i)} \leq 100, \quad i = 1, 2$$

$$X_3^{(1)} = S_3^{(1)} - 50$$

$$X_3^{(2)} = S_3^{(2)} - 50$$

$$X_3^{(1)} \geq 0, \quad X_3^{(2)} \geq 0$$

Los cálculos correspondientes a esta etapa se presentan en la Tabla 10. Observe que tanto $S_3^{(1)}$ como $S_3^{(2)}$ tienen que ser mayor de $50 \times 10^6 \text{ m}^3$ para garantizar que $X_3^{(1)}$ y $X_3^{(2)}$ sean mayor que cero.

2. Cálculo de $f_2(S_2^{(1)}, S_2^{(2)})$ como:

Para todas las combinaciones posibles de $S_2^{(1)}$ y $S_2^{(2)}$

$$f_2(S_2^{(1)}, S_2^{(2)}) = \text{Min} \{R_2(X_2^{(1)}, X_2^{(2)}) + f_3(S_3^{(1)}, S_3^{(2)})\}$$

sujeto a:

$$0 \leq S_2^{(i)} \leq 100, \quad i = 1, 2$$

$$X_2^{(1)} = S_2^{(1)} + 100 - S_3^{(1)}$$

$$X_2^{(2)} = S_2^{(2)} + 50 - S_3^{(2)}$$

$$X_2^{(1)} \geq 0, \quad X_2^{(2)} \geq 0$$

Los cálculos correspondientes a esta etapa se presentan en la Tabla 11. En esta tabla se puede observar lo explosivo de los cálculos cuando se trata de un problema con más de un estado por etapa.

Tabla 10. Cálculo de $f_3(S_3^{(1)}, S_3^{(2)})$ para la última etapa.

$S_3^{(1)}$	$S_3^{(2)}$	$X_3^{(1)}$	$X_3^{(2)}$	$R_3(X_3^{(1)}, X_3^{(2)})$	$f_3(S_3^{(1)}, S_3^{(2)})$
50	50	0	0	10000*	10000
50	100	0	50	2500*	2500
100	50	50	0	2500*	2500
100	100	50	50	0*	0

3. Cálculo de $f_1(S_1^{(1)}, S_1^{(2)})$ como:

$$f_1(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}) = \text{Min} \{R_1(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}) + f_2(S_2^{(1)}, S_2^{(2)})\}$$

sujeto a:

$$S_1^{(1)} = 50, \quad S_1^{(2)} = 0$$

$$X_1^{(1)} = 150 - S_2^{(1)}$$

$$X_1^{(2)} = 100 - S_2^{(2)}$$

$$X_1^{(1)} \geq 0, \quad X_1^{(2)} \geq 0$$

Tabla 11. Cálculo de $f_2(S_2^{(1)}, S_2^{(2)})$ para la segunda etapa.

$S_2^{(1)}$	$S_2^{(2)}$	$S_3^{(1)}$	$S_3^{(2)}$	$X_2^{(1)}$	$X_2^{(2)}$	R_2	f_3	R_2+f_3	f_2
0	0	50	50	50	0	2500	10000	12500*	12500
		100	50	0	0	10000	2500	12500*	
0	50	50	50	50	50	0	10000	10000	
		100	50	0	50	2500	2500	5000*	5000
		50	100	50	0	2500	2500	5000	
		100	100	0	0	10000	0	10000	
50	0	50	50	100	0	0	10000	10000	
		100	50	50	0	2500	2500	5000*	5000
50	50	50	50	100	50	2500	10000	12500	
		50	100	100	0	0	2500	2500*	2500
		100	50	50	50	0	2500	2500*	
		00	100	50	0	2500	0	2500*	
100	0	50	50	150	0	2500	10000	12500*	
		100	50	100	0	0	2500	2500*	2500
100	50	50	50	150	50	10000	10000	20000	
		50	100	150	0	2500	2500	5000	
		100	50	50	50	0	2500	2500*	2500
		100	100	50	0	2500	0	2500*	
100	100	50	50	150	100	22500	10000	32500	
		50	100	150	50	10000	2500	12500	
		100	50	50	100	2500	2500	5000	
		100	100	50	50	0	0	0*	0
0	100	50	50	50	100	2500	10000	12500	
		100	50	0	100	0	2500	2500*	2500
		50	100	50	50	0	2500	2500*	
		100	100	0	50	2500	0	2500*	
50	100	50	50	100	100	10000	10000	20000	
		100	50	50	100	2500	2500	5000	
		50	100	100	50	2500	2500	5000	
		100	100	50	50	0	0	0*	0

Tabla 12. Cálculo de $f_1(S_1^{(1)}, S_1^{(2)})$ para la primera etapa

$S_1^{(1)}$	$S_1^{(2)}$	$S_2^{(1)}$	$S_2^{(2)}$	$X_1^{(1)}$	$X_1^{(2)}$	R_1	f_2	$R_1 + f_2$	f_1
50	0	0	0	150	100	22500	12500	35000	
		0	50	150	50	10000	5000	15000	
		50	0	100	100	10000	5000	15000	
		50	50	100	50	2500	2500	5000	
		100	0	50	100	2500	2500	5000	
		0	100	150	0	2500	2500	5000	
		50	100	100	0	0	0	0*	0
		100	50	50	50	0	2500	2500	
		100	100	50	0	2500	0	2500	

Los cálculos de esta etapa se presentan en la Tabla 12.

De la Tabla 12 se escoge ahora el valor de $f_1(S_1^{(1)*}, S_1^{(2)*})$, que es:

$$f_1(S_1^{(1)*}, S_1^{(2)*}) = 0$$

que corresponde a:

$$S_1^{(1)*} = 50, \quad X_1^{(1)*} = 100, \quad S_1^{(2)*} = 0, \quad X_1^{(2)*} = 0$$

Con estos valores se calcula:

$$S_2^{(1)*} = S_1^{(1)*} + q_1^{(1)} - X_1^{(1)*} = 50$$

$$S_2^{(2)*} = S_1^{(2)*} + q_1^{(2)} - X_1^{(2)*} = 100$$

de la Tabla 11 se escoge $f_2(50, 100)$ que es 0 y corresponde a:

$$X_2^{(1)*} = 50 \text{ y } X_2^{(2)*} = 50$$

con estos valores se calcula:

$$S_3^{(1)*} = S_2^{(1)*} + q_2^{(1)} - X_2^{(1)*} = 100$$

$$S_3^{(2)*} = S_2^{(2)*} + q_2^{(2)} - X_2^{(2)*} = 100$$

de la Tabla 10 se escoge $f_3(100, 100)$ que es 0 y corresponde a:

$$X_3^{(1)*} = 50 \text{ y } X_3^{(2)*} = 50$$

La política óptima de operación del sistema de embalses es entonces:

Mes i	Entrega Embalse 1 $X_i^{(1)*}$	Entrega Embalse 2 $X_i^{(2)*}$
1	100	0
2	50	50
3	50	50

la cual no produce ningún tipo de déficits.

En los ejemplos anteriores se determinó la operación óptima de sistemas de embalses y no su regla de operación. Tal como se discutió antes, la operación óptima es una herramienta para definir la regla de operación. Hasta ahora todo el desarrollo se ha efectuado dentro de un contexto determinístico en donde se asume que los flujos de entrada al embalse son conocidos. En la realidad esto no es válido y es necesario adicionar el comportamiento estocástico de los flujos de entrada al embalse a la decisión del problema de operación.

IV. PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA

En los capítulos anteriores se asumió que los caudales de entrada al embalse eran conocidos, es decir, se solucionó el problema de operación de embalses dentro de un contexto determinístico. En el caso determinístico cuando se va a determinar la operación óptima del embalse o la regla de operación del mismo en general se usa como período de flujo de entradas al embalse el período crítico histórico, pues si se logra determinar una operación para este período el embalse podrá responder aun mejor en los demás períodos de tiempo.

El uso del período crítico de flujos de entrada a un embalse para determinar la operación de un embalse es equivalente a asumir que estos flujos representen el peor período crítico que se puede presentar en la vida del embalse. La solución del problema de operación de un embalse dentro de un contexto determinístico, es decir, en donde se asume que la historia contiene toda la información sobre el futuro, no es una solución ajustada a la realidad. Se deben desarrollar entonces algunas técnicas que permitan evaluar el riesgo asociado (la incertidumbre) con cierta política de operación del embalse ya que el futuro es desconocido, los flujos de entrada al embalse son en realidad variables aleatorias.

La solución al problema de operación de un embalse debe hacerse entonces dentro de un contexto estocástico que permita evaluar el riesgo asociado a las diferentes políticas de operación. Como se dijo anteriormente, por ejemplo, el valor de la energía aumenta con la confiabilidad con que puede ser entregada y las técnicas estocásticas pueden ayudar a cuantificar esta confiabilidad. En general, los métodos estocásticos usados para determinar la regla de operación de un embalse pueden clasificarse como Implícitos y como Explícitos. Como su nombre lo indica los métodos estocásticos implícitos manejan la estocasticidad de los flujos de entrada al embalse por fuera de la metodología usada para determinar la operación del embalse (simulación y optimización) mientras que los métodos explícitos usan la representación estocástica de los flujos de entrada directamente dentro del problema de operación. Los

métodos estocásticos implícitos más populares en recursos hidráulicos son el método de Monte Carlo y el de las Restricciones de Riesgo y el método explícito más usado es el de las cadenas de Markov. Cada uno de estos procedimientos se ilustran con algún detalle en combinación con el uso del algoritmo de Programación Dinámica para determinar la regla de operación de un embalse.

4.1. PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA IMPLICITA, EL METODO DE MONTE CARLO

El método de Monte Carlo de Programación Dinámica Estocástica Implícita consta de tres pasos:

1. Generación de flujos de entrada al embalse
2. Programación Dinámica determinística sobre los flujos generados
3. Análisis de Regresión Múltiples para determinar la regla de operación del embalse.

El primer paso es la generación de flujos de entrada al embalse. El proceso de generación de una serie hidrológica consta de cuatro pasos:

1. Identificación del Modelo de generación
2. Estimación del Modelo de generación
3. Chequeo del Modelo de generación
4. Generación de las series sintéticas

El proceso de identificación del modelo de generación consiste en identificar el modelo más conveniente a ser usado para la serie hidrológica. No sólo consiste en escoger dentro del grupo de modelos disponibles cuál es el que se de sea usar, sino una vez escogido el tipo de modelo a ser usado definir sus características básicas. Existen muchos modelos que han sido usados con bastante éxito en hidrología y los más nombrados son los modelos tipo ARMA, los modelos de la línea partida, los modelos de ruido normal, los modelos de cambios

de nivel, y los modelos de desagregación. La escogencia de cuál de estos tipos de modelos debe usarse para la generación de la serie de caudales de entrada al embalse es algo más subjetivo que objetivo y depende mucho de las preferencias y la experiencia que tenga el analista sobre esos modelos. Una vez escogido el tipo de modelo a ser usado se debe definir las características básicas de este modelo tales como, si se va a usar en forma multivariada o no, si se va a utilizar con parámetros periódicos o con parámetros constantes para todos los meses, y, si es del caso, escoger el orden del modelo. Este proceso de definición del tipo de modelo a usarse y de sus características básicas es lo que se ha llamado aquí el proceso de identificación del modelo de generación.

Por ejemplo si se escoge como tipo de modelo los populares modelos ARMA estos tienen una forma general que puede escribirse como:

$$q_t = m_y + a_1 (q_{t-1} - m_y) + a_2 (q_{t-2} - m_y) + \dots + a_p (q_{t-p} - m_y) + e_t + b_1 e_{t-1} + b_2 e_{t-2} + \dots + b_q e_{t-q}$$

en donde q_t son los flujos de entrada al embalse durante el período de tiempo t , m_y es la media de los flujos de entrada al embalse, a_1, a_2, \dots, a_p son parámetros del modelo, p es el orden de la componente autoregresiva del modelo, b_1, b_2, \dots, b_q son también parámetros del modelo, q es el orden de la componente de promedio móvil del modelo, y e_t es una variable aleatoria para el período de tiempo t asumida independiente y normalmente distribuida con media cero y varianza constante.

Para el modelo ARMA escogido hay entonces que determinar si se debe usar la versión multivariada de este modelo o no, es decir, si este modelo va a incluir también la dependencia espacial existente entre varias series de caudal cercanas o no. Esta decisión es afirmativa si la correlación entre estaciones vecinas de caudal es significativa y en este caso las componentes del mo-

delo anterior serían vectores y matrices de acuerdo al número de estaciones involucradas en el modelo. También se debe decidir si los parámetros del modelo van a ser diferentes para cada período de tiempo o si van a ser constantes en todos los períodos. Se usaría un modelo con parámetros diferentes para cada período de tiempo, es decir, un modelo con parámetros periódicos, si la correlación serial de la serie hidrológica tipificada muestra periodicidad. Por último se debe decidir cual es el orden del modelo, es decir, los valores de p y q y esta información se puede obtener del correlograma y del correlograma parcial de la serie hidrológica.

Uno de los modelos de generación de series hidrológicas más populares es el modelo multivariado AR(1) conocido también como el modelo de Matalas que puede escribirse como:

$$\underline{Q}_t = \underline{A} \underline{Q}_{t-1} + \underline{B} \underline{E}$$

en el caso que el analista no tenga ninguna experiencia sobre modelamiento es tocástico puede entonces usar este modelo para la generación con bastante confiabilidad pues un altísimo porcentaje de las series de caudal se ajustan a él.

Una vez que se a identificado el modelo de generación los parámetros de este deben ser estimados, por ejemplo, si el modelo de Matalas va a ser usado las matrices de parámetros A y B deben ser estimadas. La estimación de los parámetros se hace con la información contenida en las series hidrológicas históricas y de acuerdo al modelo que se esté usando.

Antes de entrar a generar con el modelo identificado y escogido se debe chequear si dicho modelo cumple con las suposiciones iniciales que se hicieron de él. Por ejemplo para los modelos ARMA se asumió inicialmente que la componente aleatoria era independiente y normalmente distribuida con media cero y varianza constante y que el modelo era un modelo para series estacionarias. Con la serie histórica y el modelo estimado se puede chequear si el modelo

está cumpliendo con estas suposiciones iniciales. Si no están cumpliendo con ellas se puede solucionar este problema identificando otro modelo para la serie hidrológica o usando el mismo modelo pero sobre la serie hidrológica transformada, dependiendo de cual suposición inicial no se está cumpliendo.

Una vez que el modelo a sido identificado, estimado y chequeado se pasa a la etapa de generación en donde series hidrológicas sintéticas de caudales de entrada al embalse con una longitud de registro igual al período de análisis o a la vida útil del embalse son generadas con el modelo. Las series generadas deben reproducir las características estadísticas de los registros históricos preservadas por el modelo. Puede llegar a ocurrir que un modelo que ha sido identificado correctamente genere algunas series que no reproduzcan las características de los registros históricos. Estas series deben ser descartadas para el análisis y deben usarse sólo aquellas que reproduzcan adecuadamente las características históricas que se supone el modelo usado preserva. Es por esto que se recomienda generar un número de trazas muy superior al deseado y de estas trazas escoger sólo las que reproduzcan esas características estadísticas.

El segundo paso dentro del método de Monte Carlo es el uso de la Programación Dinámica determinística para determinar la operación óptima del embalse con cada traza de caudales de entrada al embalse generada. Para cada traza generada el problema de operación del embalse puede escribirse como:

$$\text{Min } \left\{ \sum_{t=1}^T (D_t - X_t^1) \right\}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

1. Balance de Masas

$$S_{t+1}^1 = S_t^1 + q_t^1 - X_t^1 - \text{otras pérdidas } \forall t$$

2. Límites de Almacenamiento

$$S_{\text{MIN}} \leq S_t^1 \leq S_{\text{MAX}} \quad \forall t$$

3. Límites en las Descargas

$$X_{\text{MIN}} \leq X_t^1 \leq X_{\text{MAX}}$$

en donde D_t es la demanda por agua durante el período de tiempo t , q_t^1 son los flujos de entrada al embalse durante el tiempo t y correspondientes a la traza 1, S_t^1 son los almacenamientos en el embalse al inicio del tiempo t y correspondientes a la traza 1, X_t^1 son las descargas del embalse durante el tiempo t y correspondientes a la traza 1, T es el horizonte de operación y 1 es el indicativo de la traza. Este problema de operación óptima del embalse debe resolverse para cada traza 1 del total de L trazas generadas. La programación dinámica es un algoritmo que puede usarse para determinar la operación óptima del embalse con cada traza 1. La ecuación recursiva de este algoritmo puede entonces escribirse como:

$$f_t(S_t^1, X_t^1) = \text{Min} \{ (D_t - X_t^1)^2 + f_{t+1}(S_{t+1}^1, X_{t+1}^1) \}$$

la cual es resuelta para cada etapa empezando en la última, que corresponde al último período de tiempo, y moviéndose hacia la primera en forma recursiva que da la solución al problema de optimización planteado. Para solucionar esta ecuación recursiva puede usarse bien sea el método de cálculo de la programación dinámica discreta o el método de cálculo de la programación dinámica continua, tal como se ilustró en el capítulo anterior.

El tercer y último paso dentro del método de Monte Carlo para determinar la regla de operación del sistema es el análisis multivariado de la operación óptima determinística del embalse con toda las trazas generadas. Este análisis multivariado expresará la decisión en cualquier período de tiempo como una función de variables conocidas o predichas. En el caso del problema de opera

ción del embalse se estimará un modelo de regresión múltiple que exprese las descargas del embalse durante cualquier período de tiempo como función de los almacenamientos en el embalse en períodos anteriores, de las descargas en períodos anteriores y de los flujos de entrada durante el período y en períodos anteriores. Esta ecuación de regresión múltiple podría escribirse como:

$$X_t = g(S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-p}, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-q}, q_t, q_{t-1}, \dots, q_{t-r})$$

en donde los parámetros de la regresión múltiple pueden ser estimados con la información obtenida de la operación óptima del embalse con las trazas generadas. La inclusión de las variables en el modelo de regresión múltiple dependen de las correlaciones múltiples de las variables independientes con la variable dependiente X_t . Por ejemplo si se decide sólo incluir el volumen almacenado en el embalse al inicio del período de tiempo y los flujos de entrada al embalse durante ese período, la ecuación de regresión múltiple se podría escribir como:

$$X_t = a_1 S_t + b_1 q_t$$

en donde a_1 y b_1 son parámetros a ser estimados.

Observe que la ecuación de regresión múltiple desarrollada define la regla de operación del embalse expresando la decisión a ser tomada en cualquier período de tiempo X_t como una función de flujos de entrada predichos para el embalse durante ese período de tiempo q_t , y variables conocidas $S_t, \dots, S_{t-p}, X_t, \dots, X_{t-q}, q_{t-1}, \dots, q_{t-r}$. Aunque el método de Monte Carlo es una forma bastante clara de incluir la estocasticidad de los flujos de entrada al embalse en el problema de definición de la regla de operación de un embalse, no garantiza que la regla de operación especificada sea la óptima. Esto se debe a que infiere la regla de operación de un número dado de ejemplos de operación óptima del

embalse. Además este método tiene el problema de que puede tomar mucho tiempo de computador ya que debe resolver el problema de operación para cada traza generada.

4.2. PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA EXPLICITA, EL METODO DE CADENAS DE MARKOV

Como se indicó anteriormente este modelo incluye la distribución probabilística de los flujos de entrada al embalse directamente dentro del modelo de operación. Para un mejor entendimiento de esta metodología inicialmente se definirán algunos términos, luego se presentará el desarrollo teórico del modelo.

Se asume que q_t representa los flujos de entrada aleatorios al embalse cuya distribución de probabilidades es conocida. Los modelos determinísticos usan en lo general el valor esperado de estos flujos de entrada como el valor representativo de ellos para determinar las descargas óptimas del embalse. Observe que esta regla de operación del embalse no es muy útil si se presentan en el embalse otros flujos diferentes al promedio. Para definir la regla de operación de un embalse que especifica las descargas como una función del volumen inicial y de los flujos de entrada al embalse se deben desarrollar algunos modelos probabilísticos discretos y uno de estos modelos es el que se pretende presentar acá.

Los caudales de entrada al embalse q_t se dividen en un número posible de valores discretos q_{it} , P_{it} representa la probabilidad de que los caudales durante el período de tiempo t estén dentro del intervalo representado por q_{it} , y P_{ij}^{t-1} es la probabilidad de que los flujos de entrada al embalse durante el período de tiempo t sean q_{jt} cuando en el período de tiempo $t-1$ fueron q_{it-1} . Estos valores discretos de los caudales de entrada al embalse deben tener los mismos momentos que los flujos históricos. Observe que en lugar de representar estos flujos de entrada al embalse sólo por su valor esperado ahora se representan por un número discreto de valores con sus respectivas probabilidades de ocurrencia y transición. Los almacenamientos en el embalse al inicio del período de tiempo S_t se divide también en un número posible de valores discretos S_{kt} .

Dado un volumen inicial en el embalse S_{kt} , los flujos de entrada al embalse q_{it} , y un volumen final $S_{l_{t+1}}$ en el período de tiempo t , las descargas del embalse se pueden determinar por la ecuación de balance de masas dada como:

$$X_{kilt} = S_{kt} + q_{it} - e_{klt} - S_{l_{t+1}}$$

en donde e_{klt} representa la evaporación durante el período de tiempo t y que es función de los almacenamientos iniciales y finales en ese período.

El caudal de entrada al embalse puede entonces ser tratado como una variable aleatoria independiente o autocorrelacionada. En el primer caso los diferentes posibles valores del caudal q_{it} deben estar acompañados por sus respectivas probabilidades de ocurrencia P_{it} . En el caso de ser considerada una variable aleatoria autocorrelacionada, el conocimiento del caudal en períodos anteriores afecta el valor de la probabilidad de ocurrencia de los posibles valores del caudal en dicho período. En este caso a cada valor posible del caudal q_{it} están asociadas unas probabilidades de transición, las cuales condicionan la ocurrencia de q_{it} para el período t dados los valores ocurridos en períodos anteriores al considerado. En cualquiera de los casos el caudal es una variable aleatoria de la que depende la función de retorno derivada de la operación del embalse. En consecuencia estas funciones de retorno constituyen una variable aleatoria cuyo valor esperado debe ser optimizado.

En cada etapa o período de tiempo t las descargas óptimas del embalse X_{kilt} dependen de dos variables de estado: el volumen inicial S_{kt} y los flujos de entrada q_{it} . Si se asume que la operación del embalse debe terminar al final de un período de tiempo T y se define $f_t^n(k, i)$ como el valor esperado total de las funciones de retorno cuando faltan n períodos de tiempo, incluyendo el período de tiempo actual t con almacenamiento inicial S_{kt} y flujos de entrada q_{it} , el problema a ser solucionado cuando falta sólo un período de tiempo sería:

$$f_T^1(k, i) = \underset{1}{\text{Max (o Min)}} \{R_{kilt}\} \quad \forall k, i$$

Cuando faltan dos períodos de tiempo y se considera que los flujos de entrada al embalse son independientes el problema a ser solucionado sería:

$$f_{T-1}^2(k, i) = \underset{1}{\text{Max(o Min)}} \{R_{kilt-1} + \sum_i P_{iT} f_T^1(1, j)\} \quad \forall k, i$$

pero si los flujos de entrada son autocorrelacionados el problema a ser resuelto sería:

$$f_{T-1}^2(k, i) = \underset{1}{\text{Max(o Min)}} \{R_{kilt-1} + \sum_j P_{ij}^{T-1} f_T^1(1, j)\} \quad \forall k, i$$

en donde R_{kilt} es el valor de la función de retorno asociado con un volumen inicial S_{kt} , unos flujos de entrada al embalse q_{it} , y un volumen final S_{lt} en el período de tiempo t , y P_{ij}^{t-1} es la probabilidad de que los flujos de entrada al embalse durante el período de tiempo t sean q_{jt} cuando en el período $t-1$ fueron q_{jt-1} . Las ecuaciones recursivas anteriores puede generalizarse y escribirse para cada período de tiempo como:

$$f_t^n(k, i) = \underset{1}{\text{Max(o Min)}} \{R_{kilt} + \sum_j P_{jt+1} f_{t+1}^{n-1}(1, j)\} \quad \forall k, i$$

en el caso de independencia temporal de los flujos de entrada, y:

$$f_t^n(k, i) = \underset{1}{\text{Max(o Min)}} \{R_{kilt} + \sum_j P_{ij}^t f_{t+1}^{n-1}(1, j)\} \quad \forall k, i$$

que representan las ecuaciones recursivas generales y que estarían sujetas a las restricciones inherentes a cada etapa tales como:

$$S_{lt+1} = S_{kt} + q_{it} - e_{klt} - X_{kilt} - W_{kilt}$$

$$S_{MIN} \leq S_{lt+1} \leq S_{MAX}$$

$$x_{kilt} \leq s_{kt} + q_{it} - e_{klt}$$

$$0 \leq x_{\text{MIN}} \leq x_{kilt} \leq x_{\text{MAX}}$$

$$0 \leq w_{kilt}$$

En el caso de que se considere que los flujos de entrada al embalse son autocorrelacionados pueden considerarse los casos cíclico y no-cíclico. En el primero se asume que después de cierto período de tiempo las probabilidades de transición vuelven a repetirse y en el segundo se asume que las probabilidades de transición son diferentes en todos los períodos de tiempo. Por ejemplo, si se definen probabilidades de transición a nivel mensual, el caso cíclico consideraría que las probabilidades de transición correspondientes al mes de enero son las mismas para todos los años mientras que el caso no-cíclico consideraría que éstas son diferentes.

Cuando se asume un esquema de probabilidades de transición cíclico y la función recursiva se resuelve para cada período de tiempo, la política de operación del embalse tenderá a converger rápidamente a un valor específico. Si se asume que T representa el ciclo o período considerado y ocurre que el valor de $f_t^{n+T}(k,i) - f_t^n(k,i)$ es constante para todos los estados i,k y todos los períodos de tiempo t dentro del año, se puede decir que la operación alcanzó el estado estable. Observe que se habla de estado estable sólo para el caso cíclico, es decir, cuando las constantes involucradas con las funciones de retorno y las probabilidades de transición no cambian de un año al otro.

Es debido a esto que la regla de operación asociada con el estado estable no depende del período de tiempo y año futuro seleccionado para empezar a solucionar la ecuación recursiva antes planteada. Algunas veces la función recursiva puede estar representada por costos o beneficios y lo que interesa es determinar la regla de operación que maximiza el valor presente de los beneficios netos. En este caso la función de retorno se asume periódica, es decir:

$$R_{kilt} = R_{kilt+T}$$

en donde hay T períodos de tiempo por año. La ecuación recursiva para este caso podría escribirse como:

$$f_t^n(k, i) = \text{Max}_1 \{ R_{kilt} + (1+r)^{-t+1} \sum_j p_{ij}^t f_{t+1}^{n-1}(i, j) \} \quad \forall k, i$$

para la cual también se presentará el estado estable cuando $f_{t-T}^{n+T}(k, i)$ sea igual a $f_t^n(k, i)$ para todo k, i y en este punto se asume que después de n ó $n+T$ períodos de tiempo la operación del embalse es tan alejana en el futuro que no afecta la operación óptima del embalse o los beneficios netos actualizados.

