

NOCIONES DE PROBABILIDAD CON APLICACIONES
EN LA INGENIERIA

ROGER A. AMISIAL

CIDINT

El Centro Interamericano de Desarrollo Integral de Aguas y Tierras (CIDIAT) fue establecido en el año 1964 mediante un acuerdo entre el Gobierno de Venezuela, la Universidad de Los Andes y la Organización de Estados Americanos (OEA).

Después de 10 años de operación y cumplido el proceso de transferencia, el CIDIAT pasó a ser un Centro Venezolano dirigido y administrado conjuntamente por el Gobierno de Venezuela y la Universidad de Los Andes.

Además, para sustentar las actividades del CIDIAT en países miembros de la OEA, se firmó un nuevo acuerdo que rige el denominado "Programa Interamericano" el cual se realiza conjuntamente por el CIDIAT como Institución Venezolana y la Secretaría General de la OEA.

NOCIONES DE PROBABILIDAD CON APLICACIONES EN LA INGENIERIA*

Series Misceláneas
Material de Enseñanza
Nº M - 2

ROGER A. AMISIAL

* Adaptado del libro "Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers" por Benjamín J. R. y C.A. Cornell. McGraw Hill Book Company 1970.

I. INTRODUCCION

En el proceso de tomar decisiones concernientes a los problemas de diseño, operación y manejo que confronta, el ingeniero elabora modelos que le permite analizar los sistemas bajo consideración. Debido a su gran atracción el enfoque puramente determinístico se utiliza en la elaboración de tales modelos. Sin embargo la gran mayoría de las decisiones se basan en estados futuros de la naturaleza cuyo conocimiento nunca se tiene a ciencia cierta. A lo mejor se puede hacer un pronóstico de estos estados asociados con su verosimilitud de ocurrencia. En otros términos la estimación de los estados futuros está incierta y el método lógico de tomar en cuenta esta incertidumbre es el enfoque probabilístico.

En lo que sigue presentaremos ciertos conceptos de la teoría de probabilidad que ilustraremos mediante ejemplos sacados de la ingeniería. Se ilustrará también aunque sumariamente la aplicación de la probabilidad al proceso de toma de decisión en ingeniería.

II. ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

A. EXPERIMENTOS

La teoría de la probabilidad trata de variables y eventos relacionados con un fenómeno aleatorio o con algún experimento. El término experimento se utiliza aquí en su sentido más general, pudiendo involucrar un ensayo susceptible de ser repetido, la observación de un fenómeno dinámico que no puede ser duplicado o una operación mental con el propósito de descubrir el estado de algún fenómeno desconocido o con el de probar un principio o una hipótesis. A continuación presentaremos algunos ejemplos de experimentos o fenómenos aleatorios.

Ejemplo 1. La observación de la demanda de agua de un cultivo du-

rante el mes en una región dada. Una de las variables aleatorias relacionadas con este fenómeno es el déficit agrícola o la cantidad de agua necesaria para que la evapotranspiración de la planta sea igual a su evapotranspiración potencial. Los valores posibles de esta variable pueden ser los resultados posibles del experimento.

Ejemplo 2. La observación de las crecidas ocurridas en un punto dado de un río. Los resultados posibles de este experimento pueden ser la esorrentía instantánea máximas anuales observadas.

Ejemplo 3. La observación del número de tormentas durante un intervalo dado de tiempo caídas sobre una región, constituye un experimento aleatorio. Si definimos una tormenta como un evento de precipitación con una duración de 24 horas y si el intervalo del tiempo considerado es de 5 días, los resultados posibles del experimento son 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Ejemplo 4. Un ingeniero quiere determinar el número de automóviles dirigiéndose hacia el sur, que llegan a un paro completo a las 12 m., debido a un semáforo ubicado en una esquina. Para ésto se traslada a mediodía, cada día, a la mencionada esquina y registra el número de vehículos parados antes de que la luz se vuelva verde. Si cada vehículo tiene una longitud de 5 m y la cuadra tiene 25 m de largo, el número máximo posible de vehículos en la cola es 5. Una variable asociado a este experimento puede ser el número total de vehículos parados. En este caso los resultados posibles del experimento son los números 0, 1, ..., 5.

Ejemplo 5. Supongamos que un ingeniero de fundaciones debe decidir de la longitud de las estacas que deben penetrar hasta el subsuelo rocoso. No existe registro de perforación en la zona. El ingeniero puede basarse en la geología de la zona, posibles cortes naturales y su experiencia para estimar a qué profundidad está la roca consolidada.