La solución mediante el uso de la programación dinámica define para el estado estable el almacenamiento final óptimo en el embalse $S_{|t+1}$ para cada volumen inicial S_{kt} y flujos de entrada q_{it} en cada período de tiempo t . En esta discusión se ha asumido que los flujos de entrada al embalse durante el período de tiempo t son conocidos, y la regla de operación del embalse define las descargas o el almacenamiento final como una función del almacenamiento inicial que puede ser observado, y los flujos de entrada al embalse, que sólo pueden ser observados al final del período pero que pueden ser predichos. Si no se quiere usar un modelo de predicción de flujos de entrada al embalse se debe entonces desarrollar una regla de operación que no dependa de las futuras entradas al embalse que son desconocidas. Esto puede hacerse identificando una meta para los almacenamientos finales o una meta para las descargas para cada período de tiempo t , a partir del estado estable y sujeto a las limitaciones físicas del sistema. El uso de una regla de operación de este tipo no garantiza descargas constantes del embalse a través del período pero sirve de guía al operador al inicio del período de tiempo cuando no se tiene ningún conocimiento de cuáles serán los flujos de entrada al embalse durante ese período. En la sección siguiente se presentan dos ejemplos de la determinación de este tipo de regla de operación mediante el uso de la programación dinámica estocástica explícita.

Como se puede observar, el uso de la programación dinámica estocástica explícita implica prácticamente la discretización de todas las variables involucradas en el problema debido a que los flujos de entrada al embalse sólo pueden tomar valores específicos para cada período de tiempo. Es por esto que con la forma explícita de la programación dinámica estocástica está sólo asociado el método de cálculo de la programación dinámica discreta. Se podría resolver este problema usando el método de cálculo de la programación dinámica continua si se asume una distribución de probabilidades continuas para los flujos de entrada al embalse, pero este procedimiento de cálculo se encuentra sólo en etapa de investigación.

V. EJEMPLOS DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA

La parte de operación de embalses para el caso de la programación dinámica estocástica explícita es completamente igual a la presentada para el caso determinístico, sólo que en lugar de usar los registros históricos de flujos de entrada al embalse se usan trazas generadas de estos flujos. Es por esta razón que sólo se presentan aquí ejemplos para el caso de la programación estocástica explícita.

Se presentan ahora dos ejemplos sencillos para definir la regla de operación de un embalse usando la programación dinámica estocástica explícita. El primero de los ejemplos corresponde al caso no cíclico, es decir, la operación de un embalse durante un número de períodos de tiempo en donde el último período de tiempo no necesariamente corresponde al último período de un ciclo anual. El segundo de los ejemplos es para el caso cíclico en donde el último período de tiempo del análisis cierra el ciclo anual.

5.1. EJEMPLO DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA EXPLICITA PARA EL CASO NO-CICLICO

En el ejemplo de abastecimiento de agua presentado en la sección 3.1. para el caso determinístico se asume ahora que los caudales de entrada al embalse no se conocen con exactitud, pero que las siguientes probabilidades de transición

han sido calculadas en base a los registros históricos del caudal.

Probabilidades de Transición.

Tiempo t	Caudales		Probabilidad P_{ij}^t
	q_{it}	q_{jt+1}	
0	2/3	1/3	0.3
0	2/3	2/3	0.7
1	1/3	1/3	0.6
1	1/3	2/3	0.4
1	2/3	1/3	0.7
1	2/3	2/3	0.3
2	1/3	0	0.6
2	1/3	1/3	0.4
2	2/3	0	0.4
2	2/3	1/3	0.6

También se sabe que las aportaciones del río al embalse durante el mes anterior al primer mes fueron de 2/3 y que el almacenamiento al inicio del mes de Enero es 1/3. La discretización de los volúmenes en cualquier período de tiempo es de 0, 1/3, 2/3 y 1. Se quiere determinar la regla de operación durante los tres meses señalados que maximice el valor esperado de los beneficios.

El problema a ser resuelto para la primera etapa sería entonces:

$$f_3^1(k, i) = \text{Max}_1 \{R_{ki13}\}$$

sujeto a:

$$0 \leq S_{14} \leq 1$$

$$q_{i3} = 0, 1/3$$

$$X_{ki13} = S_{k3} + q_{i3} - S_{14}$$

$$0 \leq X_{ki13}$$

en donde k representa la discretización para el almacenamiento al inicio del mes S_{k3} , i representa la discretización para los caudales de entrada al embalse durante el mes q_{i3} , l representa la discretización de los almacenamientos al final de mes S_{14} , y X_{ki13} representa las descargas en el embalse durante el tercer mes correspondientes a un almacenamiento inicial en el embalse de S_{k3} , unos flujos de entrada de q_{i3} y un almacenamiento final de S_{14} . R_{ki13} son los retornos correspondientes a esa descarga. Los cálculos para esa etapa se presentan en la Tabla 13 y en general se pueden resumir como sigue:

1. Para cada valor de S_{k3} , q_{i3} y S_{14} se calcula la descarga correspondiente como:

$$X_{ki13} = S_{k3} + q_{i3} - S_{14}$$

2. Se identifica los beneficios R_{ki13} correspondientes a esa descarga y se ubican en el sitio respectivo de la tabla.
3. Para cada valor de k se escoge como mejor l la que produce los mayores beneficios.

Tabla 13. Cálculos para la primera etapa, $f_3^1(k, i)$.

				FUNCION DE RETORNO R_{ki13}					
K	i	S_{k3}	q_{i3}	$S_{14}=0$	$S_{24}=1/3$	$S_{34}=2/3$	$S_{44}=1$	$f_3^1(k, i)$	1*
1	1	0	0	0	-	-	-	0	1
1	2	0	1/3	2500	0	-	-	2500	1
2	1	1/3	0	2500	0	-	-	2500	1
2	2	1/3	1/3	4000	2500	0	-	4000	1
3	1	2/3	0	4000	2500	0	-	4000	1
3	2	2/3	1/3	3500	4000	2500	0	4000	2
4	1	1	0	3500	4000	2500	0	4000	2
4	2	1	1/3	3500	3500	4000	2500	4000	3

Por ejemplo para $k = 3$ e $i = 2$ los cálculos son los siguientes:

$$f_3^1(k, i) = \text{Max} \begin{Bmatrix} R_{3213} (X_{3213}) \\ R_{3223} (X_{3223}) \\ R_{3233} (X_{3233}) \\ R_{3243} (X_{3243}) \end{Bmatrix} = \text{Max} \begin{Bmatrix} R_{3213} (S_{33} + q_{23} - S_{14}) \\ R_{3223} (S_{33} + q_{23} - S_{24}) \\ R_{3233} (S_{33} + q_{23} - S_{34}) \\ R_{3243} (S_{33} + q_{23} - S_{44}) \end{Bmatrix}$$

$$= \text{Max} \begin{Bmatrix} R_{3213} (2/3 + 1/3 - 0) \\ R_{3223} (2/3 + 1/3 - 1/3) \\ R_{3233} (2/3 + 1/3 - 2/3) \\ R_{3243} (2/3 + 1/3 - 1) \end{Bmatrix} = \text{Max} \begin{Bmatrix} R_{3213} (1) \\ R_{3223} (2/3) \\ R_{3233} (1/3) \\ R_{3243} (0) \end{Bmatrix}$$

$$= \text{Max} \begin{Bmatrix} 3500 \\ 4000 \\ 2500 \\ 0 \end{Bmatrix} = 4000 \quad \text{y} \quad 1^* = 2$$

De acuerdo a los resultados presentados en la Tabla 13 la operación para este período de tiempo podría presentarse en forma tabular tal como se muestra en la Tabla 14.

Tabla 14. Entregas del embalse durante el último mes.

		Posibles Almacenamientos			
		$S_{13} = 0$	$S_{23} = 1/3$	$S_{33} = 2/3$	$S_{43} = 1$
Posibles Aportes	0	0	1/3	2/3	2/3
	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3

Los cálculos para la segunda etapa o cuando faltan dos períodos de tiempo son los siguientes:

$$f_2^2(k, i) = \text{Max}_1 \{R_{ki12} + \sum_{j=1}^2 p_{ij}^2 f_3^1(k, i)\}$$

sujeto a:

$$0 \leq S_{13} \leq 1$$

$$q_{i2} = 1/3, 2/3$$

$$X_{ki12} = S_{k2} + q_{i2} - S_{13}$$

$$X_{ki12} \geq 0$$

Los cálculos correspondientes a esta etapa se presentan en la Tabla 15 en donde por ejemplo para $k = 3$ e $i = 1$ los cálculos son los siguientes:

$$f_2^2(k, i) = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{3112} (X_{3112}) + \sum_{j=1}^2 P_{1j}^2 f_3^1(1, j) \\ R_{3122} (X_{3122}) + \sum_{j=1}^2 P_{1j}^2 f_3^1(2, j) \\ R_{3132} (X_{3132}) + \sum_{j=1}^2 P_{1j}^2 f_3^1(3, j) \\ R_{3142} (X_{3142}) + \sum_{j=1}^2 P_{1j}^2 f_3^1(4, j) \end{array} \right\}$$

$$= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{3112} (S_{32} + q_{12} - S_{14}) + P_{11}^2 f_3^1(1, 1) + P_{12}^2 f_3^1(1, 2) \\ R_{3122} (S_{32} + q_{12} - S_{24}) + P_{11}^2 f_3^1(2, 1) + P_{12}^2 f_3^1(2, 2) \\ R_{3132} (S_{32} + q_{12} - S_{34}) + P_{11}^2 f_3^1(3, 1) + P_{12}^2 f_3^1(3, 2) \\ R_{3142} (S_{32} + q_{12} - S_{44}) + P_{11}^2 f_3^1(4, 1) + P_{12}^2 f_3^1(4, 2) \end{array} \right\}$$

$$= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{3112} (2/3 + 1/3 - 0) + 0.6 \times 0.0 + 0.4 \times 2500.0 \\ R_{3122} (2/3 + 1/3 - 1/3) + 0.6 \times 2500.0 + 0.4 \times 4000.0 \\ R_{3132} (2/3 + 1/3 - 2/3) + 0.6 \times 4000.0 + 0.4 \times 4000.0 \\ R_{3142} (2/3 + 1/3 - 1) + 0.6 \times 4000.0 + 0.4 \times 4000.0 \end{array} \right\}$$

$$= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{3112} (1) + 1000.0 \\ R_{3122} (2/3) + 3100.0 \\ R_{3132} (1/3) + 4000.0 \\ R_{3142} (0) + 4000.0 \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 3500 + 1000 \\ 4000 + 3100 \\ 2500 + 4000 \\ 0 + 4000 \end{array} \right\}$$

$$= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 4500 \\ 7100 \\ 6500 \\ 4000 \end{array} \right\} = 7100 \quad y \quad 1^* = 2$$

Tabla 15. Cálculos para la segunda etapa, $f_2^2(k, i)$.

1	2	3	4	R_{k112}				$\sum_{j=1}^2 P_j^2 f_3^1(k, i)$				$R_{k112} + \sum_{j=1}^2 P_j^2 f_3^1(k, i)$				$f_2^2(k, i)$	1*
				5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
K	i	S_{k2}	q_{12}	1=1	1=2	1=3	1=4	1=1	1=2	1=3	1=4	5+9	6+10	7+11	8+12		
1	1	0	1/3	2500	0	-	-	1000	3100	-	-	3500	3100	-	-	3500	1
1	2	0	2/3	4000	2500	0	-	1500	3400	-	-	5500	5900	-	-	5900	2
2	1	1/3	1/3	4000	2500	0	-	1000	3100	4000	-	5000	5600	4000	-	5600	2
2	2	1/3	2/3	3500	4000	2500	0	1500	3400	4000	4000	5000	7400	6500	4000	7400	2
3	1	2/3	1/3	3500	4000	2500	0	1000	3100	4000	4000	4500	7100	6500	4000	7100	2
3	2	2/3	2/3	3500	3500	4000	2500	1500	3400	4000	4000	5000	6900	8000	6500	8000	3
4	1	1	1/3	3500	3500	4000	2500	1000	3100	4000	4000	4500	6600	8000	6500	8000	3
4	2	1	2/3	3500	3500	3500	4000	1500	3400	4000	4000	5000	6900	7500	8000	8000	4

Con los resultados correspondientes a la segunda etapa y presentados en la Tabla 15 se puede desarrollar una regla de operación tal como se muestra en la Tabla 16 para el segundo mes.

Los cálculos para la tercera y última etapa o cuando faltan tres períodos de tiempo son los siguientes:

$$f_1^3(k, i) = \text{Max}_1 \{R_{ki11} + \sum_{j=1}^2 P_{ij}^1 f_2^2(k, i)\}$$

sujeto a:

$$0 \leq S_{12} \leq 1$$

$$S_{k1} = 1/3$$

$$X_{ki11} = S_{k1} + q_{i1} - S_{12}$$

$$X_{ki11} \geq 0$$

Tabla 16. Entregas del embalse durante el segundo mes.

		Posibles Almacenamientos			
		$S_{12} = 0$	$S_{22} = 1/3$	$S_{32} = 2/3$	$S_{42} = 1$
Posibles Aportes	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3
	2/3	1/3	2/3	2/3	2/3

Los cálculos correspondientes a esta etapa son los siguientes:

a) Para $S_{k1} = 1/3$ y $q_{11} = 1/3$

$$\begin{aligned}
 f_1^3(2,1) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{2111}(X_{2111}) + \sum_{j=1}^2 P_{1j}^1 f_2^2(1,j) \\ R_{2121}(X_{2121}) + \sum_{j=1}^2 P_{1j}^1 f_2^2(2,j) \\ R_{2131}(X_{2131}) + \sum_{j=1}^2 P_{1j}^1 f_2^2(3,j) \\ R_{2141}(X_{2141}) + \sum_{j=1}^2 P_{1j}^1 f_2^2(4,j) \end{array} \right\} \\
 &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{2111}(S_{21} + q_{11} - S_{12}) + P_{11}^1 f_2^2(1,1) + P_{12}^1 f_2^2(1,2) \\ R_{2121}(S_{21} + q_{11} - S_{22}) + P_{11}^1 f_2^2(2,1) + P_{12}^1 f_2^2(2,2) \\ R_{2131}(S_{21} + q_{11} - S_{32}) + P_{11}^1 f_2^2(3,1) + P_{12}^1 f_2^2(3,2) \\ R_{2141}(S_{21} + q_{11} - S_{42}) + P_{11}^1 f_2^2(4,1) + P_{12}^1 f_2^2(4,2) \end{array} \right\} \\
 &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{2111}(1/3 + 1/3 - 0) + 0.6 \times 3500 + 0.4 \times 5900 \\ R_{2121}(1/3 + 1/3 - 1/3) + 0.6 \times 5600 + 0.4 \times 7400 \\ R_{2131}(1/3 + 1/3 - 2/3) + 0.6 \times 7100 + 0.4 \times 8000 \\ R_{2141}(\text{NO ES POSIBLE}) \end{array} \right\} \\
 &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 4000 + 4460 \\ 2500 + 6320 \\ 0 + 7460 \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 8460 \\ 8820 \\ 7460 \end{array} \right\} = 8820, \text{ y } 1^* = 2
 \end{aligned}$$

b) Para $S_{k1} = 1/3$ y $q_{i1} = 2/3$

$$f_1^3(2,2) = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{2211}(X_{2211}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^1 f_2^2(1,j) \\ R_{2221}(X_{2221}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^1 f_2^2(2,j) \\ R_{2231}(X_{2231}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^1 f_2^2(3,j) \\ R_{2241}(X_{2241}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^1 f_2^2(4,j) \end{array} \right.$$

$$= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{2211}(S_{21} + q_{21} - S_{12}) + P_{21}^1 f_2^2(1,1) + P_{22}^1 f_2^2(1,2) \\ R_{2221}(S_{21} + q_{21} - S_{22}) + P_{21}^1 f_2^2(2,1) + P_{22}^1 f_2^2(2,2) \\ R_{2231}(S_{21} + q_{21} - S_{32}) + P_{21}^1 f_2^2(3,1) + P_{22}^1 f_2^2(3,2) \\ R_{2241}(S_{21} + q_{21} - S_{42}) + P_{21}^1 f_2^2(4,1) + P_{22}^1 f_2^2(4,2) \end{array} \right.$$

$$= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{2211}(1/3 + 2/3 - 0) + 0.7 \times 3500 + 0.3 \times 5900 \\ R_{2221}(1/3 + 2/3 - 1/3) + 0.7 \times 5600 + 0.3 \times 7400 \\ R_{2231}(1/3 + 2/3 - 2/3) + 0.7 \times 7100 + 0.3 \times 8000 \\ R_{2241}(1/3 + 2/3 - 1) + 0.7 \times 8000 + 0.3 \times 8000 \end{array} \right.$$

$$= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 3500 + 4220 \\ 4000 + 6140 \\ 2500 + 7370 \\ 0 + 8000 \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 7720 \\ 10140 \\ 9870 \\ 8000 \end{array} \right\} = 10140 \text{ y } 1^* = 2$$

La regla de operación para este mes que se deriva de estos resultados se muestran en la Tabla 17.

Como se puede ver de este ejemplo se ha desarrollado para cada mes una tabla de operación a partir de los resultados de la operación óptima del embalse. Estas tablas de operación, que en realidad son unas reglas de operación, indican la cantidad de agua a ser entregada cada mes como función de los almacenamientos iniciales y de los posibles aportes durante el mes. En este ejemplo se consideró un caso no-cíclico, es decir, un caso en donde las probabilidades de transición son diferentes en cada uno de los períodos considerados. Se presenta ahora un ejemplo del caso cíclico en donde las probabilidades de transición son diferentes para cada período de tiempo dentro del año pero iguales de año a año.

Tabla 17. Entregas en el embalse durante el primer mes.

		Posible Almacenamiento	
		$S_{21} = 1/3$	
Posibles Aportes	1/3	1/3	1/3
	2/3	2/3	2/3

5.2. EJEMPLO DE PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA EXPLICITA PARA EL CASO CICLICO

Se quiere definir la regla de operación de un embalse de tal manera que se maximice el valor esperado de la suma de los beneficios obtenidos en cada período de tiempo. Se considera en este ejemplo dos períodos por año y los posibles valores de almacenamiento y aportes al embalse para cada uno de estos períodos se presentan en la Tabla 18. Los beneficios son función de las descargas en el embalse durante cada período y se presentan en la Tabla 19.

Tabla 18. Discretización de los flujos de entrada al embalse y de los almacenamientos para cada período de tiempo.

Tiempo t	Discretización del Caudal i	q_{it}	Discretización del volumen k	S_{kt}
1	1	1/3	1	2/3
1	2	2/3	2	1
2	1	2/3	1	1/3
2	2	1	2	2/3

Tabla 19. Beneficios correspondientes a cada período de tiempo y a cada descarga.

Tiempo t	Descarga X_{kilt}	Beneficio R_{kilt}
1	0	0
1	1/3	2500
1	2/3	4000
1	1	3500
2	0	0
2	1/3	3000
2	2/3	4500
2	1	3000

La Tabla 20 presenta las probabilidades de transición P_{ij}^t de los flujos de entrada al embalse, es decir, la probabilidad de que el caudal sea q_{jt+1} en el período $t+1$ cuando el caudal en el período t fue q_{it} .

Tabla 20. Probabilidades de transición.

Tiempo t	Caudales		Probab. de Transición P_{ij}^t
	q_{it}	q_{jt+1}	
1	1/3	2/3	0.6
1	1/3	1	0.4
1	2/3	2/3	0.4
1	2/3	1	0.6
2	2/3	1/3	0.6
2	2/3	2/3	0.4
2	1	1/3	0.3
2	1	2/3	0.7

Si se asume que el período final es el segundo, la ecuación recursiva para este período de tiempo asociada con cada valor posible del vector de estados iniciales k, i cuando falta un sólo período de tiempo se escribe como:

$$f_2^1(k, i) = \text{Max}_1 \{R_{ki2}\}$$

la solución de esta ecuación recursiva se presenta en la Tabla 21. Los cálculos, por ejemplo, para $k=1$ e $i=2$ son:

$$\begin{aligned}
 f_2^1(1,2) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1212} (X_{1212}) \\ R_{1222} (X_{1222}) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1212} (S_{12} + q_{22} - S_{11}) \\ R_{1222} (S_{12} + q_{22} - S_{21}) \end{array} \right\} \\
 &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1212} (1/3 + 1 - 2/3) \\ R_{1222} (1/3 + 1 - 1) \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1212} (2/3) \\ R_{1222} (1/3) \end{array} \right\} \\
 &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 4500 \\ 3000 \end{array} \right\} = 4500 \quad \text{y} \quad l^* = 1
 \end{aligned}$$

La próxima ecuación recursiva a ser solucionada sería cuando faltan dos períodos de tiempo y se puede escribir como:

$$f_1^2(k,i) = \text{Max}_i \left\{ R_{ki11} + \sum_{j=1}^2 P_{ij}^1 f_2^1(1,j) \right\}$$

Los cálculos para esta segunda etapa se presentan en la Tabla 22, y por ejemplo, para $k = 1$ e $i = 2$ son:

$$\begin{aligned}
 f_1^2(1,2) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1211} (X_{1211}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^1 f_2^1(1,j) \\ R_{1221} (X_{1221}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^1 f_2^1(2,j) \end{array} \right\} \\
 f_1^2(1,2) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1211} (S_{11} + q_{21} - S_{12}) + P_{21}^1 f_2^1(1,1) + P_{22}^1 f_2^1(1,2) \\ R_{1221} (S_{11} + q_{21} - S_{22}) + P_{21}^1 f_2^1(2,1) + P_{22}^1 f_2^1(2,2) \end{array} \right\} \\
 &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1211} (2/3 + 2/3 - 1/3) + 0.4 \times 3000 + 0.6 \times 4500 \\ R_{1221} (2/3 + 2/3 - 2/3) + 0.4 \times 4500 + 0.6 \times 4500 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{Bmatrix} R_{1211}(1) + 3900 \\ R_{1221}(2/3) + 4500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3500 + 3900 \\ 4000 + 4500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7400 \\ 8500 \end{Bmatrix}$$

$$= 8500 \text{ y } i^* = 2$$

La próxima ecuación recursiva a ser solucionada sería cuando faltan tres períodos de tiempo y se puede escribir como:

$$f_2^3(k, i) = \text{Max} \left\{ R_{k i i 2} + \sum_{j=1}^2 P_{ij}^2 f_1^2(1, j) \right\}$$

los cálculos para esta etapa se presentan en la Tabla 23 y, por ejemplo, para $k = 1$ e $i = 2$ son:

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1212}(X_{1212}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^2 f_1^2(1, j) \\ R_{1222}(X_{1222}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^2 f_1^2(2, j) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1212}(S_{12} + q_{22} - S_{11}) + P_{21}^2 f_1^2(1, 1) + P_{22}^2 f_1^2(1, 2) \\ R_{1222}(S_{12} + q_{22} - S_{21}) + P_{21}^2 f_1^2(2, 1) + P_{22}^2 f_1^2(2, 2) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1212}(1/3 + 1 - 2/3) + 0.3 \times 7600 + 0.7 \times 8500 \\ R_{1222}(1/3 + 1 - 1) + 0.3 \times 8500 + 0.7 \times 8000 \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1212}(2/3) + 8230 \\ R_{1222}(1/3) + 8150 \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 12730 \\ 11150 \end{array} \right\} = 12730 \end{aligned}$$

$$\text{y } i^* = 1$$

La próxima ecuación recursiva a ser solucionada sería cuando faltan cuatro períodos de tiempo (la cuarta etapa) y se puede escribir como:

$$f_1^4(k, i) = \text{Max}_i \left\{ R_{k i 1 1} + \sum_{j=1}^2 P_{ij}^1 f_2^3(k, i) \right\}$$

los cálculos para esta etapa se presentan en la Tabla 24 y, por ejemplo, para $k = 1$ e $i = 2$ son:

$$\begin{aligned} f_1^4(1, 2) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1211} (X_{1211}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^1 f_2^3(1, j) \\ R_{1221} (X_{1221}) + \sum_{j=1}^2 P_{2j}^1 f_2^3(2, j) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1211} (S_{11} + q_{21} - S_{12}) + P_{21}^1 f_2^3(1, 1) + P_{22}^1 f_2^3(1, 2) \\ R_{1221} (S_{11} + q_{21} - S_{22}) + P_{21}^1 f_2^3(1, 1) + P_{22}^1 f_2^3(2, 2) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1211} (2/3 + 2/3 - 1/3) + 0.4 \times 10960 + 0.6 \times 12730 \\ R_{1221} (2/3 + 2/3 - 2/3) + 0.4 \times 12460 + 0.6 \times 12650 \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} R_{1211} (1) + 12022 \\ R_{1221} (2/3) + 12574 \end{array} \right\} = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 3500 + 12022 \\ 4000 + 12574 \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 15522 \\ 16574 \end{array} \right\} = 16574 \quad \text{y} \quad 1^* = 2 \end{aligned}$$

Los cálculos para las etapas subsiguientes continúan de la misma forma y la ecuación recursiva general a ser solucionada en cada etapa puede escribirse como:

$$f_t^n(k, i) = \text{Max}_l \{R_{ki} \}_t + \sum_{j=1}^2 P_{ij}^t f_{t+1}^{n-1}(l, j)$$

los resultados para las etapas 5 a 12 se presentan en las Tablas 25 a 32.

Se había anotado antes que el estado estable se obtiene cuando:

$$f_t^{n+T}(k, i) - f_t^n(k, i) \text{ sea constante para todo } k, i$$

y en donde T es el período o ciclo. Observe que en este ejemplo el período T es dos y en base a las tablas desarrolladas para las diferentes etapas se puede construir la siguiente tabla que muestra la diferencia anterior para ca da período:

$f_2^3 - f_2^1$	$f_1^4 - f_1^2$
7960	8068
8230	8074
7960	8036
8150	8074
$f_2^5 - f_2^3$	$f_1^6 - f_1^4$
8070	8071
8072	8066
8070	8067
8063	8066
$f_2^7 - f_2^5$	$f_1^8 - f_1^6$
8069	8068
8068	8067
8069	8068
8066	8067
$f_2^9 - f_2^7$	$f_1^{10} - f_1^8$
8077	8073
8067	8071
8077	8073
8067	8071

$$f_2^{11} - f_2^9$$

8063
8072
8063
8072

$$f_1^{12} - f_1^{10}$$

8067
8068
8067
8068

Se puede entonces concluir a partir de estos resultados que el estado estable se alcanza a partir de la décima etapa. Los resultados de la operación óptima para cada período de tiempo se pueden resumir como:

a) Para $t = 1$

s_{k1}	q_{i1}	s_{12}^*	x_{ki1}^*
2/3	1/3	1/3	2/3
2/3	2/3	2/3	2/3
1	1/3	2/3	2/3
1	2/3	2/3	1

b)

s_{k2}	q_{i2}	s_{11}^*	x_{ki2}^*
1/3	2/3	2/3	1/3
1/3	1	2/3	2/3
2/3	2/3	2/3	2/3
2/3	1	1	2/3

y de estos resultados se puede concluir la siguiente operación óptima:

a) Para $t = 1$. Entregas del embalse durante el primer período.

		Posibles Almacenamientos	
		$S_{11} = 2/3$	$S_{21} = 1$
Posibles Aportes	$q_{11} = 1/3$	2/3	2/3
	$q_{21} = 2/3$	2/3	1

b) Para $t = 2$. Entregas del embalse durante el segundo período.

		Posibles Almacenamientos	
		$S_{12} = 1/3$	$S_{22} = 2/3$
Posibles Aportes	$q_{12} = 2/3$	1/3	2/3
	$q_{22} = 1$	2/3	2/3

Estas reglas de operación son reglas secuenciales en donde los almacenamientos al final del período dependen de los almacenamientos iniciales y de los flujos de entrada al embalse durante el período. Dado que los caudales de entrada al embalse no se conocen ellos pueden ser predichos o se puede tratar de desarrollar una regla de operación que le indique al operador cual es su meta durante el período de tiempo sólo en función del almacenamiento inicial. Para poder desarrollar una regla como esta última la solución óptima debe dar como resultado un almacenamiento final o unas entregas del embalse que son las mismas para todos los aportes correspondientes a cada almacenamiento inicial. Por ejemplo, la solución óptima en este ejemplo da que para $S_{11} = 2/3$ se tiene $X_{1111} = X_{1221} = 2/3$ para los diferentes aportes. Esto permite desarrollar una regla de operación como la siguiente:

t	S_{kt}	S_{1t+1}	META	
			δ	$X_{ki t}$
1	2/3	-		2/3
1	1	2/3		-
2	1/3	2/3		-
2	2/3	-		2/3

lo cual indica que, por ejemplo, para el primer período de tiempo si el almacenamiento inicial es 2/3 la meta es entregar durante ese período 2/3, pero si el almacenamiento inicial es 1 la meta es llegar a su volumen final de 2/3.

Se ha presentado en estas secciones como la Programación Dinámica Estocástica puede usarse para determinar la regla de operación de un embalse junto con sus limitaciones y alcances. En la sección siguiente se presentan dos casos de aplicación reales del algoritmo de programación dinámica en embalses.

Tabla 21. Cálculos para la primera etapa, $f_2^1(k, i)$

K	i	S_{k2}	q_{k2}	$R_{ik 2}$		$f_2^1(k, i)$	l^*
				l = 1	l = 2		
1	1	1/3	2/3	3000	0	3000	1
1	2	1/3	1	4500	3000	4500	1
2	1	2/3	2/3	4500	3000	4500	1
2	2	2/3	1	3000	4500	4500	2

Tabla 22. Cálculos para la segunda etapa, $f_1^2(k, i)$

k	i	S_{k1}	q_{k1}	R_{ki11}		$\sum_{j=1}^2 P_{ij}^1 f_2^1(1, j)$		$R + \Sigma Pf$		$f_1^2(k, i)$	1*
				1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2		
1	1	2/3	1/3	4000	2500	3600	4500	7600	7000	7600	1
1	2	2/3	2/3	3500	4000	3900	4500	7400	8500	8500	2
2	1	1	1/3	3500	4000	3600	4500	7100	8500	8500	2
2	2	1	2/3	3500	3500	3900	4500	7400	8000	8000	2

Tabla 23. Cálculos para la tercera etapa, $f_2^3(k, i)$

K	i	S_{k1}	q_{k1}	R_{ki12}		$\sum_{j=1}^2 P_{ij}^2 f_1^2(1, j)$		$R + \Sigma Pf$		$f_2^3(k, i)$	1*
				1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2		
1	1	1/3	2/3	3000	0	7960	8300	10960	8300	10960	1
1	2	1/3	1	4500	3000	8230	8150	12730	11150	12730	1
2	1	2/3	2/3	4500	3000	7960	8300	12460	11300	12460	1
2	2	2/3	1	3000	4500	8230	8150	11230	12650	12650	2

Tabla 24. Cálculos para la cuarta etapa, $f_1^4(k, i)$

K	i	S_{k1}	q_{k1}	R_{ki11}		$\sum_{j=1}^2 P_{ij}^1 f_2^3(1, j)$		$R + \Sigma Pf$		$f_1^4(k, i)$	1*
				1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2		
1	1	2/3	1/3	4000	2500	11668	12536	15668	15036	15668	1
1	2	2/3	2/3	3500	4000	12022	12574	15522	16574	16574	2
2	1	1	1/3	3500	4000	11668	12536	15168	16536	16536	2
2	2	1	2/3	3500	3500	12022	12574	15522	16074	16074	2

Tabla 25. Cálculos para la quinta etapa, $f_2^5(k, i)$

K	i	S_{k2}	q_{k2}	$R_{ki12} \sum_{j=1}^2 P_{ij}^2 f_1^4(1, j)$				R + Σ Pf		$f_2^5(k, i)$	1^*
				1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2		
1	1	1/3	2/3	3000	0	16030	16351	19030	16351	19030	1
1	2	1/3	1	4500	3000	16302	16213	20802	19213	20802	1
2	1	2/3	2/3	4500	3000	16030	16351	20530	19351	20530	1
2	2	2/3	1	3000	4500	16302	16213	19302	20713	20713	2

Tabla 26. Cálculos para la sexta etapa, $f_1^6(k, i)$

K	i	S_{k1}	q_{i1}	$R_{ki11} \sum_{j=1}^2 P_{ij} f_2^5(1, j)$				R + Σ Pf		$f_1^6(k, i)$	1^*
				1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2		
1	1	2/3	1/3	4000	2500	19739	20603	23739	23103	23739	1
1	2	2/3	2/3	3500	4000	20093	20640	23593	24640	24640	2
2	1	1	1/3	3500	4000	19739	20603	23239	24603	24603	2
2	2	1	2/3	3500	3500	20093	20640	23593	24140	24140	2

Tabla 27. Cálculos para la séptima etapa, $f_2^7(k, i)$

K	i	S_{k1}	q_{i1}	$R_{ki12} \sum_{j=1}^2 P_{ij}^2 f_1^6(k, i)$				R + Σ Pf		$f_2^7(k, i)$	1^*
				1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2	1 = 1	1 = 2		
1	1	1/3	2/3	3000	0	24099	24418	27099	24418	27099	1
1	2	1/3	1	4500	3000	24370	24279	28870	27279	28870	1
2	1	2/3	2/3	4500	3000	24099	24418	28599	27418	28599	1
2	2	2/3	1	3000	4500	24370	24279	27370	28779	28779	2

Tabla 28. Cálculos para la octava etapa, $f_1^8(k,i)$

K	i	S_{k1}	q_{i1}	R_{ki11}		$\sum_{j=1}^2 P_{ij}^1 f_2^7(k,i)$		R + ΣPf		$f_1^8(k,i)$	1^*
				l = 1	l = 2	l = 1	l = 2	l = 1	l = 2		
1	1	2/3	1/3	4000	2500	27807	28671	31807	31171	31807	1
1	2	2/3	2/3	3500	4000	28162	28707	31662	32707	32707	2
2	1	1	1/3	3500	4000	27807	28671	31307	32671	32671	2
2	2	1	2/3	3500	3500	28162	28707	31662	32207	32207	2

Tabla 29. Cálculos para la novena etapa, $f_2^9(k,i)$

K	i	S_{k2}	q_{i2}	R_{ki12}		$\sum_{j=1}^2 P_{ij}^2 f_1^8(k,i)$		R + ΣPf		$f_2^9(k,i)$	1^*
				l = 1	l = 2	l = 1	l = 2	l = 1	l = 2		
1	1	1/3	2/3	3000	0	32176	32485	35176	32485	35176	1
1	2	1/3	1	4500	3000	32437	32346	36937	35346	36937	1
2	1	2/3	2/3	4500	3000	32176	32485	36676	35485	36676	1
2	2	2/3	1	3000	4500	32437	32346	35437	36846	36846	2

Tabla 30. Cálculos para la décima etapa, $f_1^{10}(k,i)$

K	i	S_{k1}	q_{i1}	R_{ki11}		$\sum_{j=1}^2 P_{ij} f_2^9(k,i)$		R + ΣPf		$f_1^{10}(k,i)$	1^*
				l = 1	l = 2	l = 1	l = 2	l = 1	l = 2		
1	1	2/3	1/3	4000	2500	35880	36744	39880	39244	39880	1
1	2	2/3	2/3	3500	4000	36233	36778	39733	40778	40778	2
2	1	1	1/3	3500	4000	35880	36744	39380	40744	40744	2
2	2	1	2/3	3500	3500	36233	36778	39733	40278	40278	2

Tabla 31. Cálculos para la onceava etapa, $f_2^{11}(k,i)$

K	i	S_{k1}	q_{i1}	R_{ki12}		$\sum_{j=1}^2 P_{ij}^2 f_1^{10}(k,i)$		R + ΣPf		$f_2^{11}(k,i)$	i^*
				l = 1	l = 2	l = 1	l = 2	l = 1	l = 2		
1	1	1/3	2/3	3000	0	40239	40558	43239	40558	43239	1
1	2	1/3	2	4500	3000	40509	40418	45009	43418	45009	1
2	1	2/3	2/3	4500	3000	40239	40558	44739	43558	44739	1
2	2	2/3	1	3000	4500	40509	40418	43509	44918	44918	2

Tabla 32. Cálculos para la doceava etapa $f_1^{12}(k,i)$

K	i	S_{k1}	q_{i1}	R_{ki11}		$\sum_{j=1}^2 P_{ij}^1 f_2^{11}(k,i)$		R + ΣPf		$f_1^{12}(k,i)$	i^*
				l = 1	l = 2	l = 1	l = 2	l = 1	l = 2		
1	2	2/3	1/3	4000	2500	43947	44811	47947	47311	47947	1
1	2	2/3	2/3	3500	4000	44301	44846	47801	48846	48846	2
2	1	1	1/3	3500	4000	43947	44811	47447	48811	48811	2
2	2	1	2/3	3500	3500	44301	44846	47801	48346	48346	2

VI. CASOS DE APLICACION REAL

En este capítulo se presentan dos casos de aplicación real del algoritmo de programación dinámica en embalses. En el primer caso se usa la programación dinámica estocástica explícita para definir la regla de operación mensual del embalse de Salvajina, localizado en la cuenca del río Cauca, Colombia. En el segundo caso se usa el algoritmo de programación dinámica para determinar la operación del embalse Guárico sobre el río Guárico durante un período histórico de registros y mediante el método de cálculo de la programación dinámica continua.

6.1. APLICACION DE LA PROGRAMACION DINAMICA ESTOCASTICA EXPLICITA PARA DEFINIR LA REGLA DE OPERACION MENSUAL DEL EMBALSE DE SALVAJINA SOBRE EL RIO CAUCA, COLOMBIA.

a) *Descripción y Solución Propuesta del Problema*

El río Cauca, entre las localidades de Timba y La Virginia, discurre por la planicie del Alto Cauca con pendientes relativamente suaves y curso meándrico. La altura de sus taludes varía entre tres y cinco metros y a causa de sus desbordamientos ha conformado diques naturales de tal manera que las tierras adyacentes están a un nivel inferior que la corona de las bermas. Anualmente se presentan desbordamientos del río que provocan anegamientos de las tierras vecinas.

Se ha estimado que para crecidas de frecuencia de una vez en diez años la extensión de la zona inundada por el río Cauca cubre una superficie aproximada de 100.000 hectáreas. Del mismo modo los tributarios se desbordan e inundan apreciables extensiones de tierra. Otras zonas se inundan por deficiencia de drenaje para escurrimientos de aguas de lluvias y en las tierras vecinas a las zonas inundadas prevalecen los niveles freáticos altos.

Las dificultades de drenaje de la zona inundable por el río Cauca se deben a que el nivel del terreno adyacente a las orillas del río y sus afluentes es

más bajo que ellas. El drenaje sólo se logra en períodos de verano cuando los niveles del Cauca lo permiten. Las labores de limpieza y mantenimiento de los drenajes sólo sirven para acelerar la evacuación de las aguas de inundación al llegar el estiaje, pero vuelven a colmatarse en poco tiempo.

La zona también tiene problemas de calidad de agua.

Los estudios realizados por la CVC desde 1969 indican que el estado de contaminación de las aguas del río Cauca, especialmente en épocas de caudales mínimos, es francamente alarmante y que progresa cada vez más con el transcurso del tiempo. Ejemplo de ello es la cantidad de oxígeno disuelto que aguas abajo de la ciudad de Cali decrece enormemente hallándose en algunos sitios valores de 0 mgr/lit, (CVC, 1971). Tan sólo a su salida del Departamento del Valle el río adquiere valores de OD por encima de 4 mgr/lit.

Para solucionar este problema se ha propuesto un proyecto de regulación del río Cauca que tiene como objetivo primario el control de inundaciones hasta con frecuencia de una vez en diez años con el fin de recuperar para la explotación agrícola un área aproximada de 100.000 hectáreas, afectada por las avenidas periódicas del río, la recuperación debe complementarse con obras primarias de adecuación de tierras.

Las obras que contempla el Proyecto son: (Figura 3).

- Una presa sobre el río Cauca en el sitio de Salvajina.
- Diques a lado y lado del río Cauca desde el sitio La Balsa hasta la localidad de La Virginia.
- Diques sobre los tributarios ubicados entre las anteriores estaciones y hasta el punto de influencia del remanso.
- Obras complementarias de adecuación tales como canales interceptores de aguas lluvias, canales de drenaje y estaciones de bombeo.

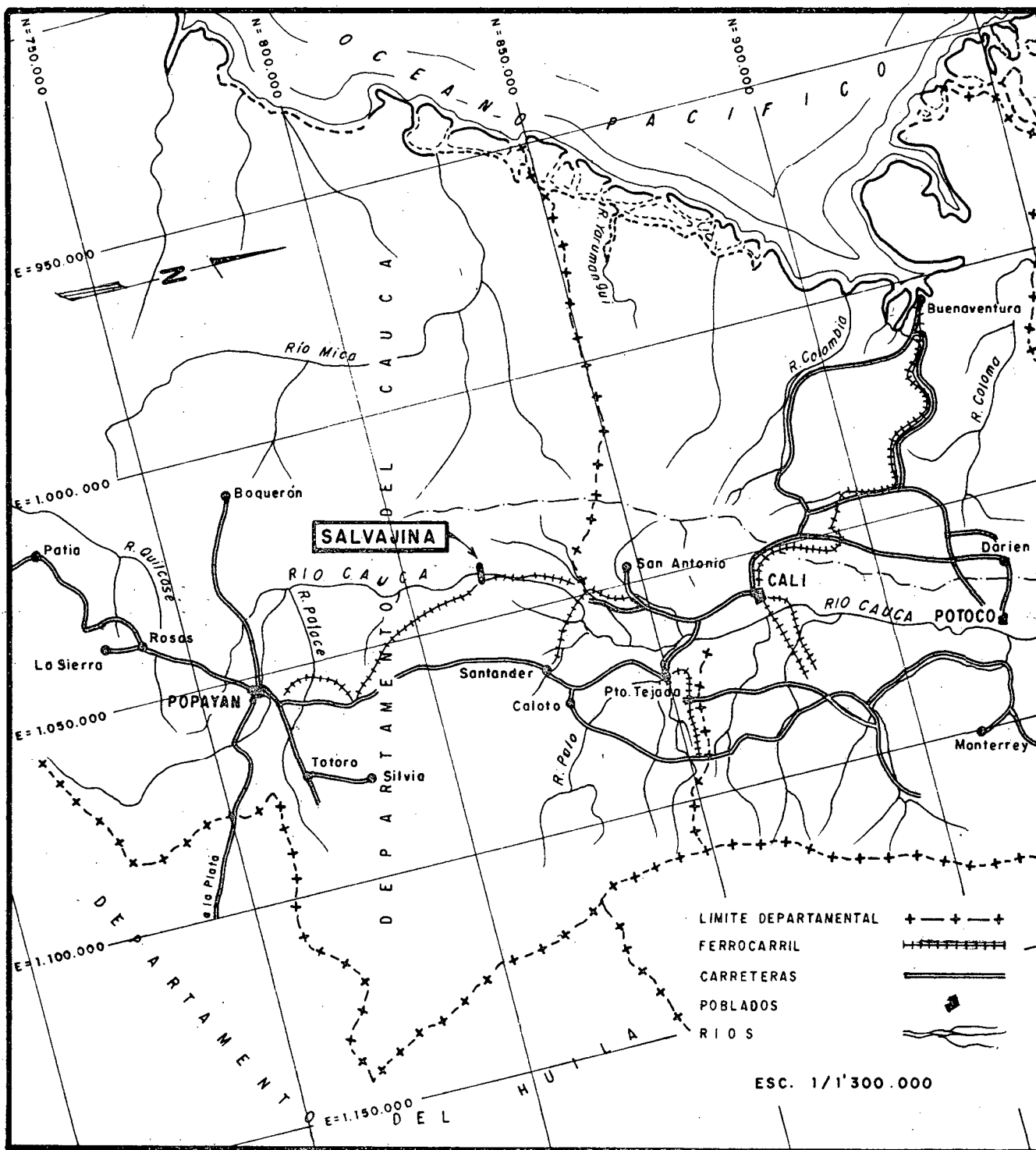


Figura 3.- Ubicación del Proyecto Salvajina

Como objetivo secundario y aprovechando la construcción de la presa y la formación del embalse en Salvajina se propone generar energía eléctrica mediante una central de capacidad instalada inicial de 180 Mw.

Con descargas del embalse en los períodos de estiaje se podrá aliviar la contaminación del río Cauca. Este beneficio, que se traduce en el aplazamiento de la construcción de plantas de tratamiento de aguas residuales, es complementario y se logra sin detrimento de las operaciones de control de inundaciones y de generación de energía, (CVC, 1975 b).

Al eliminar con la construcción de diques el embalse natural provisto por la planicie inundable, los caudales del río Cauca aumentan notablemente. En el caso de una avenida de 1:10 años los caudales en la Virginia aumentarían de un máximo de $1.732 \text{ m}^3/\text{seg}$ a $2.557 \text{ m}^3/\text{seg}$. Para contrarrestar los perjuicios que este aumento de caudales pudiera ocasionar aguas abajo de La Virginia se recomienda utilizar al máximo el efecto regulador del embalse de Salvajina, de tal manera que se obtengan caudales similares a los que se tienen actualmente sin la construcción de los diques. Por esta razón se recomienda adoptar la alternativa de presa de altura máxima y diques mínimos, (CVC, 1975 b).

En resumen, el proyecto se ha concebido buscando la relación de altura de presa y diques que reúna las siguientes condiciones:

- Niveles en el río Cauca similares a los registrados sin el proyecto.
- Regulación con embalse para control de inundaciones y disminución de la contaminación mediante el aumento de los caudales en períodos de estiaje.
- Costo mínimo.

La construcción de la presa ofrece la oportunidad de generar energía lo cual contribuirá enormemente a la financiación del proyecto.

Con relación al alivio de la contaminación del río, por no ser un propósito cuantificable no irá incluido en la función objetivo del modelo de optimización pero de hecho aparecerá en las restricciones.

De la interacción de un modelo de simulación de calidad de agua y un modelo económico cuya función objetivo busca la maximización de beneficios netos considerando los usos para irrigación, generación de energía, abastecimiento municipal e industrial y dilución, se llegó a las siguientes conclusiones. (CVC, 1975 a):

1. La presa de Salvajina es conveniente para propósitos de generación de energía, control de crecientes y aumento de flujos mínimos, pero no necesaria para propósitos de riego. Esto se explica por la existencia de suficiente agua superficial y subterránea disponible para la expansión de irrigación a tierras agrícolas en los sistemas tributarios del río Cauca.
2. De diciembre a abril el valor de la energía es alrededor de 20% mayor que en el resto del año. Teniendo en cuenta los promedios históricos de febrero, marzo y abril de los caudales que llegan a Salvajina, el excedente de los volúmenes de esos meses sobre lo necesario para operar continuamente una unidad hidroeléctrica es de 250 millones de metros cúbicos.

Si en lugar de utilizar esos 250 millones de m^3 para producir energía, se almacenan para aumentar los caudales en períodos de estiaje, con fines de disminuir la contaminación, se tendrá una pérdida aparente anual bastante elevada.

3. Si se descargan durante los meses de julio a octubre los 250 millones de m^3 de tal manera que conjuntamente con el aporte de los tributarios entre Salvajina y Juanchito, produzcan un caudal no menor a $127 m^3/seg$ en esta última estimación, el modelo de calidad demuestra que el efecto del flujo de dilución equivale al aplazamiento en cinco años de la construcción de una planta de tratamiento de costo aproximado de 20 millones de dólares.

En cuanto a generación de energía se debe acotar que la central de Salvajina se incorporará al sistema interconectado de generación como parte del sistema regional de la CVC. Los siguientes son los precios de compra de energía a Interconexión Eléctrica, S.A.: ¹.

- i. Tarifa de energía de verano: 0.2636 centavos de unidad de valor -UV-, por Kw-hr.
- ii. Tarifa de energía de invierno: 0.2028 de UV por Kw-hr.

El período de verano se extiende de Diciembre a Abril; el de invierno en el resto del año. El valor de la unidad de valor a precios de 1976 es de 29.61 centavos y se incrementa a razón de 15% anual.

b) *Características Físicas del Embalse y Presa de Salvajina*

Las características físicas del embalse y presa de Salvajina que se dan a continuación, son tomadas de la referencia CVC (1975 a).

A. Caudales:

- 1. Caudal medio 141 m³/seg
- 2. Caudal máximo registrado 1.143 m³/seg

B. Capacidad generadora:

Salto bruto:

Mínimo	72 m.
Medio	92 m.
Máximo	119 m.

¹ Datos directamente consultados al Departamento de Estudios Económicos de la CVC.

C. Embalse:

1. Hoya hidrográfica hasta Salvajina 3.960 km²
2. Capacidad

Util	620 Mm ³ .
Embalse muerto	153 Mm ³ .
Embalse total	773 Mm ³ .
3. Cotas de embalse

Cota mínima	1.102 m.
Cota de embalse medio para generación.	1.125 m.
Nivel controlado máximo	1.149 m.

Presa

1. Tipo: de gravas y enrocado con cara de concreto.
2. Taludes:

aguas arriba	1.5:1
aguas abajo	1.5:1
3. Altura:

desde el punto más bajo de la fundación	154 m
desde el lecho del río	126 m.
4. Cresta:

longitud	426 m.
ancho	12 m.

Aliviadero:

Tipo: Canal abierto con compuertas

3 compuertas radiales de 12 m. de ancho
x 13.7 m. de alto

Cota cresta de la gola 1.135 m.

Longitud de la gola 36 m.

Capacidad 3.550 m³/seg.

Estructura de salidad de fondo:

Tipo de control Válvula de mariposa, $\phi = 3.30$ m.

Válvula de descarga: válvula Howell-Bumger, $\phi = 2.70$ m.

Túnel de carga y obras complementarias:

Bocatoma: pozo vertical revestido con concreto y cajón de acero con rejas coladeras.

Dimensiones de la estructura de rejas:

12.0 m x 12.0 m x 11.0 m de altura.

Pozo:

Forma: circular con revestimiento de concreto

diámetro 8,20 m

altura 55,00 m

cota de la boca de entrada 1.087,00 m

Túnel de carga: se utiliza uno de los túneles de desviación

Tipo: herradura circular

diámetros:

herradura, revestimiento de concreto	8,20 m
circular, blindado	7,40 m
bifurcación, blindada	7,40 m

D. Casa de máquinas:

Capacidad total	180 Mw
Unidades	2
Caudal total	233 m ³ /seg

Cotas:

del eje distribuidor de las turbinas	1.023 m.
del piso de generadores	1.035 m.

E. Turbinas:

Tipo: Francis de eje vertical

descarga máxima por unidad	116.5 m ³ /seg
potencial nominal	122.000
sumergencia	5.6 m.
velocidad	180 r.p.m.
eficiencia nominal	92%
velocidad específica (métrica)	49

La Figura 4, corresponde a la planta general de la presa; la Figura 5, corresponde a la curva área-capacidad del embalse; en las Figuras 6 y 7 se presentan las curvas de descarga por el conducto de fondo y por las turbinas respectivamente.

Este estudio trata de encontrar una política óptima de operación mensual para el embalse de Salvajina, considerando todos los propósitos para los cuales fue concebido, ya que sólo bajo consideraciones de operación puede juzgarse su verdadero valor.