Ejemplo 6. Supongamos que en el ejemplo 3, el ingeniero está interesado tanto en las tormentas como en las avenidas encima de un caudal dado, por ejemplo, $1000 \text{ m}^3/\text{s}$. Si el interés está en avenidas de 24 horas de duración y durante intervalos de tiempo de 5 días los resultados del experimento son los pares de números de tormentas y avenidas.

B. ESPACIO MUESTRAL

Consideramos como resultado de un experimento o fenómeno la observación o valor de una variable asociada con el experimento. La colección de todos los resultados posibles de un experimento se llama un espacio muestral. En otros términos, el conjunto de posibles observaciones o valores de la variable aleatoria del fenómeno constituye el espacio muestral.

Un valor particular de la variable, o sea, un elemento del espacio muestral se llama punto muestral o muestra. De manera que el espacio muestral está constituido por todos los puntos muestrales.

Ejemplo 7. En el ejemplo 3, la variable asociada con el experimento es el número de tormentas. Como el número máximo de tormentas en 5 días es 5, existen 6 posibles valores de la variable o puntos muestrales. Designamos estos puntos muestrales por $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$, cada uno asociado con un número particular de tormentas. E_0 significa que se observa 0 tormenta, E_1 significa que se observa 1 tormenta, etc. El espacio muestral S constituido por las 6 posibles observaciones puede ser representado como

$$S = \{ E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \}$$

Una representación gráfica del espacio muestral S se presenta en la figura 1.

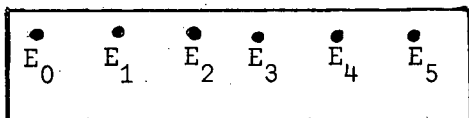


Figura 1. Un espacio muestral elemental S para tormentas de 24 horas de duración, observadas en intervalos fijos de 5 días.

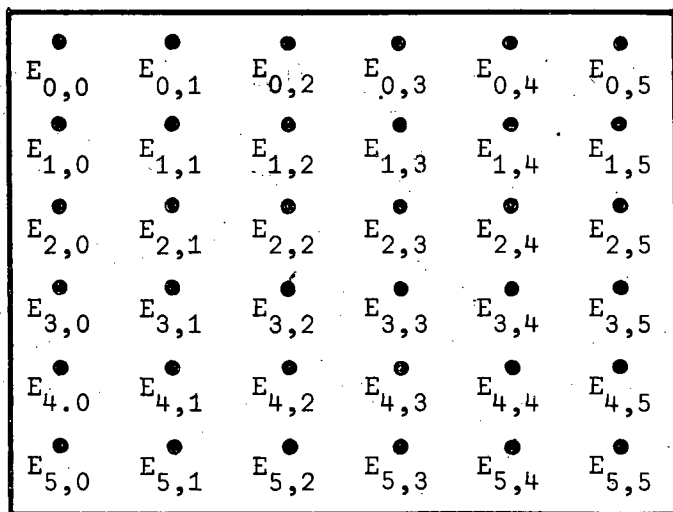


Figura 2. Representación gráfica de un espacio muestral para números de tormentas y avenidas. El punto muestral $E_{i,j}$ es asociado con el par ordenado (i,j) en que i es el número de tormentas y j el número de avenidas.

Ejemplo 8. En el ejemplo 6 se observan simultáneamente dos números: el número de tormentas y el número de avenidas. La variable asociada con el experimento es constituida por este par de números. Los valores posibles de la variable o puntuales muestrales pueden ser representados por $E_{0,0}, E_{0,1}, E_{0,2}, \dots, E_{0,5}$, cada uno asociado con un número de tormentas y un número de avenidas. $E_{0,0}$ significa que se observa 0 tormenta y 0 avenida, $E_{0,1}$ significa la observación de 0 tormenta y 1 avenida. etc. De una manera general el punto muestral $E_{i,j}$ está asociado con un par ordenado (i,j) donde i es el número de tormenta y j el número de avenidas tales que $i + j \leq 10$. El espacio muestral que se ilustra gráficamente en la figura 2, puede también ser dado como:

$$S = \{ E_{i,j} , i = 0,1,2,3,4,5, j = 0,1,2,3,4,5 \}$$

C. EVENTO ALEATORIO

Un evento aleatorio A es una colección de puntos muestrales de un experimento. En otros términos, un evento es un conjunto de valores posibles de la variable asociada con un experimento. Es también un subconjunto del espacio muestral.