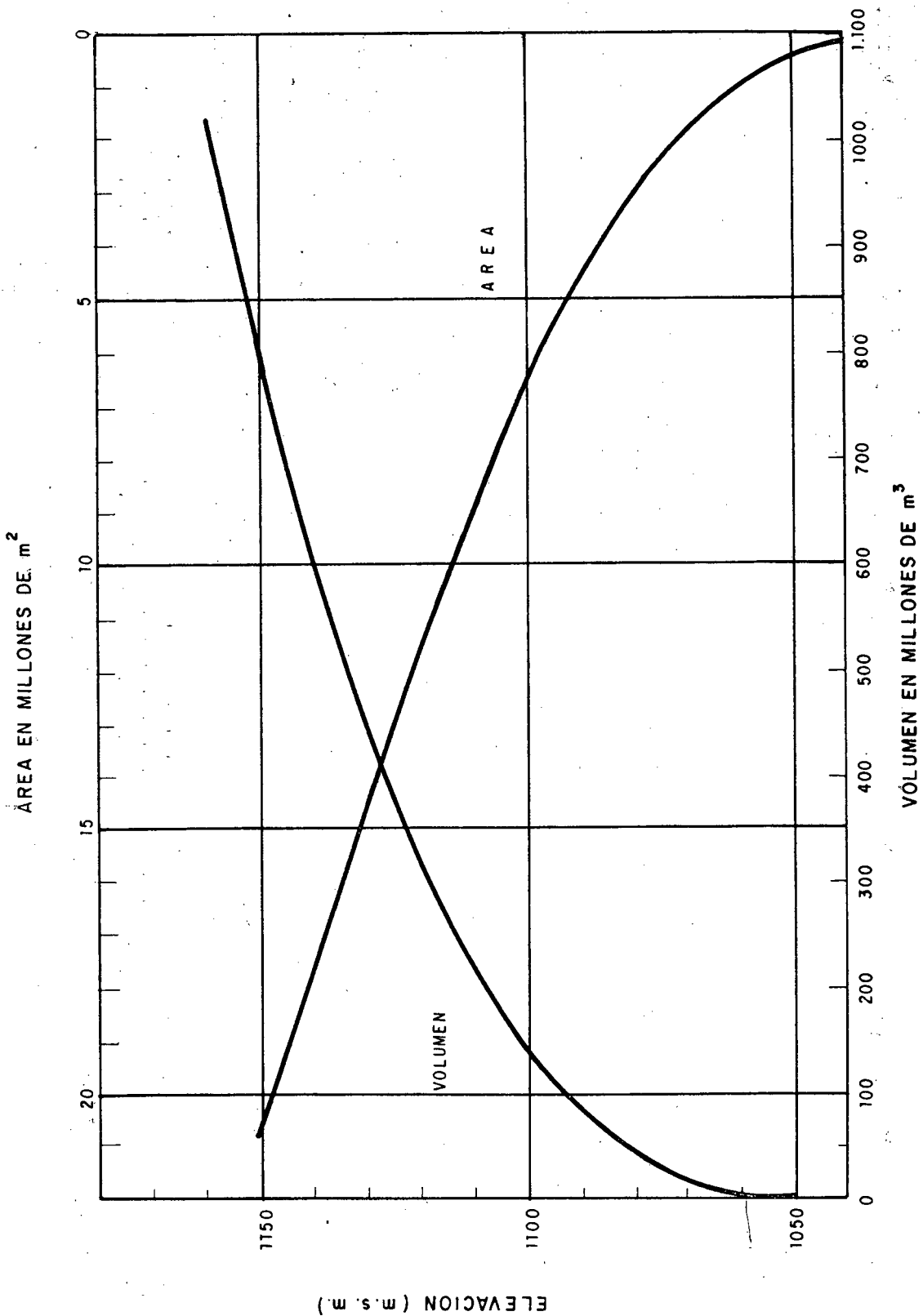


Figura 5.- Curva de Area - Capacidad del Embalse de Salvajina

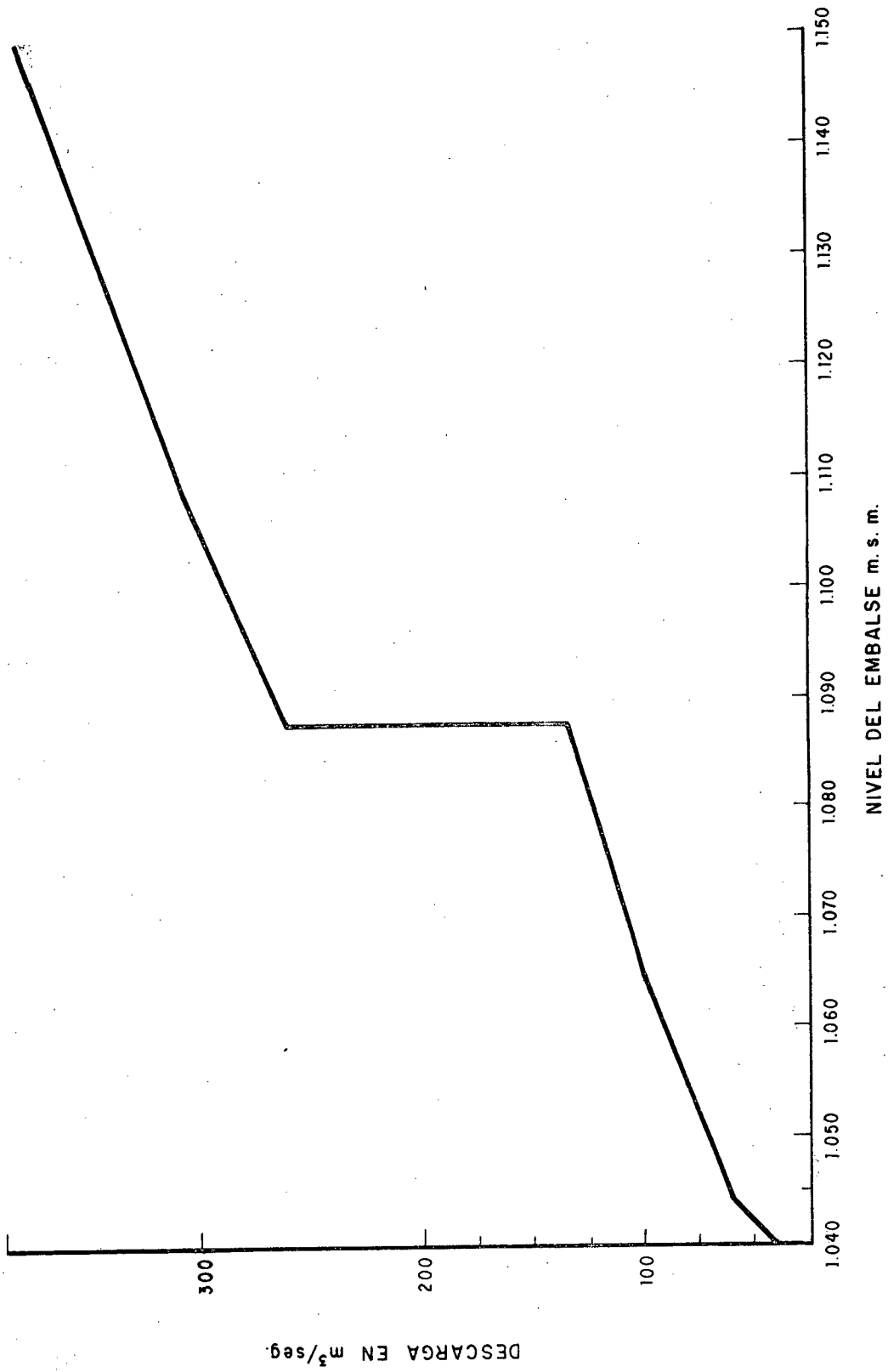
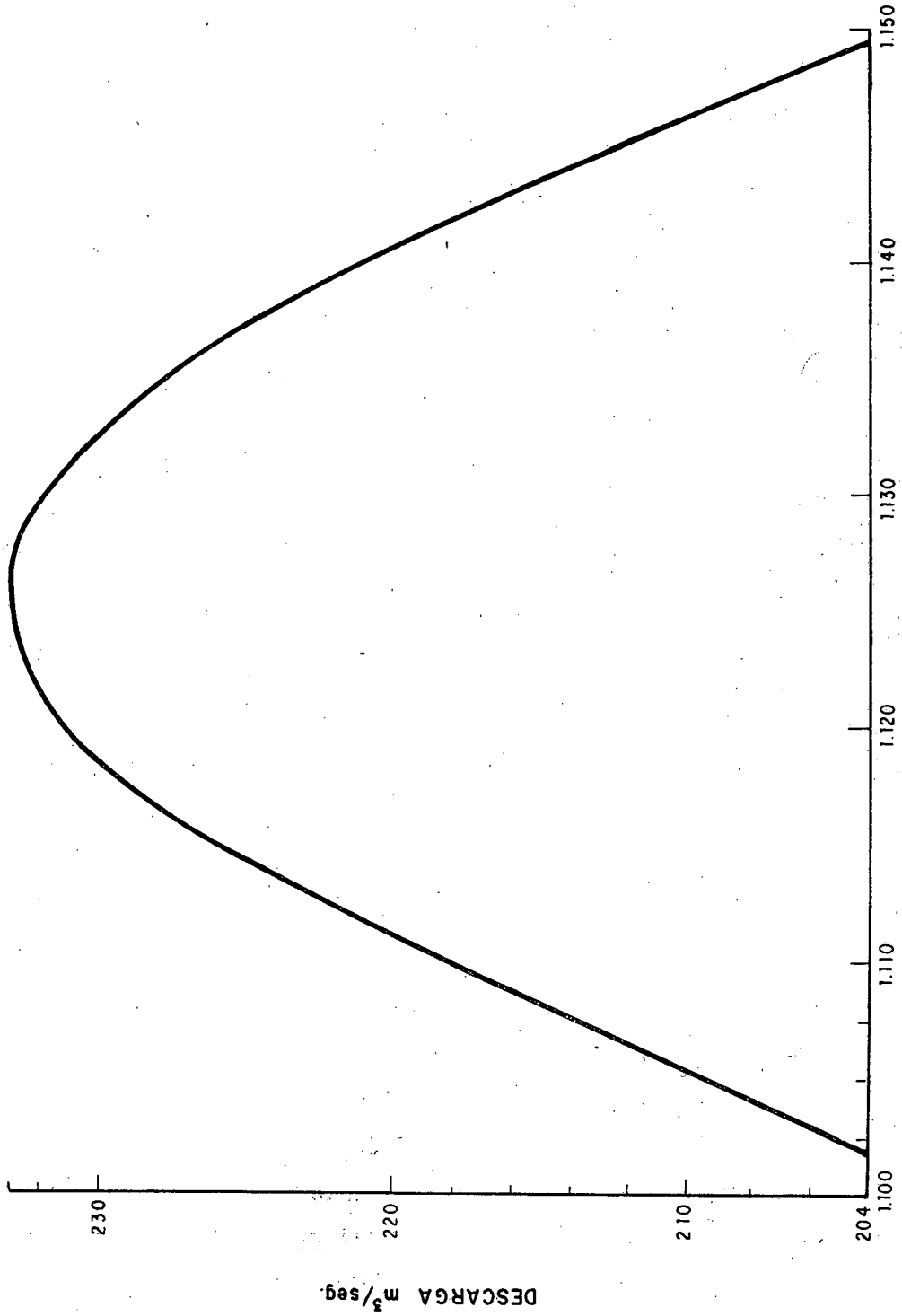


Figura 6.- Curva de Descarga Combinada de los Conductos de Fondo



NIVEL DEL EMBALSE

Figura 7.- Curva de Descarga por las Turbinas

c) *Determinación de una Función de Retorno*

Para determinar la función objetivo del problema de operación es básico la de finición de los posibles beneficios y daños asociados con esta operación, es decir, con el embalse propuesto.

Beneficios

Hay una sola forma de ingresos por la operación del embalse de Salvajina: la venta de energía.

La energía eléctrica representa una transformación de la energía potencial del agua almacenada cuando pasa a través de las turbinas. La cantidad de energía que puede generarse está limitada por la capacidad física del equipo instalado; el tamaño del equipo instalado es una decisión de diseño, a la cual puede servir de guía muy valiosa un estudio de operación como el presente.

La central de Salvajina se incorporará el sistema interconectado nacional de generación como aporte del sistema regional de la CVC. Si no se construyera la central de Salvajina, la alternativa en cuanto a satisfacer la demanda de energía sería importar al Departamento del Valle del Cauca energía básica proveniente de plantas hidroeléctricas construidas en otras regiones del país. Parece entonces razonable tomar como criterio para evaluar los ingresos por venta de energía, el valor de la energía básica que la CVC tendría que comprar a ISA Interconexión Eléctrica, S.A.

Para la época en que Salvajina entre en producción, 1981, la CVC compraría energía de la planta de Chivor, actualmente en construcción. Las tarifas de energía en ISA con base en índices o unidades de valor constante, se calculan teniendo en cuenta las variaciones en la tasa de cambios y el costo de vida-obrero, dándole una ponderación del 60% a la tasa de cambio y el 40% al costo de vida-obrero. Los precios de energía se dieron en la subsección anterior.

La capacidad en turbinas es:

$$P = 9.8 \times h \ E$$

siendo:

- P potencia en Kw
- X descarga en m³/seg
- h carga o cabeza en metros
- E eficiencia de turbinas

Como en el modelo los caudales se dan en millones de m³, el período de análisis es de un mes y los beneficios se dan en millones de pesos, se tiene:

$$P = \frac{9.8 \times 7200 \text{ hora/mes}}{87400 \text{ seg/día} \times 30 \text{ días/mes}} \times h \ E$$

$$P = 2722.22 \times h \ E \quad \text{Kw}$$

Si se llama BENERG a los beneficios por venta de energía se tendrá:

En verano:

$$\text{BENERG} = X * (h - 1030.0) * 0.92 * 0.002722 * 0.2636$$

y en invierno:

$$\text{BENERG} = X * (h - 1030.0) * 0.92 * 0.002722 * 0.2281$$

Daños por inundaciones

Daños por inundaciones se producirán cuando el volumen de agua que descargue el embalse sea superior a la capacidad entre diques aguas abajo de la presa.

Existen datos de los daños causados por inundaciones del río Cauca en Diciembre de 1966, Noviembre de 1967, Noviembre de 1970 a Abril de 1971 y Noviembre de 1973 a Abril de 1974. Con los datos de superficies inundables y de pérdidas agropecuarias y de otra índole causadas por las descargas desbordadas fue posible encontrar una curva de daños como la que se muestra en la Figura 8. Al observar esta figura se puede notar que los daños por inundaciones en todo el valle del río Cauca se han referido tomando como parámetro básico la estación Juanchito situada muy cerca de la ciudad de Cali; la explicación que se da a esta asunción se basa en el hecho de que se conoce la relación que existe entre caudales en Juanchito y las restantes 10 estaciones hidrométricas distribuidas a lo largo del río Cauca entre Salvajina y La Virginia y que por consiguiente un dato de crecida en Juanchito es indicativo de lo que ocurre en todo el valle anegable (CVC 1975, c).

Este trabajo tiene que someterse a tan grueso estimado de daños por ser el único disponible. En la Figura 9 se hace una ampliación de la curva de daños que se presentaría después de construido el Proyecto de Regulación del río Cauca.

Para evaluar los daños que se ocasionan al producirse una avenida de determinada frecuencia y estar el embalse a cierto nivel, se procede de la siguiente manera:

Determinar la frecuencia de avenidas en la estación Salvajina, cuyos resultados se transcriben en la Tabla 33.

Determinar el hidrograma unitario para la estación Salvajina.

Por definición, hidrograma unitario es un hidrograma derivado de una tormenta de duración especificada que produce 1 mm. de escorrentía directa en el área de drenaje correspondiente.

Para evaluarlo se escogió una creciente típica del río Cauca sin mayor aporte de los tributarios, tal como la registrada en Julio de 1974 que aparece en la

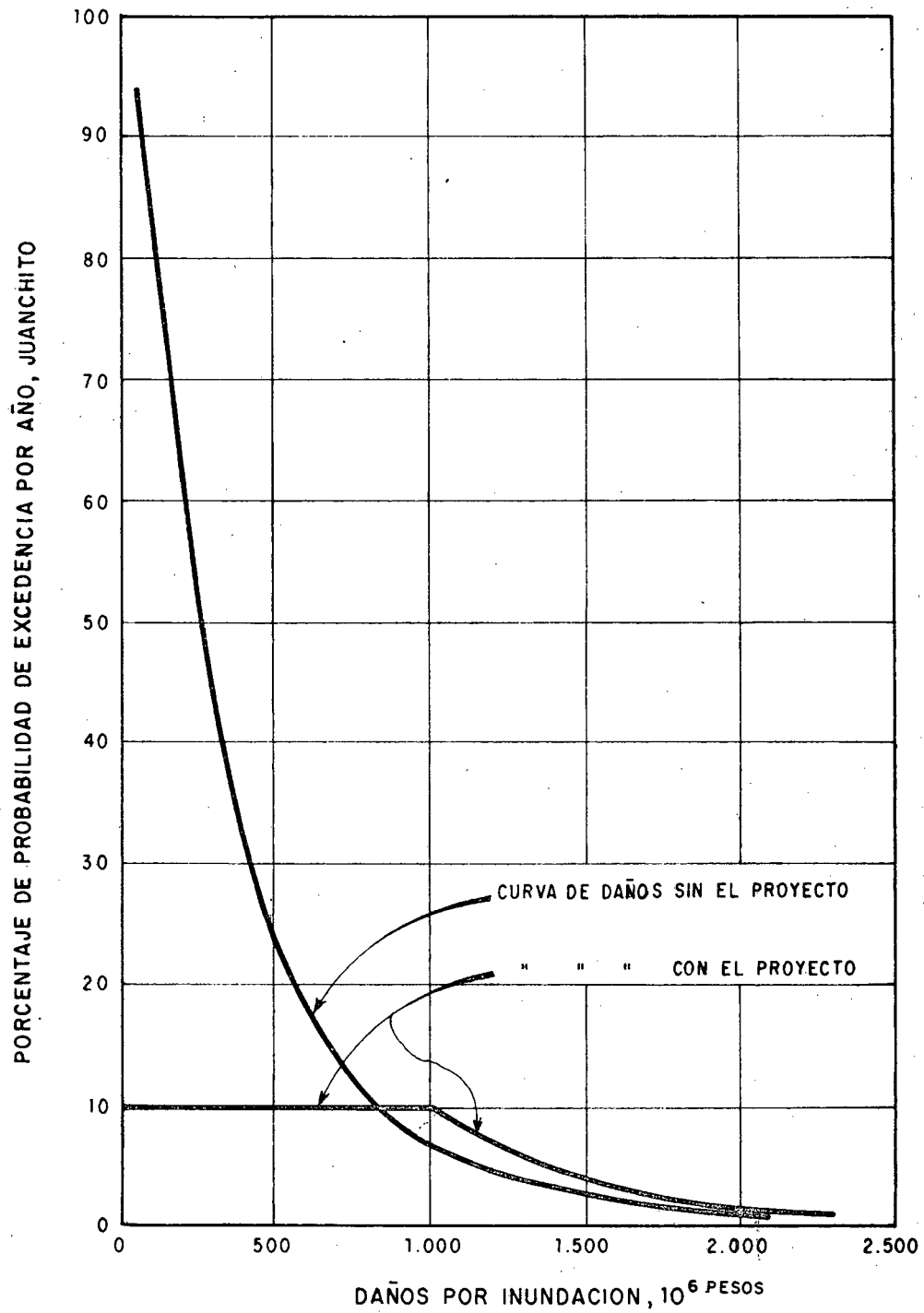


Figura 8.- Curvas de Daños por Inundaciones en el Valle del Cauca

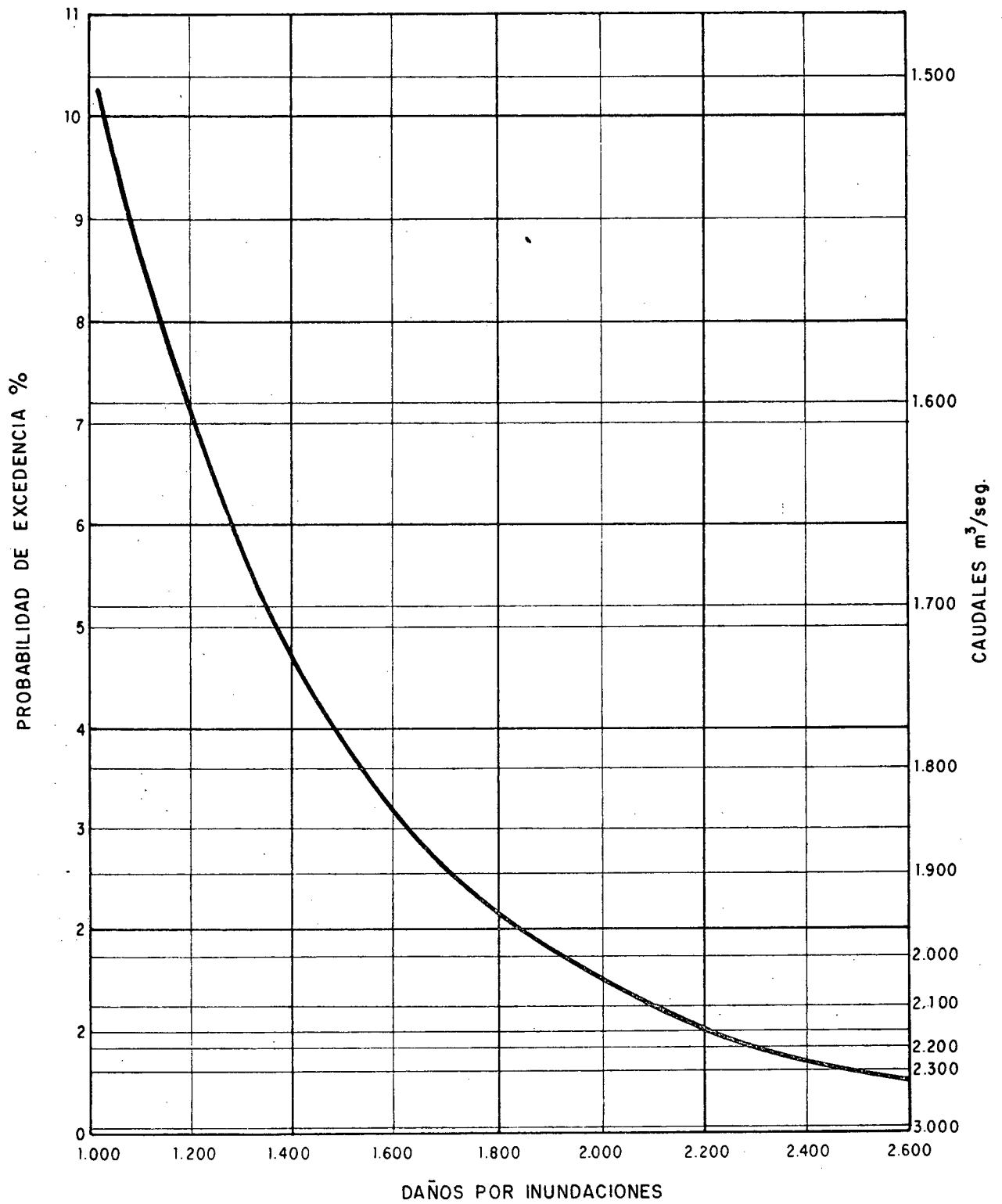


Figura 9.- Curvas de Daños Después de Construido el Proyecto

Figura 10. Siguiendo con un procedimiento como el descrito por Linsley, Kohler y Paulhus (1967), es posible encontrar el hidrograma unitario requerido, los cálculos se detallan en la Tabla 34.

Tabla 33. Frecuencia de avenidas en la Estación Salvajina.

Tr Años	CAUDAL EN m ³ /seg.											
	ENE.	FEB.	MAR.	ABR.	MAY.	JUN.	JUL.	AGO.	SEP.	OCT.	NOV.	DIC.
2	350	297	293	326	346	273	235	189	131	270	458	458
3	425	350	362	395	413	319	266	214	155	324	519	533
5	508	408	439	472	487	371	299	241	183	385	587	618
10	613	482	535	568	580	436	342	275	217	460	673	724
20	713	553	628	661	669	498	383	308	250	533	756	825
30	771	594	681	714	721	534	406	327	268	574	803	884
50	844	645	748	781	785	578	435	351	292	627	862	957
100	941	714	838	870	872	639	475	382	324	697	942	1056
500	1166	873	1046	1078	1072	778	566	456	397	859	1127	1283
1000	1263	942	1135	1167	1158	838	606	488	249	929	1206	1381
5000	1488	1100	1342	1374	1368	977	697	561	502	1092	1390	1609
10000	1585	1169	1432	1463	1444	1037	736	593	534	1161	1470	1707
50000	1810	1328	1639	1670	1644	1176	827	666	607	1324	1654	1934
100000	1907	1396	1729	1760	1730	1237	867	698	639	1394	1734	2032

$$\text{Area} = 3960 \text{ km}^2$$

$$d = \frac{4047 \text{ m/seg} \times 2 \text{ hr} \times 3600 \text{ seg/hr}}{390 \text{ km}^2 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{km}^2} = 7.358 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 7.358 \text{ mm.}$$

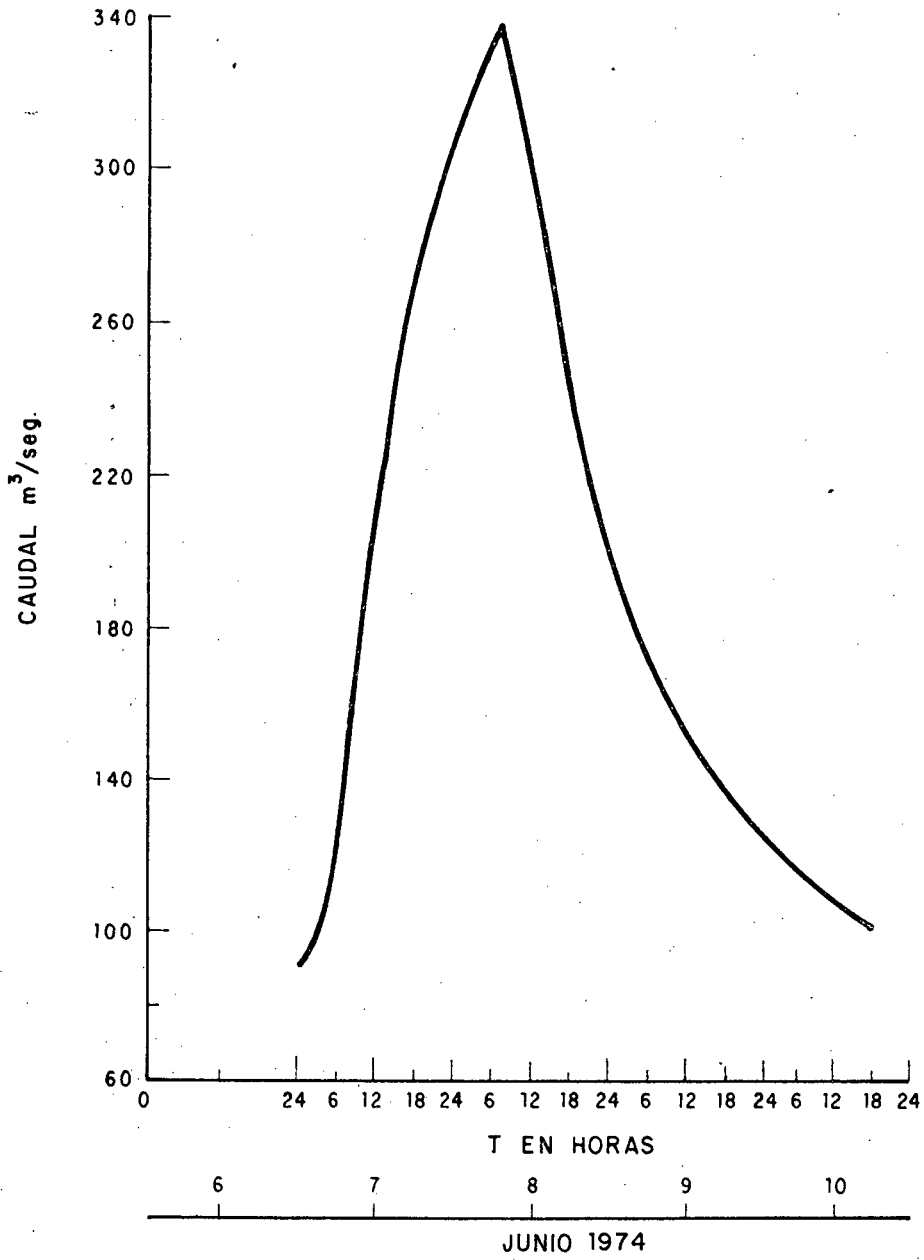


Figura 10.- Hidrograma Típico del Río Cauca en Salvajina

Tabla 34. Determinación del hidrografa unitario en Salvajina.

Fecha	Hora	Caudal Total m ³ /seg.	Caudal base m ³ /seg	Escorr.directa m ³ /seg	Ordenada del gráfico uni- tario.	
1974						
Julio, 7	04:00	94	94	0	0	
	06:00	117	94	23	3.13	
	08:00	144	95	49	6.66	
	10:00	180	95	85	11.55	
	12:00	202	95	107	14.54	
	14:00	215	96	119	16.17	
	16:00	232	96	136	18.48	
	18:00	248	97	151	20.52	
	20:00	268	97	171	23.24	
	22:00	292	98	194	26.37	
	24:00	307	98	209	28.40	
	Julio, 8	02:00	317	98	219	29.76
		04:00	327	99	228	30.96
		06:00	335	100	235	31.94
08:00		334	101	233	31.67	
10:00		319	102	217	29.49	
12:00		300	102	198	26.91	
14:00		281	102	179	24.33	
16:00		258	102	156	21.20	
18:00		239	102	137	18.62	
20:00		223	102	121	16.44	
22:00		206	102	104	14.13	
24:00		195	102	93	12.64	
Julio, 9		02:00	187	102	85	11.55
		04:00	179	102	77	10.46
	06:00	172	101	71	9.65	
	08:00	166	101	65	8.83	
	10:00	158	101	57	7.75	
	12:00	151	101	50	6.80	
	14:00	146	101	45	6.12	
	16:00	137	101	36	4.89	
	18:00	134	101	33	4.48	
	20:00	132	101	31	4.21	
	22:00	127	101	26	3.53	
	24:00	123	101	22	2.90	
	Julio, 10	02:00	120	101	19	2.58
		04:00	117	101	16	2.17
06:00		114	100	14	1.90	
08:00		112	100	12	1.63	
10:00		109	100	9	1.22	
12:00		107	100	7	0.95	
14:00		105	100	5	0.68	
16:00		103	100	3	0.41	
18:00	100	100	0	0		

- Empleando los caudales de avenidas de la Tabla 33 para frecuencias de 1:10, 1:50, 1:100, 1:500, 1:1000, 1:5000, 1:10000, 1:50000 y 1:100000 años y el hidrograma unitario dado en la Tabla 34 es posible determinar los hidrogramas esperados para los períodos de retorno antedichos, cuyos picos serán los caudales correspondientes a esos períodos de retorno.
- A este nivel se necesita un tránsito de avenidas por el embalse considerando su operación intrínseca, es decir cómo y cuándo se efectúan las descargas por turbinas, conductos de fondo y aliviadero para determinar los caudales efluentes. Los resultados obtenidos para un mes cualquiera se ilustra en la Tabla 35.

Tabla 35. Embalse de Salvajina. Tránsito de avenidas, Caudal efluente máximo en m³/seg.

		E N E R O								
Nivel	Tr	1:10	1:50	1:100	1:500	1:1000	1:5000	1:10000	1:50000	1:100000
	1106		305	311	334	318	320	325	326	330
1118		327	331	332	336	337	340	342	345	346
1130		347	351	352	355	356	358	359	362	262
1138		361	363	364	366	367	369	370	372	626
1142		367	369	370	372	537	863	994	1278	1395
1146		573	789	879	1085	1174	1380	1469	1675	1763
1150		1186	1186	1186	1186	2761	2761	2761	3913	3913

- En la referencia CVC (1975, b) se establece una ecuación de regresión lineal para caudales máximos diarios entre las estaciones Salvajina y Juanchito:

$$X_{\text{Juanchito}} = 33 + 1.596 \cdot X_{\text{Salvajina}}$$

Introduciendo los caudales de la Tabla 33 en la ecuación anterior se obtienen los correspondientes caudales en Juanchito, Tabla 36, sin considerar la existencia del embalse y por consiguiente sin considerar su efecto regulador.

La razón de no hacer un análisis directo de frecuencia con los caudales máximos en Juanchito se debe a que en esta estación los caudales máximos se encuentran afectados por los desbordamientos que se presentan aguas arriba o en la estación misma; la regresión dada por la ecuación anterior se obtuvo para valores de caudales en Juanchito no afectados por desbordamientos.

Ahora, el aporte de los tributarios entre Salvajina y Juanchito será:

$$\text{Atributarios} = X \text{ Juanchito} - X \text{ Salvajina} = 33 + 0.596 X \text{ Salvajina}$$

Si el caudal de salida del embalse, una vez efectuado el tránsito, se suma el caudal de los tributarios obtenidos según la ecuación anterior se obtendrá el caudal en Juanchito esta vez considerado el efecto regulador del embalse.

Los daños esperados mensuales son encontrados como el área bajo la curva de la Figura 9 entre dos porcentajes de probabilidad de excedencia.

Con los datos anteriores es posible determinar los daños por inundaciones como función del nivel del embalse, o lo que es lo mismo como función del almacenamiento, S . Los resultados se dan a continuación; los daños se dan en 10^3 \$ y el almacenamiento S en 10^6 m^3 ,

$$\text{DENE} = 0.027 S - 12.88$$

$$\text{DFEB} = 0.00325 S - 1.725$$

$$\text{DMAR} = 0.014 S - 7.112$$

$$\text{DABR} = 0.0219 S - 10.967$$

Tabla 36. Frecuencia de avenidas en la Estación Juanchito Río Cauca

Tr Años	CAUDAL EN M ³ /SEG											
	ENE.	FEB.	MAR.	ABR.	MAY.	JUN.	JUL.	AGO.	SEP.	OCT.	NOV.	DIC.
2	592	507	501	554	586	468	408	335	242	465	763	763
3	711	592	611	664	693	543	458	375	280	551	862	885
5	843	685	733	786	811	625	511	418	325	649	968	1018
10	1011	802	887	940	959	729	579	472	379	767	1107	1188
20	1171	918	1033	1091	1080	828	643	525	433	884	1238	1352
30	1263	983	1123	1173	1183	886	682	555	461	948	1313	1444
50	1380	1062	1227	1279	1286	955	727	593	499	1034	1409	1560
100	1535	1172	1370	1423	1425	1053	791	643	550	1145	1536	1718
500	1894	1426	1702	1753	1744	1275	936	761	667	1404	1832	2081
1000	2048	1536	1844	1896	1881	1370	1000	812	718	1516	1958	2237
5000	2408	1788	2176	2226	2200	1592	1145	928	834	1776	2251	2601
10000	2563	1899	2318	2368	2338	1688	1208	979	885	1886	2379	2758
50000	2921	2152	2649	2698	2657	1910	1353	1096	1002	2146	2673	3120
100000	3077	2261	2792	2842	2794	2007	1417	1147	1053	2258	2800	3296

DMAY	=	0.0187	S -	9.512
DJUN	=	0.001	S -	0.537
DOCT	=	0.0018	S -	1.040
DNOV	=	0.033	S -	17.182
DDIC	=	0.0248	S -	2.571

En los meses de Julio, Agosto y Septiembre no se presentan daños por inundaciones.

Se anota que a la Figura 9 debe entrarse con los caudales obtenidos en el literal e) pero considerando para cada caudal la probabilidad respectiva de excedencia obtenida de la Figura 11, puesto que el análisis se hace para períodos mensuales y no para períodos anuales.

Si a los beneficios por renta de energía se deducen los daños por inundaciones daría la forma de la función de retorno mensual a ser utilizada en la optimización de la operación.

d) Probabilidades de Transición

De acuerdo a la formulación del problema, se necesitan valores de $P(q_t/q_{t+1})$ para todos los valores de q_t y q_{t+1} y para cada uno de los doce grupos de pares de meses. La formulación del problema implica que los caudales deben ser discretizados en rangos de tal forma que haya un número finito de rangos de caudal en el mes siguiente. Se debe entonces establecer un límite superior al caudal en cada mes.

Por ejemplo, en el mes de Diciembre se fijó un límite superior de $1680 \times 10^6 \text{ m}^3$. Este valor es aproximadamente 10% más grande que el mayor valor de caudal registrado en ese mes y un 50% del caudal solamente ha sido superado 3 veces en los 28 años de registro que se consideraron. De manera similar se fijaron límites superiores para los restantes 11 meses. Se estableció un límite inferior de cero ya que no existe significado alguno para caudales negativos en

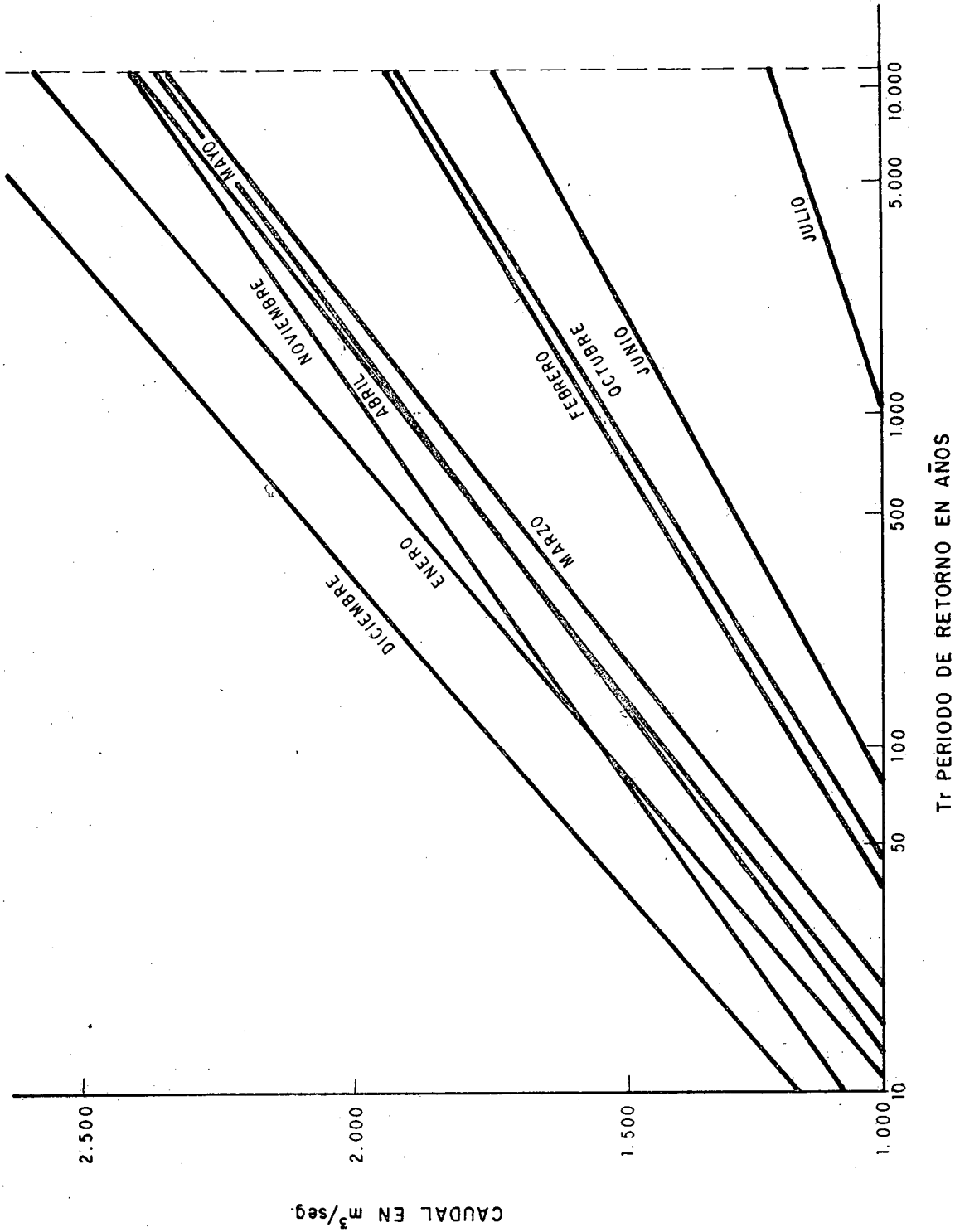


Figura 11.- Frecuencia de Caudales Máximos Mensuales en Juanchito, Río Cauca

una corriente. El tamaño y número de rangos entre esos límites es un compromiso que depende del interés en la economía de cálculos. Un rango máximo de $210 \times 10^6 \text{m}^3$ se utilizó en el mes de Diciembre, lo cual permitió el uso de 8 incrementos. En los demás meses los incrementos se hicieron más pequeños pero tratando de que el número de rangos no fuera superior a 8, correspondiente al máximo adoptado.

Para cada valor de q_{t+1} se calculan todos los valores de $P(q_t)$. Inherente al método básico empleado para representar caudales está el uso de la distribución normal o gaussiana.

La función de densidad de la distribución normal es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_X}{\sigma_X} \right)^2 \right], -\infty \leq x \leq \infty$$

En su forma usual, la media y la desviación típica son empleadas como parámetros de la distribución. La distribución normal ha sido tabulada ampliamente en la literatura y el trabajo se simplifica notablemente cuando se tabula únicamente la variable tipificada.

$$u = \frac{x - m_X}{\sigma_X}$$

Esta variable tiene media cero y desviación típica 1. La densidad de la variable aleatoria tipificada es $N(0, 1)$ ó

$$f_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2}, -\infty \leq u \leq \infty$$

La función de densidad deseada será:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X} f_u \left(\frac{x - m_X}{\sigma_X} \right), -\infty \leq x \leq \infty$$

Las tablas dan valores para la mitad del rango de u , $u < 0$, aprovechando la simetría de la curva de la distribución normal.

Para determinar la probabilidad de que una variable aleatoria normal caiga en cualquier intervalo, debe calcularse la integral $f_X(x)$ en el intervalo requerido; alternatively, la diferencia entre los dos valores de la función de distribución acumulativa, producirá esta información. En general:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(U \leq \frac{x - mx}{\sigma x}) = F_U(\frac{x - mx}{\sigma x})$$

$$F_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \quad -\infty \leq u \leq \infty$$

en la cual $u = (x - mx)/\sigma x$.

La simetría de la distribución permite encontrar valores para argumentos negativos (Benjamín y Cornell, 1970).

$$F_U(-u) = 1 - F_U(u)$$

En el estudio presente la distribución normal para cada valor de q_{t+1} se trunca en cero y en el límite superior del caudal. De la distribución truncada es de donde se calculan las probabilidades actuales. El *truncamiento* cambiará ligeramente los parámetros estadísticos tales como la media y la desviación típica.

Se puede aseverar entonces que:

$$\sum_{q_t=0}^{q_t = q_{t,max}} P(q_t/q_{t+1}) = 1.0$$

Las probabilidades condicionales o de transición de mes a mes a ser usadas en la operación se presentan en las Tablas 37 a 40 para los cuatro primeros meses. Los demás meses tienen probabilidades similares.

Las entregas mínimas mensuales del embalse en los meses de Julio, Agosto, Septiembre y Octubre fueron determinadas mediante un análisis de frecuencia de manera que se obtenga en la estación Juanchito un promedio mensual de $126 \text{ m}^3/\text{seg}$ durante esos meses, caudal con el que se logra el aplazamiento en cinco años de la construcción de plantas de tratamiento.

Tabla 37. Probabilidades condicionales de caudales en Enero, dados los caudales en Diciembre

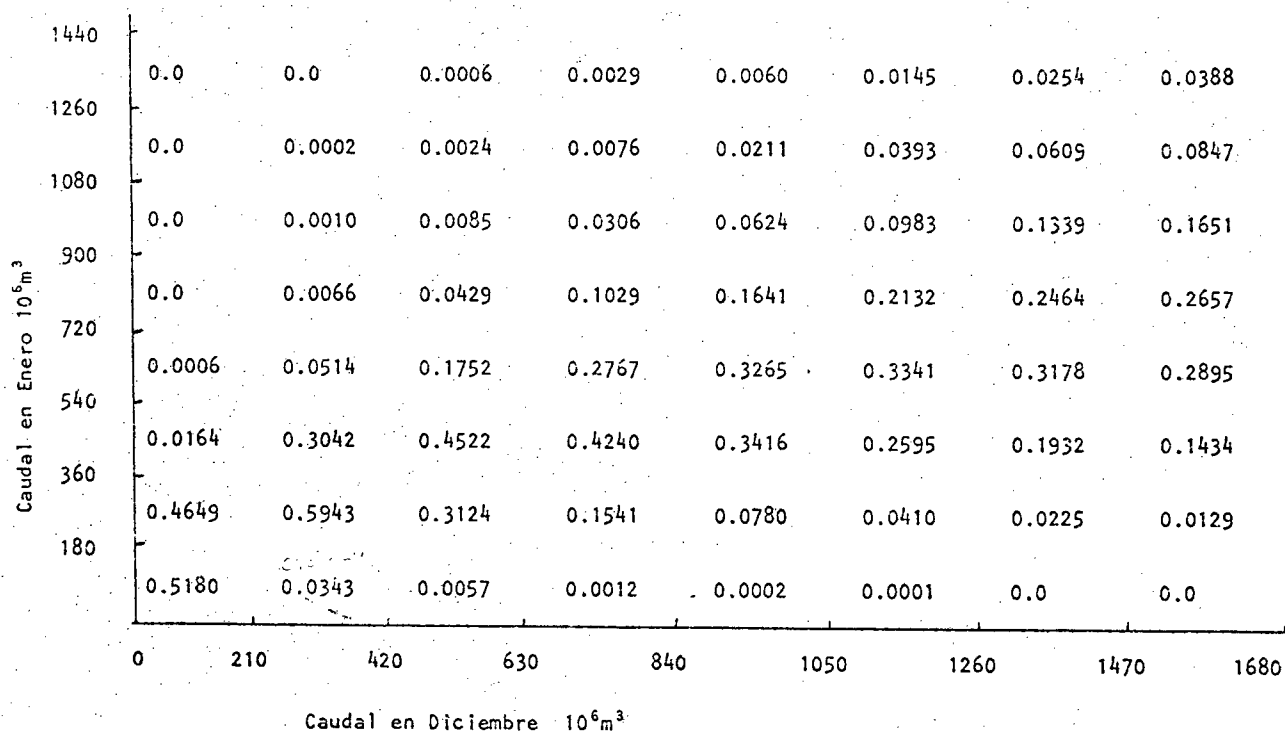


Tabla 38. Probabilidades condicionales de caudales en Febrero, dados los caudales de Enero

Caudal en Febrero 10^6 m^3	0	180	360	540	720	900	1080	1260	1440
1040	0.0	0.0	0.0	0.0001	0.0008	0.0039	0.0134	0.0446	
910	0.0	0.0001	0.0005	0.0029	0.0103	0.0360	0.0978	0.1999	
780	0.0003	0.0021	0.0080	0.0291	0.0831	0.1778	0.2918	0.3683	
650	0.0067	0.0241,	0.0705	0.1576	0.2714	0.3584	0.3632	0.2833	
520	0.0635	0.1419	0.2519	0.3475	0.3693	0.3015	0.1892	0.0911	
390	0.2487	0.3422	0.3750	0.3199	0.2105	0.1061	0.0400	0.0119	
260	0.4048	0.3445	0.2337	0.1231	0.0493	0.0153	0.0044	0.0009	
130	0.2760	0.1451	0.0604	0.0197	0.0053	0.0011	0.0002	0.0	

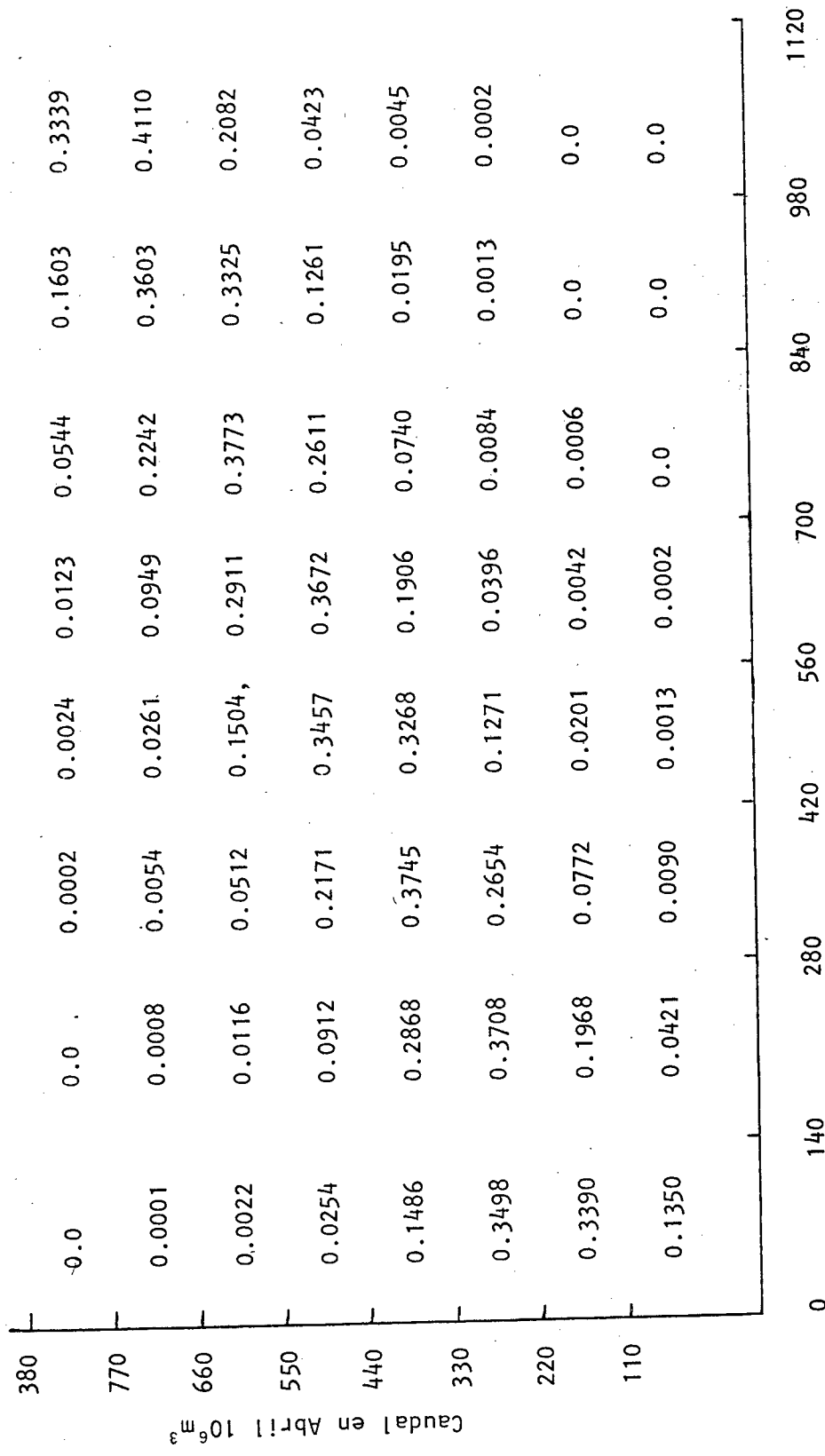
Caudal en Enero 10^6 m^3

Tabla 39. Probabilidades condicionales de caudales en Marzo, dados los caudales en Febrero.

Caudal en Marzo 10^6 m^3	0	130	260	390	520	650	780	910	1040
1120	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0055	0.1328	0.6005	
980	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0066	0.1519	0.5461	0.3699	
840	0.0	0.0001	0.0084	0.1734	0.5542	0.2999	0.0293		
700	0.0	0.0001	0.0106	0.1961	0.5613	0.2715	0.0210	0.0003	
560	0.0002	0.0135	0.2201	0.5649	0.2452	0.0168	0.0002	0.0	
420	0.0199	0.2470	0.5649	0.2200	0.0134	0.0002	0.0	0.0	
280	0.3223	0.5650	0.1959	0.0106	0.0001	0.0	0.0	0.0	
140	0.6575	0.1744	0.0084	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0	

Caudal en Febrero 10^6 m^3

Tabla 40. Probabilidades condicionales de caudales en Abril, dados los caudales en Marzo



Caudal en Marzo $10^6 m^3$

e) *Determinación de la Regla de Operación*

Para determinar la regla de operación del embalse de Salvajina se utilizó la programación estocástica explícita tal como fue descrita en la sección 4.2. Se utilizaron 8 intervalos de discretización para cada mes y las probabilidades de transición de un caudal dado en un mes a un caudal dado en el mes siguiente fueron descritas en la subsección anterior. La función recursiva a ser solucionada en cada etapa t puede escribirse como:

$$f_t^n(k, i) = \text{Max}_l \{ R_{kilt} + \sum_j P_{ij}^t f_{t+1}^{n-1}(l, j) \}$$

$$k, i = 1, 2, \dots, 8$$

y sujeto a restricciones tales como:

$$S_{lt+1} = S_{kt} + q_{it} - e_{klt} - X_{kilt}$$

$$153 \times 10^6 \leq S_{lt+1} \leq 773 \times 10^6$$

$$0 \leq X_{kilt}$$

$$X_{kilt} \leq S_{kt} + q_{it} - e_{klt}$$

en donde las diferentes variables fueron ya definidas en la sección 4.2. La función de retorno estaría dada para cada mes como:

en verano:

$$R_{kilt} = 6.6011766 \times 10^{-4} X_{kilt} (h_{klt} - 1030.0) - (a_t h_{klt} - b_t)$$

en invierno:

$$R_{kilt} = 5.7121714 \times 10^{-4} X_{kilt} (h_{klt} - 1030.0) - (a_t h_{klt} - b_t)$$

en donde la primera parte corresponde a los beneficios por venta de energía y la segunda parte a los daños por inundación. La variable h_{klt} es la altura media en el embalse durante el mes t y es función del almacenamiento medio en el embalse durante ese mes, es decir:

$$h_{klt} = g \left(\frac{V_{kt} + V_{lt}}{2} \right)$$

y las constantes a_t y b_t son constantes para cada mes que sirven para evaluar los daños por inundación durante cada mes. Los valores de a_t y b_t , así como la forma de esta función de retorno fue discutida en la subsección (c) sobre determinación de una función de retorno.

Las probabilidades de transición a ser usadas en la función recursiva anterior se determinaron en la subsección (d) sobre Probabilidades de Transición, y, por ejemplo, para pasar de enero a febrero estas probabilidades se presentan en la Tabla 38.

El problema es entonces resuelto etapa por etapa empezando en la última y el procedimiento recursivo continua hasta que el estado estable se alcance.

Para darle solución a este problema se usó un programa de computador montado en el CIDIAT por Anisial y Casas (1976) que se basa en la publicación de Butcher y Fordham (1970). Los resultados se presentan ya como regla de operación, es decir, como tablas en donde se especifica las cantidades a ser entregadas en cada mes como función del almacenamiento al inicio del mes y de los caudales de entrada al embalse durante el mes anterior. Estos resultados se presentan en las Tabla 41 a 52. Para ilustrar el uso de las tablas considere el caso siguiente: se desea determinar la entrega óptima en el mes de febrero, sabiendo que el volumen aportado al embalse durante el mes de Enero fue de $810 \times 10^6 m^3$ y que el almacenamiento al comenzar el mes de febrero es de $380 \times 10^6 m^3$. Usando la Tabla 42 con los valores anteriores se obtiene una entrega óptima para el mes de febrero de $458.8 \times 10^6 m^3$. Para valores in-

Tabla 41. Política de entregas óptimas para Enero, $10^6 m^3$

Almac. inicial $10^6 m^3$	CAUDAL EN DICIEMBRE $10^6 m^3$							
	105	315	525	735	945	1.155	1.365	1.575
95	0	0	0	137.5	270.0	480.0	690.0	900.0
190	0	0	0	232.5	365.0	575.0	785.0	995.0
285	0	0	69.1	327.5	460.0	670.0	880.0	1.090.0
380	0	85.2	164.1	422.5	555.0	765.0	975.0	1.185.0
475	0	155.6	259.1	517.5	650.0	860.0	1.070.0	1.180.0
570	0	250.6	354.1	612.5	745.0	955.0	1.165.0	1.375.0
665	96.9	345.6	449.1	707.5	840.0	1.050.0	1.260.0	1.470.0
760	191.8	440.6	544.1	802.5	935.0	1.145.0	1.355.0	1.565.0

Tabla 42. Política de entregas óptimas para Febrero, $10^6 m^3$

Almac. inicial $10^6 m^3$	CAUDAL EN ENERO $10^6 m^3$							
	90	270	450	630	810	990	1.170	1.350
95	0	0	24.7	18.0	173.8	315.0	495.0	675.0
190	0	9.7	7.7	50.0	268.8	410.0	590.0	770.0
285	0	0	0	145.0	363.8	505.0	685.0	865.0
380	0	0	64.8	240.0	458.8	600.0	780.0	960.0
475	0	37.2	159.8	335.0	553.8	695.0	875.0	1.055.0
665	10	165.0	349.8	525.0	743.7	885.0	1.065.0	1.245.0
760	80	260.0	444.8	620.0	838.7	980.0	1.160.0	1.340.0

Tabla 43. Política de entregas óptimas para Marzo, $10^6 m^3$.

Almac. inicial $10^6 m^3$	CAUDAL EN FEBRERO $10^6 m^3$							
	65	195	325	455	585	715	845	975
95	0	0	0	0	0	301.6	489.7	590.6
190	0	0	0	0	53.4	396.6	584.7	472.5
285	0	0	0	147.5	148.4	491.6	573.1	567.5
380	0	0	59.1	256.9	338.4	681.6	753.4	757.5
570	15.2	153.8	154.1	351.9	433.4	776.5	848.4	852.5
665	108.8	245.0	249.1	446.9	557.5	871.6	962.8	947.5
760	59.8	340.0	344.1	541.9	759.1	966.5	1.057.8	1.042.5

Tabla 44. Política de entregas óptimas para Abril, $10^6 m^3$

Almac. inicial $10^6 m^3$	CAUDAL EN MARZO $10^6 m^3$							
	70	210	350	490	630	770	910	1.050
95	0	0	101.4	108.7	116.8	153.1	235.0	375.0
190	0	0	24.4	24.8	195.3	248.1	330.0	470.0
285	12.8	10.8	15.1	295.6	290.3	343.1	425.0	565.0
380	0	0	0	390.6	385.3	438.1	520.0	660.0
475	0	0	93.8	485.6	480.3	533.1	615.0	755.0
570	76.6	77.8	188.8	580.6	575.3	628.1	710.0	850.0
665	173.7	172.8	283.8	675.6	670.3	723.1	805.0	945.0
760	263.4	267.8	378.8	770.6	765.3	818.1	900.0	1.040.0

Tabla 45. Política de entregas óptimas para Mayo, 10^6 m^3 .

Almac. inicial 10^6 m^3	CAUDAL EN ABRIL 10^6 m^3							
	55	165	275	385	495	605	715	825
95	0	0	0	0	27.5	103.1	40.0	285.6
190	0	0	0	53.1	16.7	25.0	135.0	390.3
285	0	0	12.8	8.1	10.0	120.0	230.0	475.6
380	0	0	0	0	105.0	215.0	325.0	580.3
475	0	61.3	56.3	90.0	200.0	310.0	420.0	588.1
570	14.8	9.1	152.5	185.0	295.0	405.0	515.0	625.0
665	0	60.0	247.5	280.0	390.0	500.0	610.0	720.0
760	200.0	155.0	342.5	375.0	485.0	624.1	763.1	873.1

Tabla 46. Política de entregas óptimas para Junio, 10^6 m^3 .

Almac. inicial 10^6 m^3	CAUDAL EN MAYO 10^6 m^3							
	70	210	350	490	630	770	910	1.050
95	0	0	0	0	0	95.0	235.0	375.0
190	0	0	0	0	50.0	190.0	330.0	470.0
285	0	0	15.1	9.8	145.0	285.0	425.0	565.0
380	0	0	0	104.8	240.0	380.0	520.0	660.0
475	0	0	93.8	199.8	335.0	475.0	615.0	755.0
665	0	105.0	283.8	389.8	525.0	665.0	805.0	945.0
760	60.0	200.0	378.7	484.8	620.0	760.0	900.0	1.040.0

Tabla 47. Política de entregas óptimas para Julio, 10^6 m^3

Almac. ini- cial 10^6 m^3	CAUDAL EN JUNIO 10^6 m^3							
	55	165	275	385	495	605	715	825
95	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4
190	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	245.0
285	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	230.0	340.0
380	171.4	171.4	171.4	171.4	171.4	215.0	325.0	435.0
475	171.4	171.4	171.4	171.4	200.0	310.0	420.0	530.0
570	171.4	171.4	171.4	185.0	295.0	405.0	515.0	625.0
665	171.4	175.4	176.4	280.0	390.0	500.0	610.0	720.0
760	171.4	190.3	269.8	375.0	485.0	595.0	705.0	815.0

Tabla 48. Política de entregas óptimas para Agosto, 10^6 m^3

Almac. ini- cial 10^6 m^3	CAUDAL EN JULIO 10^6 m^3							
	40	120	200	280	360	440	520	600
95	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9
190	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9
285	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9
380	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	210.0
475	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	200.9	225.0	305.0
570	200.9	200.9	200.9	200.9	200.0	240.0	320.0	400.0
665	200.9	200.9	200.9	200.9	255.0	335.0	415.0	495.0
760	200.9	200.9	200.9	270.0	350.0	430.0	510.0	590.0

Tabla 49. Política de entregas óptimas para Septiembre, 10^6 m^3

Almac. inicial 10^6 m^3	CAUDAL EN AGOSTO 10^6 m^3							
	30	90	150	210	270	330	390	450
95	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1
190	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	242.0	240.9
285	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1
380	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1
475	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1	215.1
570	215.1	215.1	215.1	241.0	244.8	248.5	252.3	250.0
665	225.4	288.2	285.4	247.0	330.9	225.0	285.0	345.0
760	215.1	215.1	215.1	215.1	260.0	320.0	380.0	440.0

Tabla 50. Política de entregas óptimas para Octubre, 10^6 m^3

Almac. inicial 10^6 m^3	CAUDAL EN SEPTIEMBRE 10^6 m^3							
	30	90	150	210	270	330	390	450
95	195.5	195.5	195.5	195.5	195.5	195.5	195.5	195.5
190	195.5	195.5	195.5	195.5	281.4	271.8	268.8	269.1
285	195.5	195.5	195.5	195.5	365.7	195.5	360.2	365.9
380	219.7	218.8	264.7	264.3	461.9	457.5	275.1	346.9
475	195.5	319.0	361.5	365.3	570.0	310.4	552.6	548.6
570	235.3	411.7	464.7	453.5	651.4	403.4	646.8	405.0
665	195.5	195.5	562.3	551.3	738.9	554.4	740.3	500.0
760	237.1	195.5	195.5	432.5	841.3	649.4	835.3	595.0

Tabla 51. Política de entregas óptimas para Noviembre, 10^6 m^3

Almac. inicial 10^6 m^3	CAUDAL EN OCTUBRE, 10^6 m^3							
	40	120	200	280	360	440	520	600
95	0	0	0	0	19.1	96.3	101.8	238.4
190	70.0	70.0	75.0	70.0	50.0	120.0	192.5	330.0
285	164.1	167.3	167.5	168.6	162.4	287.5	432.2	425.0
380	216.6	262.5	282.2	382.5	239.7	243.8	527.2	520.0
475	353.6	361.6	352.7	397.0	336.3	338.7	622.2	615.0
570	402.5	447.2	445.6	477.2	431.3	433.8	717.2	710.0
665	546.3	547.8	540.6	572.2	526.3	528.8	812.3	805.0
760	640.3	642.8	635.6	667.2	621.3	623.8	907.2	900.0

Tabla 52. Política de entregas óptimas para Diciembre, 10^6 m^3

Almac. inicial 10^6 m^3	CAUDAL EN NOVIEMBRE, 10^6 m^3							
	70	210	350	490	630	770	910	1050
95	0	0	0	0	0	172.5	273.8	375.0
190	0	0	0	0	50.0	267.5	368.8	470.0
285	0	43.1	45.5	43.8	145.0	362.5	463.8	565.0
380	0	41.3	135.9	138.8	240.0	457.5	558.8	660.0
475	24.7	125.4	132.5	233.8	335.0	552.5	653.8	755.0
570	114.8	329.7	227.5	328.8	430.0	570.0	748.8	850.0
665	0	424.7	322.5	423.8	525.0	742.5	843.8	945.0
760	282.8	519.7	417.5	518.8	620.0	760.0	938.8	1040.0

termedios de aportes y almacenamiento puede hacerse una interpolación lineal.

El hecho de que se llega a una política estable o sea que las entregas permanecen constantes a pesar de que se aumenten los períodos es una confirmación de que el sistema es "ergódico". Una evidencia adicional la da el examen de los doce grupos de probabilidades condicionales de caudales entre meses consecutivos que son usadas en el desarrollo de la política y que aparecen en las Tablas 37 a 40 para los cuatro primeros meses. Nótese que no hay estados absorbentes. Uno de estos estados estaría indicado por una secuencia de valores de probabilidad 1, de tal manera que si el sistema cayese en esa secuencia no tendría salida posible. Tal estado absorbente no se presenta en este trabajo y de hecho no aparece bajo circunstancias hidrológicas normales.

Dependiendo del estado con el cual se inician los cálculos, la política de entregas convergerá más tarde o más temprano. Para el embalse de Salvajina, iniciando el sistema en un punto en que no había beneficios futuros, los cálculos requirieron 312 meses para que emergiera la política óptima. En el computador usado, IBM/360-40 se necesitan aproximadamente 2 minutos para calcular la política de un mes. Diez horas se necesitan para desarrollar la política óptima.

La convergencia de la política al óptimo se indica por la repetición de las entregas y por el hecho de que la suma de los beneficios por año de operación es igualmente constante.

Para investigar el efecto de un cambio en los datos sobre la política óptima y sobre los consecuentes beneficios en primer lugar se hicieron variaciones en la tasa de interés. En la política inicial no se reconoció el valor del dinero en el tiempo. Este desconocimiento se hizo por simplificación y no debe considerarse como representativo de la realidad. Para analizar cómo varían las políticas de entrega con el cambio en la tasa de interés, ésta se incrementó primero al 10% y posteriormente al 12% anual. Como se muestra en la Tabla 53, cuando la tasa de interés se cambió de 0 a 10% la política de en-

tregas permaneció casi inalterable. Cuando la tasa de interés se cambió al 12% se produjo un mayor incremento en las entregas.

Tabla 53. Efecto del cambio de la tasa de interés sobre la política óptima.

Tasa de interés	Cambios en la política
0%	
10%	Incrementos en muy pocas entregas.
12%	Incrementos en pocas entregas. La política permanece inalterable en un 93%.

En este trabajo fue necesario especificar las condiciones hidrológicas bajo las cuales el embalse va a ser operado. Cualquier cambio en ellas debido a una mejor comprensión de los procesos o a cambios en los procesos mismos debe afectar la política de entregas a seguirse.

Por ejemplo, si es necesario determinar el mérito de un cambio en la escorrentía debido a una modificación en el clima, el método desarrollado permitiría la evaluación del efecto del cambio sobre la política óptima.

Fuera de estos ejemplos no es probable que los datos hidrológicos de entrada cambien a menos que un nuevo embalse se construyera aguas arriba del embalse en consideración. En este caso el problema no sería el de operar óptimamente el embalse utilizando las salidas del embalse ubicado aguas arriba, sino considerarlos como un sistema de múltiples embalses. Tal situación presenta problemas que están por fuera del rango de consideraciones de este estudio.

Del análisis de los resultados se observa que las entregas en los meses de julio, agosto y septiembre son más o menos constantes para cualquier estado del sistema. Esto se explica porque en dichos meses el embalse debe hacer descargas para aumentar el caudal del río y lograr en la Estación Juanchito un caudal promedio de $127 \text{ m}^3/\text{seg}$. Se observa en algunos casos - vgr: Tabla 44 que las entregas para el mismo almacenamiento bajan de $12.8 \times 10^6 \text{ m}^3$ a $10.8 \times 10^6 \text{ m}^3$ a pesar de que el caudal en el mes precedente aumentó de $70 \times 10^6 \text{ m}^3$ a $210 \times 10^6 \text{ m}^3$. Se explica lo anterior en el hecho de que, por ser un proceso de decisiones secuenciales, esta entrega es la que optimizará las entregas futuras.

f) *Discusión de Resultados*

Con respecto a la validez del método, debe aceptarse que los datos y conclusiones son teóricamente buenos y computacionalmente practicables. Si se preguntara si el problema resuelto es o no relevante a los casos que necesitan solución, puede aducirse que el procedimiento descrito es en mucho superior a los estudios de prediseño de operación llevados a cabo por las organizaciones responsables del manejo de los recursos hidráulicos y que al mismo tiempo abre caminos de diseño que antes no estaban disponibles. Este método sustituye las rígidas políticas de operación de embalses prevaletientes.

Es importante recalcar que en este trabajo se maximizan los beneficios que resultan de la operación del embalse. Los beneficios netos son función de la generación de energía y los daños producidos por inundaciones, el maximizar los beneficios puede implicar que se produzcan algunos daños principalmente en los meses de caudales altos. El criterio de maximización de beneficios no está en contraposición con el propósito principal del proyecto de regulación del río Cauca, el control de avenidas, sino que la solución final viene a ser un compromiso entre el beneficio de la energía y los costos de daños.

El criterio de maximización, de beneficios que se adopte depende de la aversión personal al riesgo de quien toma las decisiones.

En caso de que se quiera dar mayor prioridad al control de avenidas se puede utilizar otro criterio tal como la minimización de los costos de daños, generando energía solo con las entregas y aún si se quiere no tomando en cuenta el beneficio de la energía.

Otro criterio aún más conservador es el de mantener el embalse vacío durante los meses críticos -noviembre, diciembre y enero- y maximizar beneficios o minimizar daños en los nueve meses restantes.

La política óptima de entregas se puede emplear tanto en estudios teóricos para diseño de embalses como para la operación de sistemas ya construidos o definidos en cuanto a sus características de operación como es el caso del embalse de Salvajina. En ambos casos las dos variables de estado se hallan disponibles para determinar las entregas antes de que sean hechas.

El uso de la probabilidad de transición constituye una ventaja. Sin embargo, requiere el uso de una distribución multivariada conocida, o sea, casi obliga a utilizar la distribución normal o log-normal, admitiendo que existe la correlación serial aunque no se hizo ninguna prueba para determinar su orden. Debido a que sólo se dispone de 28 valores de caudales mensuales, una mejor representación de la correlación entre caudales necesitaría de registros más largos y por consiguiente el método adoptado es lo suficientemente bueno para el embalse de Salvajina.

Durante el tiempo real de la operación de un embalse no es del todo real establecer que la entrega para cada mes se define al principio del mes y no se revisa durante ese lapso. Más de acuerdo con la realidad es establecer la decisión de entregas para períodos más cortos tales como una semana o un día. Una versión diaria del programa sería 30 veces mayor que la versión mensual, la preparación de los datos requerirá 365 grupos de probabilidades condicionales para describir el regimen de caudal del río. Tal procedimiento aunque es posible, es demasiado costoso debido a las actuales capacidades de cómputo.

En relación a los datos hidrológicos, la discretización de caudales en rangos es una decisión que se basa en la economía de cálculos. Si los rangos de caudales se hubieran duplicado con relación al número adoptado en el trabajo, el volumen de cálculos por mes habría sido 4 veces mayor. Un examen de los resultados no indica la necesidad de mayor número de subdivisiones ni en los datos hidrológicos ni en los otros intervalos escogidos como pasos para cambiar las variables en los cálculos.

Convendría efectuar estudios basándose en criterios diferentes al utilizado en este trabajo.

Dos criterios se citan a continuación:

- Minimizar costos de daños, generando energía sólo con las entregas que satisfagan el propósito de control de avenidas y si se quiere no tomando en cuenta el beneficio de la energía.
- Mantener el embalse vacío durante los tres meses críticos y maximizar beneficios o minimizar costos de daños en los restantes nueve meses.

6.2. APLICACION DE LA PROGRAMACION DINAMICA DETERMINISTICA CONTINUA EN LA OPERACION DEL EMBALSE GUARICO SOBRE EL RIO GUARICO, VENEZUELA

a) *Planteo del Problema*

El embalse Guárico está ubicado al Noreste de la población de Calabozo, Distrito Miranda, del Estado Guárico, y su construcción fue finalizada en el año 1956. Este embalse hace parte de un sistema de dos embalses, los embalses de Guárico y Camatagua, ubicados sobre el mismo río. El embalse de Camatagua es tá destinado al riego de 1200 hectáreas y para el abastecimiento de la ciudad de Caracas. El embalse Guárico cumple con el doble propósito de abastecimiento para riego y control de inundación.

Las características básicas de la presa y el embalse Guárico son:

Altura Máxima	30 m
Longitud de Cresta	15000 m
Volumen de Relleno	$12.6 \times 10^6 \text{m}^3$
Area de la Hoya	8000 km^2
Capacidad Total	$1840 \times 10^6 \text{m}^3$
Area Inundada	23140 hectáreas

El aliviadero está ubicado sobre el estribo izquierdo de la presa. Sobre su cresta pasa un puente cuyas bases son pilas que sirven de apoyo a 10 compuertas operadas manual y automáticamente e independientes una de otra. La longitud de vertedero es de 132,50 m, y las compuertas son de 11 m de ancho por 5,40 m de altura, con una capacidad de descarga total de $4.100 \text{ m}^3/\text{seg}$.

Las obras de toma consisten en dos torres de concreto sumergidas, unidas a la presa por un puente en forma de "Y". Cada torre está conectada a un conducto de 6 m de diámetro y 140 m de longitud, que atraviesa el terraplén y desemboca en un pozo de amortiguamiento. El gasto máximo de diseño de cada una de las torres es de $72,50 \text{ m}^3/\text{seg}$ para una cota mínima de embalse de 110 m. La altura de la torre de toma es de 29 m. La red de distribución está formada por 210.826 km de canales de sección trapezoidal, en su mayoría revestidos.

En el Sistema de Riego Guárico, la temporada de riego tradicionalmente comprende desde el mes de noviembre hasta mediados de mayo. Actualmente existe la tendencia a comenzarlo antes, a fin de aprovechar las lluvias como complemento del riego.

El principal cultivo sembrado en el sistema ha sido siempre el arroz. Para la temporada 1972-73 el área de este cultivo ascendió a más del 90% de la superficie total regada, reportando un ingreso total de 75 millones de bolívares aproximadamente, lo que equivale a una producción promedio de 3.557,87 Bs/Ha, que ha convertido al sistema en el primer productor de arroz

del país (MOP, 1973). Otros cultivos de la zona son el pasto y los frutales.

Los usuarios del Sistema de Riego Guárico pueden ser clasificados en: sector campesino, sector empresarial, sector medianos productores y otros.

Desagregando el área regada, para cultivos de arroz, por sectores usuarios, tendríamos para la temporada 1972-73, según MOP (1973):

Sector campesino	:	8036 Ha
Sector empresarial	:	8404 Ha
Sector medianos productores:		3174 Ha
Sector otros	:	<u>170 Ha</u>
Total		19.784 Ha

Para este sistema se quiere obtener las descargas mensuales que minimicen el cuadrado de los déficits con respecto a las demandas de riego más el cuadrado de la diferencia del volumen disponible para control de inundación con respecto al volumen deseado. Esta operación se hace para cuatro años de registros disponibles (1971-1974) y considerando las demandas para riegos correspondientes a un área de 14000 Hectáreas.

El período de demandas durante cada año va de noviembre a marzo y se han estimado como (MOP, 1973).

Mes	Demanda de Riego (10^6 m^3)
Noviembre	30.75
Diciembre	79.31
Enero	104.39
Febrero	88.20
Marzo	82.55

Los volúmenes mensuales necesarios en el embalse para control de inundaciones se determinaron transitando en el embalse los caudales de diseños, que corresponden a un período de retorno de 500 años, partiendo de un nivel prefijado en el embalse y teniendo en cuenta que el caudal efluente del embalse debe ser menor de $400 \text{ m}^3/\text{s}$.

Los caudales de diseño mensuales X_{DMES} se determinaron haciendo un análisis de frecuencia mensual. Como sólo se tienen 6 años de registros en la estación Los Arrecifes, que corresponde a la estación de caudales de entrada al embalse, se hizo una extensión de los caudales máximos mensuales en base a la estación pluviométrica El Sombrero que tiene registros para el período 1952-1973. A la distribución empírica de los caudales máximos mensuales se le ajustó una distribución Gumbel, y el ajuste fue chequeado en base a la prueba de bondad de ajuste Smirnov-Kolmogorov. Los hidrogramas totales correspondientes al caudal de diseño se definieron siguiendo la forma del hidrograma unitario de la cuenca y considerando un caudal base de $2.51 \text{ m}^3/\text{s}$.

Para el tránsito de cada hidrograma de diseño mensual se asumió sólo una compuerta abierta con una abertura fija de 5 m, y la información adicional necesaria sobre el embalse es:

Curva altura - Capacidad mostrada en la Figura 12

Cota cresta del aliviadero de 112 m

Longitud del aliviadero de 11 m

Caudal efluente inicial de $247.64 \text{ m}^3/\text{s}$

El caudal efluente se calculó con la fórmula obtenida por Stewart y Pominy (1961) dada como:

$$X_e = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \quad CL \quad (H_1^{3/2} - H^{3/2})$$

en donde g es la aceleración de la gravedad, L es la longitud del aliviadero, H_1 es la altura del agua correspondiente al hidrograma de entrada, H es la altura del nivel inicial en el embalse, y C es un coeficiente definido como:

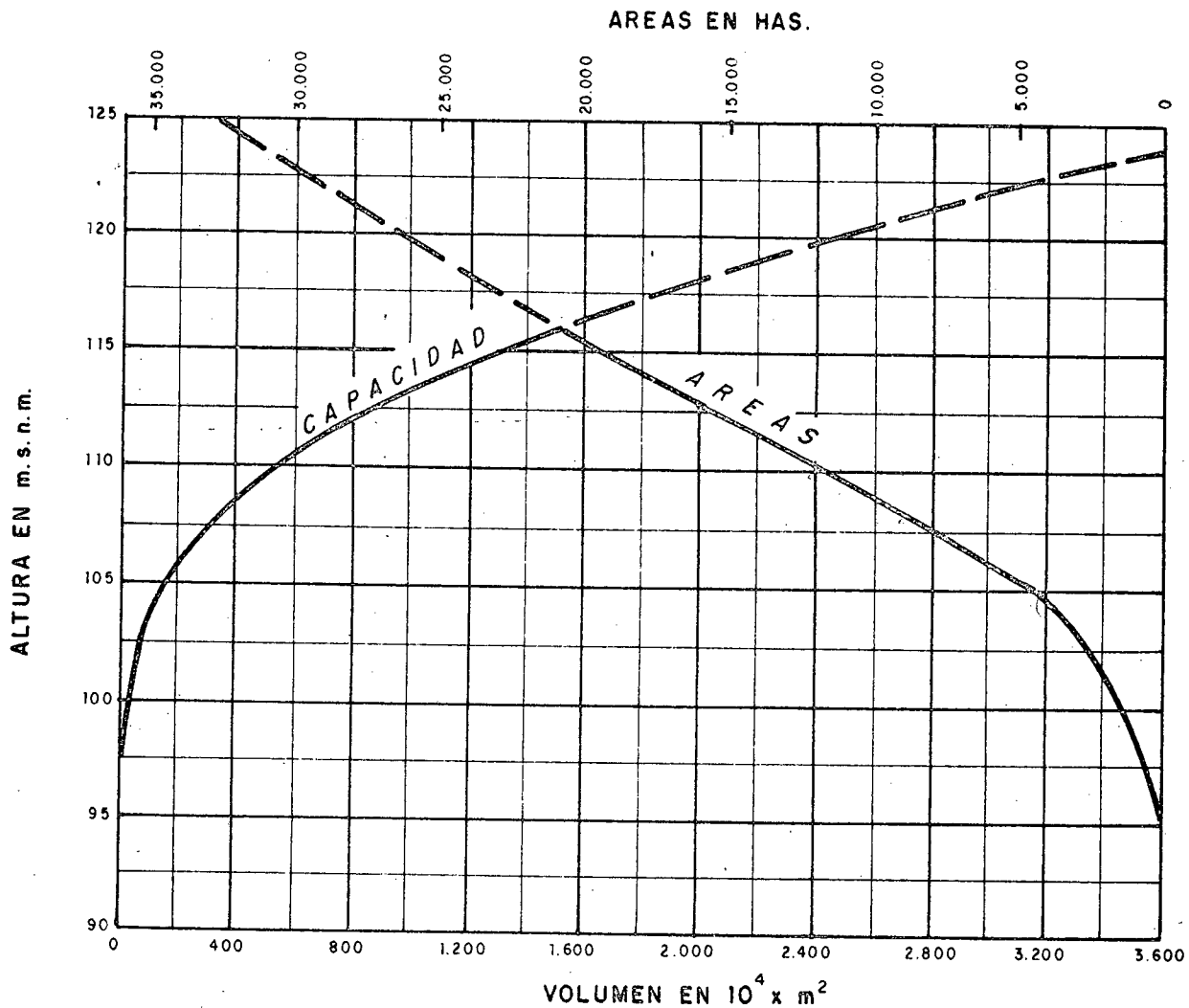


Figura 12.- Curva de Elevación - Area - Capacidades

$$C = 0.720909 - 0.10909 \frac{d}{H_1}$$

en donde d es la apertura de la compuerta. Esta ecuación da el caudal efluente en pie^3/s .

Partiendo de un nivel de embalse arbitrario, por tanteos se determinó dónde debía encontrarse el nivel de embalse para controlar la avenida correspondiente a cada mes. Se obtuvieron de esta manera doce niveles de embalse que aseguran para cada mes el control de la avenida mensual con un período de retorno de 500 años. Estos niveles con sus correspondientes valores de almacenamiento se muestran en la Tabla 54.

Tabla 54. Almacenamientos necesarios para control de inundaciones

Mes	h (m)	S x 10 ⁶ m ³
Enero	110.07	.565309 x 10 ⁹
Febrero	110.07	.565309 x 10 ⁹
Marzo	110.07	.565309 x 10 ⁹
Abril	110.07	.565309 x 10 ⁹
Mayo	110.07	.565309 x 10 ⁹
Junio	108.988	.439953 x 10 ⁹
Julio	108.878	.427286 x 10 ⁹
Agosto	108.726	.415567 x 10 ⁹
Septiembre	109.189	.463238 x 10 ⁹
Octubre	109.97	.553722 x 10 ⁹
Noviembre	110.07	.565309 x 10 ⁹
Diciembre	110.07	.565309 x 10 ⁹

Como se anotó anteriormente se quiere determinar la operación óptima del embalse durante el período 1971-1974. Las entradas al embalse durante un mes incluyen los aportes al embalse por el río Guárico más los volúmenes perdidos o ganados en el embalse por la evaporación y por la lluvia directa sobre la superficie del lago del embalse. Para el cálculo de la precipitación-evaporación se utilizó la estación pluvio-evaporimétrica La Misión la cual se considera representativa para el vaso del embalse, y las pérdidas estarían dadas para cada mes como:

$$P_t = \frac{(LL_t - E_t) \times 10^{-3}}{30 \times 86400} A_t$$

en donde LL_t es la lluvia mensual en mm durante el mes t, E_t es la evaporación en el lago en mm, durante el mes t y que se obtiene a partir de la evaporación en la tina como:

$$E_t = 0.7 ET_t$$

en donde ET_t es la evaporación en la tina durante el mes t en mm, y A_t es el área media en el embalse durante el mes t en m^2 que es función del almacenamiento medio en el embalse durante ese mes y que se obtiene de la curva área capacidad.

Los aportes mensuales al embalse son entonces corregidos con estas pérdidas y serían:

$$q_t = q_t + P_t$$

y en donde P_t puede ser negativo si $E_t > LL_t$ y el valor de q_t sería negativo cuando los aportes del río q_t sean inferiores a las pérdidas P_t .

b) Solución del Problema

Se quiere entonces definir la operación del sistema que:

$$\text{Min } \left\{ \sum_{t=1}^N (X_t - D_t)^2 + \sum_{t=1}^N (S_{t-1} - V_{t-1})^2 \right\}$$

sujeto a las restricciones físicas del sistema y a la ecuación de continuidad. En donde D_t es la demanda de riego durante el mes t , X_t es la cantidad de agua entregada por el embalse durante el mes t , S_{t-1} es la cantidad de agua almacenada en el embalse al final del mes t y V_{t-1} es el almacenamiento deseado en el embalse para control de inundaciones al final del mes $t-1$. Como se puede observar se está usando la nomenclatura del algoritmo de programación dinámica hacia adelante en donde S_{t-1} indican almacenamientos al final del mes es decir, siguiendo la nomenclatura reseñada en la Figura 2.

El problema de optimización general puede entonces escribirse como:

$$\text{Min} \left\{ \sum_{t=1}^N (X_t - D_t)^2 + \sum_{t=1}^N (S_{t-1} - V_{t-1})^2 \right\}$$

sujeto a:

$$S_{t-1} = S_t + q_t - X_t$$

$$X_t \geq 0$$

$$0 \leq S_{\text{MIN}} \leq S_{t-1} \leq S_{\text{MAX}}$$

y en donde q_t , los aportes al embalse durante el mes t se consideran conocidos e incluyen además de los aportes del río Guárico, los aportes por precipitación directa al lago durante el mes t y las pérdidas por evaporación durante ese mes.

Este problema de operación va a ser solucionado en forma determinística usando los registros de aportes mensuales al embalse durante el período 1971-1974 y asumiendo que al inicio del primer mes el embalse tiene un almacenamiento de $388,022 \times 10^6 \text{m}^3$ que corresponde al nivel normal de las aguas. Los aportes al embalse para el período 1971-1974 se presentan en la Tabla 54.

El problema es entonces solucionado usando el algoritmo de programación dinámica hacia adelante y mediante la forma de cálculo de la programación dinámica. La función recursiva para la primera etapa viene dada como:

$$f_1(S_1) = \text{Min} \{ (X_1 - D_1)^2 + (S_0 - V_0)^2 \}$$

sujeto a:

$$S_0 = S_1 + q_1 - X_1$$

de donde:

$$f_1(S_1) = \text{Min}_{X_1} \{ (X_1 - D_1)^2 + (S_1 + q_1 - X_1 - V_0)^2 \}$$

Tabla 54. Entradas de agua al embalse Guárico.

Año	Mes	Lluvia (mm)	Evapora. (mm)	P_t (m^3/s)	q_t (m^3/s)	$q_t - P_t$ (m^3/s)	$q_t - P_t$ ($10^6 \times m^2$)
1971	Enero	1.5	148.47	-3.54	24.98	21.44	57.42
	Febrero	.0	163.03	-4.35	11.47	7.12	17.22
	Marzo	.0	185.99	-4.48	8.03	3.55	9.51
	Abril	160.8	161.84	-0.03	8.29	8.26	22.12
	Mayo	154.4	114.38	0.96	39.87	40.83	109.36
	Junio	119.5	113.12	0.16	24.45	24.61	63.79
	Julio	173.3	117.18	1.35	23.19	24.54	65.73
	Agosto	274.1	112.56	3.89	26.77	30.66	82.12
	Septie.	123.4	115.5	0.20	75.59	75.79	196.45
	Octubre	77.4	115.43	-0.92	23.51	22.59	60.51
	Noviem.	34.5	127.96	-2.33	8.34	6.01	15.58
	Diciem.	.2	147.49	-3.55	7.44	3.89	10.42
1972	Enero	10.5	149.38	-3.34	5.57	2.23	5.97
	Febrero	0	153.09	-4.08	4.69	0.61	1.48
	Marzo	4.2	196.58	-4.63	2.81	-1.82	-4.87
	Abril	99.4	194.46	-2.37	3.32	0.95	2.48
	Mayo	75.8	152.25	-1.84	7.40	5.56	14.89
	Junio	61.7	145.81	-2.09	19.08	16.99	44.04
	Julio	114.8	136.78	-0.53	11.64	11.11	29.76
	Agosto	194.5	146.79	1.15	22.45	23.6	63.21
	Septiem.	120.5	121.31	-0.02	47.22	47.2	122.34
	Octubre	49.2	132.09	-2.0	36.94	34.94	93.58
	Noviemb.	45.9	137.55	-2.28	27.12	24.84	64.39
	Diciemb.	9.6	178.01	-4.06	18.88	14.82	39.69
1973	Enero	0	207.41	-4.99	12.62	7.63	20.44
	Febrero	0	195.79	-5.22	12.81	7.59	18.36
	Marzo	1.5	226.59	-5.42	14.91	9.49	25.42
	Abril	177.2	212.03	-0.87	15.65	14.78	38.31
	Mayo	74.2	203.42	-3.11	16.48	13.37	35.81
	Junio	136.8	167.13	-0.008	5.49	5.48	14.20
	Julio	123.5	135.59	-0.29	3.15	2.86	7.66
	Agosto	265.2	117.88	3.55	4.49	8.04	21.53
	Septiem.	252.2	113.68	3.45	29.01	32.46	84.14
	Octubre	155.7	110.53	1.09	50.25	51.34	137.51
	Noviemb.	136.1	118.37	0.44	5.97	6.41	16.61
	Diciemb.	0.8	145.67	-3.49	1.48	-2.01	5.38
1974	Enero	0.4	169.82	-4.08	5.97	1.89	5.06
	Febrero	0	205.52	-5.48	12.62	7.14	17.27
	Marzo	0	231.91	-5.58	12.81	7.23	19.36
	Abril	0	206.29	-5.13	14.91	9.78	26.19
	Mayo	106.2	179.83	-1.77	15.65	13.88	37.18
	Junio	69.2	191.8	-3.05	16.48	13.48	34.81
	Julio	196.9	138.11	1.42	5.49	6.91	18.51
	Agosto	236.9	119.91	2.82	3.15	5.97	15.99
	Septiemb.	169.0	94.15	1.86	4.49	6.35	16.46
	Octubre	63.3	115.43	-1.26	20.01	27.75	74.33
	Noviemb.	26.0	125.86	-2.46	50.25	47.77	123.82
	Diciemb.	0.8	162.9	-3.98	5.97	1.99	5.33

el valor de X_1 que minimiza $f_1(S_1)$ se obtiene derivando parcialmente esta expresión con respecto a X_1 e igualando a cero el resultado, es decir:

$$\frac{\partial f_1(S_1)}{\partial X_1} = f_1'(S_1) = 0; \quad 2(X_1 - D_1) - 2(S_1 + q_1 - X_1 - V_0) = 0$$

lo cual da como resultado:

$$X_1 = \frac{1}{2} (S_1 + q_1 + D_1 + V_0)$$

y reemplazando este resultado en la ecuación recursiva anterior puede escribirse que:

$$f_1(S_1) = \frac{1}{2} (S_1 + q_1 - D_1 - V_0)^2$$

El problema a ser resuelto en la segunda etapa puede escribirse como:

$$f_2(S_2) = \min_{X_2} \{ (X_2 - D_2)^2 + (S_1 - V_1)^2 + f_1(S_1) \}$$

sujeto a:

$$S_1 = S_2 + q_2 - X_2$$

de donde:

$$f_2(S_2) = \min_{X_2} \{ (X_2 - D_2)^2 + (S_1 - V_1)^2 + f_1(S_2 + q_2 - X_2) \}$$

o sea:

$$f_2(S_2) = \min_{X_2} \{ (X_2 - D_2)^2 + (S_1 - V_1)^2 + \frac{1}{2} (S_2 + q_2 - X_2 + q_1 - D_1 - V_0)^2 \}$$

el valor de X_2 que minimiza $f_2(S_2)$ se obtiene derivando parcialmente esta expresión con respecto a X_2 e igualando a cero el resultado, es decir:

$$\frac{\partial f_2(S_2)}{\partial X_2} = f'(S_2) = 0; \quad 2(X_2 - D_2) - 2(S_2 + q_2 - X_2 - V_1) - (S_2 + q_2 - X_2 + q_1 - D_1 - V_0) = 0$$

lo cual daría:

$$X_2 = 0.2 (3S_2 + 3q_2 + 2D_2 + q_1 - D_1 - 2V_1 - V_0)$$

y reemplazando esto en la función recursiva anterior daría:

$$f_2(S_2) = (0.6S_2 + 0.6q_2 - 0.6D_2 + 0.2q_1 - 0.2D_1 - 0.4V_1 - 0.2V_0) + (0.4S_2 + 0.4q_2 - 0.4D_2 + 0.2q_1 + 0.2D_1 - 0.6V_1 + 0.2V_0)^2 + 0.5(0.4S_2 + 0.4q_2 - 0.4D_2 + 0.8q_1 - 0.8D_1 + 0.4V_1 - 0.8V_0)^2$$

El problema a ser resuelto en la tercera etapa sería:

$$f_3(S_3) = \min_{D_3} [(X_3 - D_3)^2 + (S_2 - V_2)^2 + f_2(S_2)]$$

$$S_2 = S_3 + q_3 - X_3$$

y el valor óptimo de X_3 se obtiene como:

$$f'_3(S_3) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X_3} \{ (X_3 - D_3)^2 + (S_3 + q_3 - X_3 - V_2)^2 + (0.6S_3 + 0.6X_3 + 0.6q_2 - 0.6D_2 + 0.2q_1 - 0.2D_1 - 0.4V_1 - 0.2V_0)^2 + (0.4S_3 + 0.4q_3 - 0.4X_3 + 0.4q_2 - 0.4D_2 - 0.2q_1 + 0.2D_1 - 0.6V_1 + 0.2V_0)^2 + 0.5(0.4S_3 + 0.4q_3 - 0.4X_3 + 0.4q_2 - 0.4D_2 + 0.8q_1 - 0.8D_1 + 0.4V_1 - 0.8V_0)^2 \} = 0$$

$$\begin{aligned}
& 2(X_3 - D_3) - 2(S_3 + q_3 - X_3 - V_2) - 1.2(0.6S_3 + 0.6q_3 - 0.6X_3 + \\
& 0.6q_2 - 0.6D_2 + 0.2q_1 - 0.2D_1 - 0.4V_1 - 0.2V_0) - 0.8(0.4S_3 + \\
& 0.4q_3 - 0.4X_3 + 0.4q_2 - 0.4D_2 - 0.2q_1 + 0.2D_1 - 0.6V_1 + 0.2V_0) - \\
& 0.4(0.4S_3 + 0.4q_3 - 0.4X_3 + 0.4q_2 - 0.4D_2 + 0.8q_1 - 0.8D_1 + 0.4V_1 - \\
& 0.8V_0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2X_3 - 2D_3 - 2S_3 - 2q_3 + 2X_3 + 2V_2 - 0.72S_3 - 0.72q_3 + 0.72X_3 - \\
& 0.72q_2 + 0.72D_2 - 0.24q_1 + 0.24D_1 + 0.48V_1 + 0.24V_0 - 0.32S_3 - \\
& 0.32q_3 + 0.32X_3 - 0.32q_2 + 0.32D_2 + 0.16q_1 - 0.16D_1 + 0.48V_1 - \\
& 0.16V_0 - 0.16S_3 - 0.16q_3 + 0.16X_3 - 0.16q_2 + 0.16D_2 - 0.32q_1 + \\
& 0.32D_1 - 0.16V_1 + 0.32V_0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5.2X_3 - 2D_3 - 3.2S_3 - 3.2q_3 + 2V_2 - 1.2q_2 + 1.2D_2 - 0.4q_1 + \\
& 0.4D_1 + 0.8V_1 + 0.4V_0 = 0
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
X_3 = & 0.385D_3 + 0.615S_3 + 0.615q_3 - 0.385V_2 + 0.231q_2 - 0.231D_2 + \\
& 0.077q_1 - 0.077D_1 - 0.154V_1 - 0.077V_0
\end{aligned}$$

y reemplazando este valor óptimo de X_3 en la ecuación recursiva anterior para $f_3(S_3)$ daría:

$$\begin{aligned}
f_3(S_3) = & (0.615S_3 - 0.615D_3 + 0.615q_3 - 0.385V_2 + 0.231q_2 - 0.231D_2 + \\
& 0.077q_1 - 0.077D_1 - 0.154V_1 - 0.077V_0)^2 + (0.385S_3 + 0.385q_3 - \\
& 0.615V_2 - 0.385D_3 + 0.231q_2 + 0.231D_2 - 0.077q_1 + 0.077D_1 + 0.154V_1 + \\
& 0.077V_0)^2 + (0.231S_3 + 0.231q_3 + 0.461q_2 - 0.461D_2 + 0.154q_1 - \\
& 0.154D_1 - 0.308V_1 - 0.154V_0 - 0.231D_3 + 0.231V_2)^2 + (0.154S_3 + \\
& 0.154q_3 + 0.308q_2 - 0.308D_2 - 0.231q_1 + 0.231D_1 - 0.538V_1 + 0.231V_0 - \\
& 0.154D_3 + 0.154V_2)^2 + 0.5(0.154S_3 + 0.154q_3 + 0.308q_2 - 0.308D_2 + \\
& 0.769q_1 - 0.769D_1 + 0.462V_1 - 0.769V_0 - 0.154D_3 + 0.154V_2)^2
\end{aligned}$$

El problema a ser resuelto en la cuarta etapa puede escribirse como:

$$f_4(S_4) = \min_{X_4} \{(X_4 - D_4)^2 + (S_3 - V_3)^2 + f_3(S_3)\}$$

sujeto a:

$$S_3 = S_4 + q_4 - X_4$$

o sea:

$$f_4(S_4) = \min_{X_4} \{(X_4 - D_4)^2 + (S_4 + q_4 - X_4 - V_3)^2 + f_3(S_4 + q_4 - X_4)\}$$

y el valor de X_4 que minimiza $f_4(S_4)$ se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f_4(S_4)}{\partial X_4} = f'(S_4) = 0$$

o sea:

$$\begin{aligned}
& 2X_4 - 2D_4 - 2S_4 - 2q_4 + 2X_4 + 2V_3 - 0.750S_4 - 0.756q_4 + 0.756X_4 + \\
& 0.756D_3 - 0.756q_3 + 0.474V_2 - 0.284q_2 + 0.284D_2 - 0.095q_1 + 0.095D_1 + \\
& 0.189V_1 + 0.095V_0 - 0.296S_4 - 0.296q_4 + 0.296X_4 - 0.296q_3 + 0.474V_2 + \\
& 0.296D_3 + 0.178q_2 - 0.059q_1 - 0.059D_1 - 0.119V_1 - 0.059V_0 - 0.107S_4 - \\
& 0.107q_4 + 0.107X_4 - 0.107q_3 - 0.213q_2 + 0.213D_2 - 0.071q_1 + 0.071D_1 + \\
& 0.142V_1 + 0.071V_0 + 0.107D_3 - 0.107V_2 - 0.047S_4 - 0.047q_4 + 0.047X_4 - \\
& 0.047q_3 - 0.095q_2 + 0.095D_2 + 0.071q_1 + 0.071D_1 - 0.166V_1 - 0.071V_0 + \\
& 0.047D_3 - 0.047V_2 - 0.024S_4 - 0.024q_4 + 0.024X_4 - 0.024X_3 - 0.024q_2 - \\
& 0.047q_2 + 0.047D_2 - 0.118q_1 + 0.118D_1 - 0.071V_1 + 0.118V_0 + 0.024D_3 - \\
& 0.024V_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5.23X_4 - 2D_4 - 3.23S_4 - 3.23q_4 + 2V_3 + 1.23D_3 + 0.77V_2 - 0.461q_2 + \\
& 0.461D_2 - 0.154q_1 + 0.154D_1 + 0.307D_1 + 0.307V_1 + 0.154V_0 - 1.23q_3 = 0
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned}
X_4 = & 0.382D_4 + 0.618S_4 + 0.382q_4 - 0.382V_3 - 0.235D_3 + 0.235q_3 - \\
& 0.147V_2 + 0.088q_2 - 0.088D_2 + 0.029q_1 - 0.029D_1 - 0.059V_1 - 0.029V_0
\end{aligned}$$

y reemplazando este valor en la función recursiva anterior se puede escribir que:

$$\begin{aligned}
f_4(S_4) = & (0.618S_4 - 0.618D_4 + 0.618q_4 - 0.382V_3 - 0.235D_3 + 0.235q_3 - \\
& 0.147V_2 + 0.088q_2 - 0.088D_2 + 0.029q_1 - 0.029D_1 - 0.059V_1 - 0.029V_0)^2 + \\
& (0.382S_4 + 0.382q_4 - 0.382D_4 - 0.618V_3 + 0.235D_3 - 0.235q_3 + 0.147V_2 - \\
& 0.088q_2 + 0.088D_2 + 0.029q_1 + 0.029D_1 + 0.059V_1 + 0.029V_0)^2 + \\
& (0.235S_4 + 0.235q_4 - 0.235D_4 + 0.235V_3 - 0.47D_3 + 0.47q_3 - 0.475V_2 + \\
& 0.177q_2 - 0.177D_2 + 0.059q_1 - 0.059D_1 - 0.118V_1 - 0.059V_0)^2 + (0.147S_4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.147q_4 - 0.147D_4 + 0.147V_3 - 0.295D_3 + 0.295q_3 - 0.672V_2 - 0.265q_2 + \\
& 0.265D_2 - 0.088q_1 + 0.088D_1 + 0.177V_1 + 0.088V_0)^2 + (0.088S_4 + \\
& 0.088q_4 - 0.088D_4 + 0.088V_3 - 0.177D_3 + 0.177q_3 + 0.197V_2 + 0.441q_2 - \\
& 0.441D_2 + 0.147q_1 - 0.147D_1 - 0.294V_1 - 0.147V_0)^2 + (0.059S_4 + \\
& 0.059q_4 - 0.059D_4 + 0.059V_3 - 0.118D_3 + 0.118q_3 + 0.131V_2 + 0.294q_2 - \\
& 0.294D_2 - 0.235q_1 + 0.231D_1 - 0.529V_1 + 0.235V_0)^2 + 0.5 (0.059S_4 + \\
& 0.059q_4 - 0.059D_4 + 0.059V_3 - 0.118D_3 + 0.118q_3 + 0.131V_2 + 0.294q_2 - \\
& 0.294D_2 + 0.294D_2 + 0.235q_1 + 0.231D_1 - 0.529V_1 + 0.235V_0)^2 + 0.5 \\
& (0.059S_4 + 0.059q_4 - 0.059D_4 + 0.059V_3 - 0.118D_3 + 0.118q_3 + 0.131V_2 + \\
& 0.294q_1 - 0.294D_1 + 0.765q_1 - 0.765D_1 - 0.471V_1 - 0.765V_0)^2
\end{aligned}$$

De la misma manera se obtuvieron los valores de X_5 , X_6 , X_7 , X_9 , X_{10} , X_{11} , y X_{12} para las demás etapas y estos resultados se dan a continuación:

$$\begin{aligned}
X_5 = & 0.382D_5 + 0.618S_5 + 0.618q_5 - 0.382V_4 - 0.236D_4 + 0.236q_4 - \\
& 0.147S_3 - 0.09D_3 + 0.09q_3 - 0.056V_2 + 0.034q_2 - 0.034D_2 + 0.011q_1 - \\
& 0.011D_1 - 0.022V_1 - 0.011V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_6 = & 0.382D_6 + 0.618S_6 + 0.618q_6 - 0.382V_5 - 0.236D_5 + 0.236q_5 - \\
& 0.146V_4 - 0.09D_4 + 0.09q_4 - 0.056V_3 - 0.034D_3 + 0.034q_3 - 0.022V_2 + \\
& 0.013q_2 - 0.013D_2 - 0.009V_1 + 0.004q_1 - 0.004D_1 - 0.004V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_7 = & 0.382D_7 + 0.618S_7 + 0.618q_7 - 0.382V_6 - 0.236D_6 + 0.236q_6 - \\
& 0.146V_5 - 0.09D_5 + 0.09q_5 - 0.56V_4 - 0.34D_4 + 0.034q_4 - 0.022V_3 + \\
& 0.013q_3 - 0.013D_3 - 0.008V_2 + 0.005q_2 - 0.005D_2 - 0.003V_1 + 0.002q_1 - \\
& 0.022D_1 - 0.002V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_8 = & 0.382D_8 + 0.618S_8 + 0.618q_8 - 0.382V_7 - 0.236D_7 + 0.236q_7 - \\
& 0.146V_6 - 0.09D_6 + 0.09q_6 - 0.056V_5 - 0.034D_5 + 0.034q_5 - 0.021V_4 - \\
& 0.013D_4 + 0.013q_4 - 0.008V_3 - 0.005D_3 + 0.005q_3 - 0.003V_2 - 0.002D_2 + \\
& 0.002q_2 - 0.0006D_1 + 0.0006q_1 - 0.001V_1 - 0.006V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_9 = & 0.382D_9 + 0.618S_9 + 0.618q_9 - 0.382V_8 - 0.236D_8 + 0.236q_8 - \\
& 0.146V_7 - 0.09D_7 + 0.09q_7 - 0.056V_6 - 0.034D_6 + 0.034q_6 - 0.021V_5 - \\
& 0.013D_5 + 0.013q_5 - 0.008V_4 - 0.005D_4 + 0.005q_4 - 0.003V_3 - 0.002D_3 + \\
& 0.002q_3 - 0.001V_2 - 0.0007D_2 + 0.0007q_2 - 0.0005V_1 - 0.0002D_1 + \\
& 0.0002q_1 - 0.0002V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{10} = & 0.382D_{10} + 0.618S_{10} + 0.618q_{10} - 0.382V_9 - 0.236D_9 + 0.236q_9 - \\
& 0.146V_8 - 0.09D_8 + 0.09q_8 - 0.056V_7 - 0.034D_7 + 0.034q_7 - 0.021V_6 - \\
& 0.013D_6 + 0.013q_6 - 0.008V_5 - 0.005D_5 + 0.005q_5 - 0.003V_4 - 0.002D_4 + \\
& 0.002q_4 - 0.001V_3 - 0.0007D_3 + 0.0007q_3 - 0.0004V_2 - 0.0003D_2 + 0.0003q_2 - \\
& 0.0002V_1 - 0.00009D_1 + 0.00009q_1 - 0.00009V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{11} = & 0.382D_{11} + 0.618S_{11} + 0.618q_{11} - 0.382V_{10} - 0.236D_{10} + 0.236q_{10} - \\
& 0.146V_9 - 0.09D_9 + 0.09q_9 - 0.056V_8 - 0.034D_8 + 0.034q_8 - 0.021V_7 - \\
& 0.013D_7 + 0.013q_7 - 0.008V_6 - 0.005D_6 + 0.005q_6 - 0.003V_5 - 0.002D_5 + \\
& 0.002q_5 - 0.001V_4 - 0.0007D_4 + 0.0007q_4 - 0.0004V_3 - 0.0003D_3 + \\
& 0.0003q_3 - 0.0002V_2 - 0.0001D_2 + 0.0001q_2 - 0.00007V_1 - 0.00004D_1 + \\
& 0.00004q_1 - 0.00003V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{12} = & 0.618S_{12} + 0.618q_{12} + 0.382D_{12} - 0.382V_{11} - 0.236D_{11} + 0.236q_{11} - \\
& 0.146V_{10} - 0.09D_{10} + 0.09q_{10} - 0.056V_9 - 0.034D_9 + 0.034q_9 - 0.021V_8 - \\
& 0.013D_8 + 0.013q_8 - 0.008V_7 - 0.005D_7 + 0.005q_7 - 0.003V_6 - 0.002D_6 + \\
& 0.002q_6 - 0.001V_5 - 0.0007D_5 + 0.0007q_5 - 0.0005V_4 - 0.0003D_4 + \\
& 0.0003q_4 - 0.0002V_3 - 0.0001D_3 + 0.0001q_3 - 0.00007V_2 - 0.00004D_2 + \\
& 0.00004q_2 - 0.00003V_1 + 0.00001D_1 + 0.00001q_1 - 0.00002V_0
\end{aligned}$$

Al observar las ecuaciones anteriores se pudo determinar que para un mes cualquiera t , los coeficientes de todas las variables podrían ser descritas en función del coeficiente de la variable de almacenamiento $C(t)$. De este modo bastaría con encontrar la ley de variación de este coeficiente para todos los meses y su relación con los otros coeficientes. De esta manera se puede escribir que:

$$C(t) = \frac{2 + 2C(t-1)}{4 + 2C(t-1)}$$

y esta fórmula es válida para el caso en que $C(0) = 0$.

Se pudo observar que este coeficiente varía desde $t = 1$ hasta $t = 12$ a partir del cual permanece constante.

Por otro lado se determinaron las siguientes propiedades entre los coeficientes de las variables:

1. $C(t) = C_q(t)$

donde C_q es el coeficiente de las entradas de agua al embalse.

2. $C_D(t) = -C_V(t-1) = 1 - C(t)$ para $t = 1$

en donde $C_D(t)$ es el coeficiente de la demanda de riego en el mes t y $C_V(t)$ es el coeficiente de almacenamiento para control de avenidas en el mes t .

$$3. -C_D(t) = C_q(i) \quad \text{para todo } t \neq i$$

Para $t \neq i$ desde $t = i=1$ hasta $t = i = 11$

$$- C_D(t-1) = C_q(t-1) = 2C(t)-1$$

$$- C_V(t-1) = 2-3C(t)$$

$$- C_D(t-2) = C_q(t-1) - C_V(t-2)$$

$$- C_D(t-2) = C_q(t-1) = 5C(t)-3$$

De una manera similar se obtuvo:

$$- C_V(t-3) = (2-3C(t)) - (5C(t)-3) = 5-8C(t)$$

$$- C_D(t-3) = C_q(t-3) = (5C(t)-3) - (5-8C(t)) = 13C(t)-8$$

$$- C_V(t-4) = (5-8C(t)) - (13C(t)-8) = 13-21C(t)$$

$$- C_D(t-4) = C_q(t-4) = (13C(t)-8) - (13-21C(t)) = 35C(t)-21$$

$$- C_V(t-5) = (13-21C(t)) - (34C(t)-21) = 34-55C(t)$$

$$- C_D(t-5) = C_q(t-5) = (34C(t)-21) - (34-55C(t)) = 89C(t)-55$$

$$- C_V(t-6) = (34-55C(t)) - (89C(t)-55) = 89-144C(t)$$

$$- C_D(t-6) = C_q(t-6) = (89C(t)-55) - (89-144C(t)) = 233C(t)-144$$

$$- C_V(t-7) = (89-144C(t)) - (233C(t)-144) = 233-377C(t)$$

$$- C_D(t-7) = C_q(t-7) = (233C(t)-144) - (233-377C(t)) = 610C(t)-377$$

- $C_V(t-8) = (233-377C(t)) - 610C(t) - 377 = 610 - 987C(t)$
- $C_D(t-8) = C_q(t-8) = (610C(t) - 377) - (610 - 987C(t)) = 1597C(t) - 987$
- $C_V(t-9) = (610 - 987C(t)) - (1597C(t) - 987) = 1597 - 2584C(t)$
- $C_D(t-9) = C_q(t-9) = (1597C(t) - 987) - (1597 - 2584C(t)) = 4181C(t) - 2584$
- $C_V(t-10) = (1597 - 2584C(t)) - (4181C(t) - 2584) = 4181 - 6765C(t)$
- $C_D(t-10) = C_q(t-10) = (4181C(t) - 2584) - (4181 - 6765C(t)) = 10946C(t) - 5765$
- $C_V(t-11) = (4181 - 6765C(t)) - (10946C(t) - 6765) = 10946 - 17711C(t)$
- $C_D(t-11) = C_q(t-11) = (10946C(t) - 6765) - (10946 - 17711C(t)) = 28657C(t) - 17711$
- $C_V(t-12) = (10946 - 17711C(t)) - (28657C(t) - 17711) = 28657 - 46368C(t)$

A partir de aquí, los coeficientes se hacen igual a cero lo que indica que en la determinación de la descarga óptima de un mes, la incidencia de los meses siguientes llega hasta los 12 meses siguientes, o sea que el modelo tiene memoria de 1 año.

De esta forma podemos generar la ecuación general para cualquier mes t , que viene dada por:

$$\begin{aligned}
 X(t) = & C(t)S(t) + C(t)q(t) + (1-C(t))V(t) - [1-C(t)]V(t-1) - [2C(t)-1]D(t-1) + \\
 & [2C(t)-1]q(t-1) - [2-3C(t)]V(t-2) - [5C(t)-3]D(t-2) + [5C(t)-3]q(t-2) - \\
 & [5-8C(t)]V(t-3) - [13C(t)-8]D(t-3) + [13C(t)-8]q(t-3) - [13-21C(t)] \\
 & V(t-4) - [34C(t)-21]D(t-4) + [34C(t)-21]q(t-4) - [34-55C(t)]V(t-5) - \\
 & [89C(t)-55]D(t-5) + [89C(t)-55]q(t-5) - [89-144C(t)]V(t-6) - [233C(t) - \\
 & 144]D(t-6) + [233C(t)-144]q(t-6) - [233-377C(t)]V(t-7) - [160C(t)-377] \\
 & D(t-7) + [610C(t)-377]q(t-7) - [610-987C(t)]V(t-8) - [1597C(t)-987]D(t-8) + \\
 & [t-8] + 1597C(t) - 987 [q(t-8) - 1597 - 2584C(t) [V(t-9) - 4181C(t) - 2584] \\
 & D(t-9) + [4181C(t) - 2584]q(t-9) - [4181 - 6765C(t)]V(t-10) - [10946C(t) - 6765] \\
 & D(t-10) + [10946C(t) - 6765]q(t-10) - [10946 - 17711C(t)]D(t-11) + [28657C(t) - \\
 & 17711]q(t-11) - [28657 - 46368C(t)]V(t-12)
 \end{aligned}$$

con $t \geq 1$ para D y q y $t \geq 0$ para V .

Aplicando esta ecuación general se obtienen las descargas óptimas correspondientes a los cuatro años de registros las cuales se presentan en la Tabla 55.

c) *Comentarios Finales sobre los Resultados*

Analizando los resultados de la operación óptima del embalse Guárico durante el período 1971-1974 se pueden hacer los siguientes comentarios.

1. Observe que al considerar en la función objetivo la minimización de cuadrado de las desviaciones del almacenamiento en el mes t con respecto al almacenamiento deseado, la solución final va a tratar de estar alrededor de estos almacenamientos deseados. El modelo de optimización tenderá entonces a mantener un determinado nivel en el embalse y posiblemente en detrimento del otro uso que en este caso es riego. Se debe entonces tratar de modificar esta función objetivo para obtener resultados más de acuerdo con lo buscado.
2. El modelo de optimización logra mejores resultados cuando la demanda de agua para riego es diferente de cero.
3. El registro disponible de aportes al embalse de 1971 a 1974 corresponde a una época de extrema sequía en la zona y es por esto que para algunos meses los aportes totales al embalse son negativos. Esto puede resultar en que para algunos meses las descargas óptimas sean negativas en cuyo caso se tomaron iguales a cero.
4. El modelo de optimización usado acá es completamente determinístico, o sea, no tuvo en cuenta el carácter probabilístico de los aportes hidrológicos. Podría llegar a considerarse un modelo estocástico usando una distribución probabilística para los aportes al sistema y determinando las distribuciones de las entregas óptimas y de los almacenamientos óptimos.

Tabla 55. Descargas Optimas para el período 1971-1974.

Año	Mes	Descarga	Año	Mes	Descarga	Año	Mes	Descarga
1974	Dic.	0.343214×10^8		Feb.	0.116190×10^9		Mayo	0.654766×10^8
	Nov.	0.0		Ene.	0.113943×10^9		Abr.	0.711054×10^8
	Oct.	0.0	1972	Dic.	0.846181×10^8		Mar.	0.125722×10^9
	Sept.	0.0		Nov.	0.459911×10^8		Feb.	0.181651×10^9
	Agos.	0.0		Oct.	0.677287×10^7		Ene.	0.167668×10^9
	Jul.	0.0		Sept.	0.0			
	Jun.	0.0		Agos.	0.0			
	May.	0.217774×10^8		Jul.	0.0			
	Abr.	0.539076×10^8		Jun.	0.0			
	Mar.	0.113756×10^9		May.	0.106339×10^8			
	Feb.	0.102898×10^9		Abr.	0.369502×10^8			
	Ene.	0.838193×10^8		Mar.	0.977590×10^8			
1973	Dic.	0.229253×10^8		Feb.	0.960980×10^8			
	Nov.	0.0		Ene.	0.952061×10^8			
	Oct.	0.0	1971	Dic.	0.629704×10^8			
	Sep.	0.0		Nov.	0.290642×10^8			
	Ago.	0.0		Oct.	0.264213×10^8			
	Jul.	0.0		Sep.	0.511939×10^8			
	Jun.	0.0		Ago.	0.100355×10^8			
	May.	0.209162×10^8		Jul.	0.117708×10^8			
	Abr.	0.605476×10^8		Jun.	0.159647×10^7			
	Mar.	0.122419×10^9		Jun.	0.159647×10^8			

5. La respuesta del modelo es que se pueden regar 14000 hectáreas dejando como almacenamientos para el control de avenidas lo siguiente,

$$S_{MAX} = 0.388022 \times 10^6 m^3$$

$$S_{MIN} = 0.845081 \times 10^6 m^3$$

6. El hecho de que el almacenamiento inicial en el embalse es arbitrario lleva a que los resultados varían de acuerdo con él, por lo que ~~habría~~ que tantear con distintos almacenamientos iniciales y no asumirlo fijo tal como se hizo en este caso.
7. En el cálculo de la evaporación en el embalse se asumió un almacenamiento medio para todos los meses igual al almacenamiento medio del embalse. En realidad la solución en este caso debe hacerse de una forma iterativa tal como se discutió en la sección 2.4.

VII. PROBLEMAS

1. En un embalse se quiere mantener un volumen constante de $10 \times 10^6 m^3$ y una descarga constante de $15 \times 10^6 m^3$ por período. La capacidad total del embalse es de $15 \times 10^6 m^3$ y los flujos de entrada durante tres períodos consecutivos son de 15, 20 y 10 millones de m^3 respectivamente. Se quiere definir cuál es la operación del embalse durante esos tres períodos de tiempo, de tal forma que se minimice el cuadrado de las desviaciones con respecto al volumen y a la descarga deseada.
2. Un embalse tiene una capacidad útil de $100 \times 10^6 m^3$ de agua, y en cualquier momento la cantidad de agua almacenada puede ser de 0, 50 ó 100 millones de m^3 . El agua es derivada del embalse para satisfacer una cierta demanda, que para los próximos 5 períodos de tiempo está dada como:

Período de Tiempo	Demanda (10^6m^3)
1	50
2	100
3	150
4	100
5	50

No es deseable descargar agua por el aliviadero sino sólo en caso de emergencia. Los parámetros de las aportaciones del río al embalse durante los próximos 5 períodos son los siguientes:

Período de Tiempo	Aportaciones (10^3m^3)
1	50
2	100
3	100
4	50
5	50

Al principio del primer período el embalse está lleno y en la operación no se puede pasar el embalse de lleno a vacío o viceversa. Se quiere definir la operación óptima del embalse que minimice los déficits durante los 5 períodos de tiempo.

- Un embalse tiene una capacidad útil de 6 unidades de agua y en cualquier momento la cantidad de agua almacenada puede ser 0, 2, 4, ó 6 unidades. El agua disponible en el embalse puede ser vendida con los siguientes beneficios:

Agua Entregada	Beneficio Obtenido
0	0
2	4000
4	7000
6	5500

La capacidad de entrega del embalse es de 6 unidades por mes. El agua descargada por el aliviadero por encima de 4 unidades produce daños aguas abajo del embalse y esta situación debe tratar de evitarse bajo cualquier circunstancia. Los aportes al embalse durante los próximos cuatro períodos de tiempo son los siguientes:

Período	Aportes al Embalse
1	4
2	2
3	0
4	2

Al principio del primer período se tiene en el embalse un almacenamiento igual a 2 unidades y al final del último período se quiere tener en el embalse un volumen igual a 4 unidades. Se quiere definir la operación del embalse durante estos cuatro períodos de tiempo de tal forma que se maximicen los beneficios.

4. Resolver el problema anterior si no se tiene ninguna restricción con respecto al volumen almacenado al final del último período. Se quiere entonces definir la operación del embalse durante los cuatro períodos de tiempo que maximice los beneficios por venta de agua.
5. Resolver el problema 3 si no se tiene ninguna condición con respecto al volumen inicial en el primer período y con respecto al volumen final en

el último período. Se quiere entonces definir la trayectoria de almacenamientos en los cuatro períodos de tiempo que maximice los beneficios por venta de agua.

6. Se tiene un embalse con una capacidad total de $1400 \times 10^6 \text{ m}^3$ y con las siguientes características:

Volumen almacenamiento Máximo	=	$1580 \times 10^6 \text{ m}^3$
Volumen almacenamiento Mínimo	=	$180 \times 10^6 \text{ m}^3$
Descargas Mínimas Permitidas	=	$15.0 \text{ m}^3/\text{s}$
Evaporación en el embalse	=	83 mm/mes.
Cabeza hidráulica máxima	=	261.2 m.
Cabeza hidráulica mínima	=	247.00 m.
Eficiencia de la turbina	=	88%
Factor de carga de la turbina	=	100%
Pérdidas hidráulicas del sistema	=	5.0 m.
Altura de la turbina sobre el nivel del mar.	=	337.0 m.

La elevación media del agua por encima del nivel del mar puede ser determinado como función del almacenamiento medio en el embalse por medio de la siguiente ecuación polinomial:

$$H_t = 580.82 + 1.9267 \times 10^{-2} \bar{S}_t - 8.235 \times 10^{-6} \bar{S}_t^2 + 1.8893 \times 10^{-9} \bar{S}_t^3$$

La demanda por energía y los aportes al embalse durante los próximos cuatro meses están dadas por:

Mes	Demanda (eqv. MW)	Aportes al Embalse (10^6 m^3)
1	200	1000
2	300	800
3	400	600
4	200	200

Si se asume que el embalse al principio del primer mes tiene un almacenamiento igual a $600 \times 10^6 \text{ m}^3$, determine la operación del embalse que minimice el cuadrado de los déficits durante los cuatro meses.

7. Se tiene un embalse cuyas características físicas se describen a continuación:

Volumen de almacenamiento máximo	=	$180.0 \times 10^6 \text{ m}^3$
Volumen de almacenamiento mínimo	=	$20.0 \times 10^6 \text{ m}^3$
Descargas mínimas permitidas	=	$6.0 \text{ m}^3/\text{s}$
Cabeza hidráulica máxima	=	755.4
Cabeza hidráulica mínima	=	729.8
Eficiencia de la turbina	=	88%
Factor de carga de la turbina	=	100%
Pérdidas hidráulicas del sistema	=	30.0 m
Altura de la turbina sobre el nivel del mar.	=	90.7

La elevación media del agua por encima del nivel del mar puede ser determinada por medio de la siguiente ecuación que relaciona esa elevación con el volumen medio almacenado durante el período de tiempo respectivo,

$$H_t = 806.14 + 9.1297 \times 10^{-1} \bar{S}_t - 1.1452 \times 10^{-2} \bar{S}_t^2 + 6.646 \times 10^{-5} \bar{S}_t^3 - 1.3575 \times 10^{-7} \bar{S}_t^4$$

La evaporación en el sistema durante un mes es función del espejo de agua medio durante ese mes y se puede escribir como:

$$e_t = 0.035 \bar{A}_t$$

en donde e_t es la evaporación durante el mes t y \bar{A}_t es el área del espejo medio de agua durante el mes t . El área del espejo medio de agua es a su vez función de la altura media del agua en el embalse sobre el nivel del mar y se puede calcular por la ecuación:

$$\bar{A}_t = -3.546 \times 10^{-2} + 4.35 \times 10^{-1} H_t$$

en donde \bar{A}_t está dada en kilómetros cuadrados.

La demanda por energía y los aportes al embalse durante los próximos tres meses dados por:

Mes	Demanda (eqv. MW)	Aportes al Embalse (10^6 m^3)
1	150	80
2	200	60
3	300	40

Aunque la prioridad es la venta de energía existen beneficios adicionales si el embalse puede ser usado para recreación y se quisiera entonces mantener el embalse alrededor de un almacenamiento de $100 \times 10^6 \text{ m}^3$. Si se asume que el embalse al principio del primer mes tiene un almacenamiento igual a $60 \times 10^6 \text{ m}^3$, determine la operación del embalse que minimice el cuadrado de los déficits y el cuadrado de las diferencias con respecto al volumen deseado.

8. En el problema anterior se advirtió que los beneficios obtenidos por la recreación eran secundarios con respecto a las necesidades de satisfacer las demandas de energía, sin embargo, el problema se planteo dándole la misma importancia a ambos objetivos. Plantee una función objetivo para el problema anterior que reconozca esta prioridad y solucione el problema de nuevo.
9. Un embalse tiene una capacidad útil de 6 unidades. El agua del embalse puede ser vendida a una zona industrial y los beneficios obtenidos de vender una cantidad X_t durante el período de tiempo t se pueden escribir como:

$$R_t = -175.0 + 3037.50 X_t - 343.75 X_t^2$$

La capacidad total de entregas del embalse durante cualquier período es de 6 unidades y el agua descargada por el aliviadero no genera ni beneficios ni daños. Los pronósticos de las aportaciones al embalse en los próximos cuatro períodos de tiempo son las mismas que las del problema 3. Al principio del primer período se tiene en el embalse un almacenamiento igual a 2 unidades y al final de último período se quiere tener en el embalse un volumen igual a 4 unidades. Se quiere definir la operación óptima del embalse durante estos cuatro períodos de tiempo de tal forma que se maximicen los beneficios y usando el método de cálculo de la programación dinámica continua.

10. Resolver el problema anterior si no se tiene ninguna restricción con respecto al volumen almacenado al final del último período.
11. Dos embalses en paralelo han sido construidos para satisfacer las demandas de agua de una población cercana que están dadas para los próximos tres meses como:

Mes	Demanda de Agua (10^6 m^3)
1	100
2	50
3	25

La capacidad de uno de los embalses, el embalse A, es de $75 \times 10^6 \text{ m}^3$ y del otro embalse, el embalse B, es de $25 \times 10^6 \text{ m}^3$. Se asume que al inicio del primer mes el embalse A tiene almacenados $50 \times 10^6 \text{ m}^3$ y el embalse B se encuentra vacío. Los aportes a cada uno de los embalses durante los próximos tres meses han sido predichos y son:

Mes	Aportes Embalse A (10^6 m^3)	Aportes Embalse B (10^6 m^3)
1	50	50
2	50	25
3	25	0

Si la operación del sistema debe ser tal que al final del tercer mes el embalse A se encuentre lleno, y el embalse B tenga $25 \times 10^6 \text{ m}^3$ de agua, se quiere determinar la operación óptima de los dos embalses durante los próximos tres meses.

12. Para el problema 1 asuma que los flujos de entrada al embalse durante los tres períodos no son conocidos pero que para cada período pueden tomar los siguientes valores:

Período	Discretización		
	1	2	3
t			
1	0	5	10
2	20	25	30
3	5	10	15

Se asume también que los flujos de entrada están correlacionados y las probabilidades de transición de un valor en un período a un valor en el período siguiente se muestran en la Tabla siguiente:

Tiempo	Caudales		Probabilidad P_{ij}^t
	q_{it}	q_{jt+1}	
0	10	0	0.0
0	10	5	0.4
0	10	10	0.6
1	0	20	0.8
1	0	25	0.2
1	0	30	0.0
1	5	20	0.7
1	5	25	0.2
1	5	30	0.1
1	10	20	0.5
1	10	25	0.3
1	10	30	0.2
2	20	5	0.2
2	20	10	0.3
2	20	15	0.5
2	25	5	0.1
2	25	10	0.4
2	25	15	0.5
2	30	5	0.0
2	30	10	0.4
2	30	15	0.6

Se sabe que los aportes al embalse durante el período anterior al primero fueron de $10 \times 10^6 \text{m}^3$ y que el almacenamiento al inicio del primer período es de $10 \times 10^6 \text{m}^3$. Se quiere determinar la regla de operación que minimice el valor esperado de las desviaciones con respecto al volumen y a la descarga deseada.

13. Resolver el problema anterior si todas las probabilidades de transición son iguales a $1/3$.
14. Se quiere definir la regla de operación de un embalse de tal manera que se minimice el valor esperado de la suma del cuadrado de los déficits en cada período de tiempo. Se consideran sólo dos períodos de tiempo por año y los posibles valores de almacenamientos y aportes al embalse durante estos períodos son:

Tiempo t	Discretización del caudal i	Caudal q_{it}	Discretización del volumen K	Volumen S_{kt}
1	1	5	1	10
1	2	10	2	15
2	1	15	1	5
2	2	20	2	10

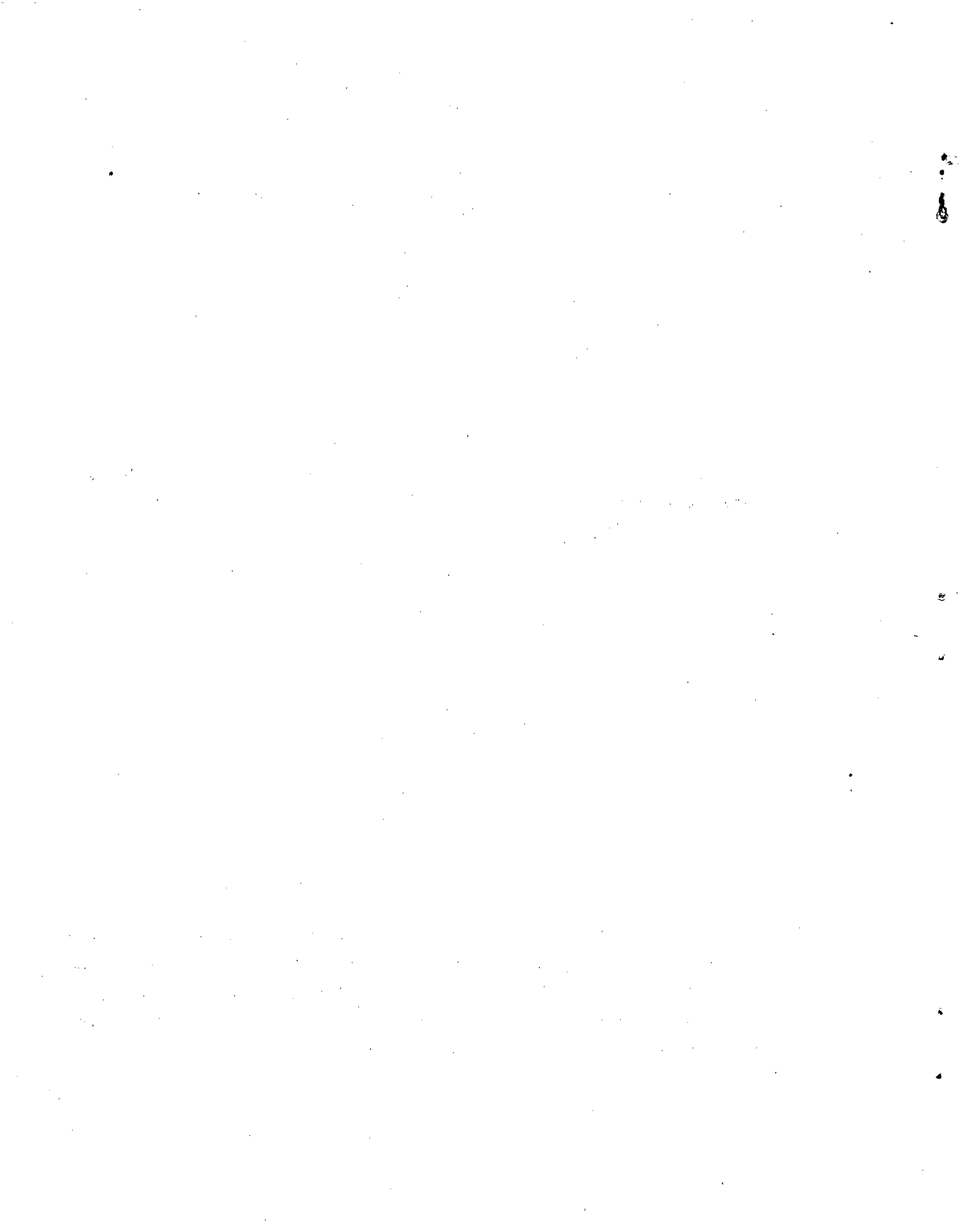
Las demandas por agua en ambos períodos es de 30 unidades. La evaporación en cada período es función del almacenamiento medio en el período y está dada como:

Tiempo t	Almacenamiento Medio \bar{S}_{klt}	Evaporación E_{klt}
1	7.5	0
1	10	0.5
1	12.5	1
2	7.5	0
2	10	0
2	12.5	0.5

La probabilidad de transición P_{ij}^t de los flujos de entrada al embalse están dadas como:

Tiempo t	Caudales		Probabilidad P_{ij}^t
	q_{it}	q_{jt+1}	
1	5	15	0.8
1	5	20	0.2
1	10	15	0.6
1	10	20	0.4
2	15	5	0.3
2	15	10	0.7
2	20	5	0.0
2	20	10	1.0

15. Se quiere definir la regla de operación de un embalse de tal manera que se maximice el valor esperado de la suma de los beneficios obtenidos en cada período de tiempo. Se considera sólo dos períodos de tiempo por año y los posibles valores de almacenamiento y aportes al embalse para cada uno de estos períodos son los siguientes:



VIII. BIBLIOGRAFIA

- Benjamín J.R. y C.A. Cornell, 1970. Probability, Statistics and decisions for Civil Engineering McGraw-Hill Book Co, New York.
- Butcher W.S. 1971. Stochastic Dynamic Programming for Optimum Reservoir operation, Water Res. Bull. Vol 7(1).
- Buras N. 1966. Dynamic Programming in Water Resources Development, en Advances in Hydrosience, Editado por V.T. Chow, Academic Press, New York.
- Butcher W.S. y J.W. Fordham, 1970. Optimum Reservoir Operation Using Stochastic Dynamic Programming, Publication 9, Center for Water Resources Research, Univ. of Nevada, Reno.
- Casa, J.G. 1976. Determinación de una Política Optima de Operación para el Embalse de Salvajina, Colombia, mediante el uso de Programación Dinámica Estocástica. Tesis, CIDIAT, Mérida - Venezuela.
- Chow V.T. 1971. Methodologies for Water Resources Planning, DDDP and MLOM (TLOM), Reporte N° 47, Water Resources Center, University of Illinois.
- Croley II, T.E. 1974. Sequential Stochastic Optimization for Reservoir Systems, Journal of the Hydr. Div. Vol 100(HY1).
- CVC, 1971. Contaminación de Corrientes, Hoya del río Cauca, Informe 71-8, Cali - Colombia.
- CVC, 1975a. Contaminación del río Cauca, Reglamentación y Control, Informe 75-17, Cali - Colombia.
- CVC, 1975b. Proyecto de Regulación del río Cauca, Informe Técnico, Ingetec-Inesco, Cali - Colombia.
- CVC, 1975C. Proyecto de Regulación del río Cauca, Evaluación Económica, Informe 75-15, Cali - Colombia.
- Dreyfus S.E. y A.M. Law. 1977. The Art and Theory of Dynamic Programming, Academic Press, New York.
- Fernández, I.I., 1975. Estudio Económico de Embalses Existentes para Control de Avenidas, Tesis, CIDIAT - Mérida - Venezuela.
- Gablinger M. y D.P., Loucks, 1970. Markov Models for Flow Regulation, Journal of Hydr. Div. ASCE, 96(HY2).

- Hall, W.A. y J.A. Dracup., 1970. Water Resources Systems Engineering, Mc-Graw-Hill Book, New York.
- Labadie, J.W. 1977. Notas de Clase Water Resources Systems Analysis, Curso CE546, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- Larson, R.E. 1968. State Increment Dynamic Programming, American Elsevier, New York.
- Linsley R.K., M.A. Kohler, y J.L. Paulhus, 1967. Hidrología para Ingenieros McGraw-Hill Co., Madrid.
- Loucks, D.P., Stedinger J.R. y Haith D.A. 1981. Water Resource Systems Planning and Analysis, Prentice-Hall, Inc. New Jersey.
- Loucks, D.P. 1976. Stochastic Models for Reservoir Design, in Stochastic Approaches to Water Resources, Vol 2, Editado por H.W. Shen. Fort Collins Colorado.
- M.O.P. 1973. Boletín Informativo de Operación Temporada 1972-1973, Caracas - Venezuela.
- Nemhausen G.L. 1966. Introduction to Dynamic Programming, John Wiley and Sons Inc. New York.
- Roefs T.G. y L.D. Bodín, 1970. Multireservoir Operation Studies, Water Resources Research, Vol 6(2).
- Símoes C., 1975. Aplicación de Técnicas de Optimización al Diseño de un Sistema Hidráulico de Propósito Múltiple. Tesis, CIDIAT, Mérida - Venezuela.
- Smith, R.A., y R.A. Amisial, 1982. Introducción a la Programación Dinámica, CIDIAT, Mérida - Venezuela.
- Young, G.K., Jr. 1967. Finding Reservoir Operating Rules, Journal of the Hydr. Div. ASCE, Vol 93(HY6).