Evento Elemental

Es un evento aleatorio constituido por un solo punto muestral. Dicho de otro modo un evento elemental está constituido por un solo valor de la variable.

Ejemplo 9. En el experimento del ejemplo 8 el evento aleatorio M constituido por el punto muestral $E_{1,2}$ es un evento elemental. Este evento puede enunciarse como sigue, Evento M: "Se observará 1 tormenta y 2 avenidas".

Evento Compuesto

Es un evento aleatorio formado por dos o más puntos muestrales o resultando de la combinación de eventos elementales.

Ejemplo 10. En el experimento del ejemplo 8 el evento N: "se observaron más de 3 avenidas", es un evento compuesto, puesto que está formado de los puntos muestrales $E_{i,j}$ tales que $i + j > 3$.

Ejemplo 11. En el experimento del ejemplo 8 el evento p: "Hay dos tormentas y 2 avenidas dado que hay 4 eventos de interés", es un evento compuesto que involucra más de un punto muestral.

Eventos Colectivamente Exhaustivos o Conjunto Exhaustivo de Eventos

Si, en cualquier observación, un evento cualquiera de un conjunto

de eventos debe ocurrir se dice que el conjunto de eventos es exhaustivo. También se dice que los eventos del conjunto son colectivamente exhaustivos.

D. COMPLEMENTO

El complemento A^C de un evento A consiste en los puntos muestrales del espacio muestral de un experimento, que no están incluidos en el evento A. El complemento A^C de un evento A es también un evento.

Ejemplo 12. El evento N del ejemplo 10: "se observaron más de 3 ~~avencidas~~ ~~avencidas~~" tiene como complemento el evento N^C : "Se observaron 3 o menos ~~avencidas~~ ~~avencidas~~".

Ejemplo 13. El evento M: " $E_{i,j}$ donde $i = 1$ y $j = 2$ ", tiene como complemento el evento M^C : " $E_{i,j}$ donde $i \neq 1$ y $j \neq 2$ ".

E. ESPACIO MUESTRAL UNIDIMENSIONAL

Si la variable asociada a un fenómeno o experimento tiene una sola dimensión, o sea, si cada valor de la variable involucra la observación de un solo número, entonces se dice que el espacio muestral es unidimensional.

Espacio Muestral Discreto

Una variable discreta puede tomar sólo valores discretos. El espacio muestral del experimento asociado a tal variable, tendrá sólo puntos muestrales discretos, y se dice discreto.

Ejemplo 14. El experimento del ejemplo 7 admite un espacio muestral discreto unidimensional puesto que está constituido por una colección de puntos muestrales discretos como se ilustra en la figura 1, y que un solo número está asociado con cada punto muestral.

Espacio Muestral Continuo

Una variable continua puede tomar cualquier valor en un intervalo finito o infinito. Un fenómeno o experimento cuyos resultados posibles se identifican con los valores de tal variable, tiene un espacio muestral continuo que se puede representar por un intervalo de la línea real.

Ejemplo 15. Consideramos el fenómeno del viento en una estación y observamos los valores de la variable constituida por la dirección del viento, expresada por el ángulo que forma con la dirección Norte. La dirección del viento es unidimensional puesto que en cada observación se mide un solo número que representa un ángulo. El espacio muestral P correspondiente es unidimensional y también continuo porque el ángulo puede tener cualquier valor comprendido en el intervalo finito 0 a 360 grados.

Ejemplo 16. Al fenómeno del viento le podemos asociar como variable la velocidad del viento. El espacio muestral unidimensional correspondiente es continuo puesto que la velocidad del viento puede tomar cualquier valor en el intervalo infinito 0 a ∞ .

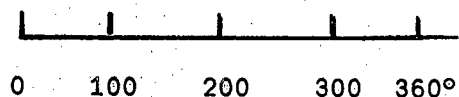


Figura 3. Espacio muestral continuo unidimensional para la dirección del viento. Es el intervalo finito 0 a 360° de la línea real.

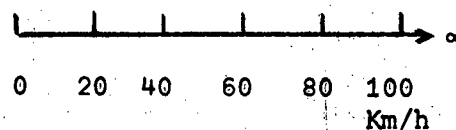


Figura 4. Espacio muestral continuo unidimensional para la velocidad del viento. Es el intervalo infinito 0 a ∞ de la línea real.

Extensión de la Noción de Espacio Muestral Discreto.

En la práctica se suele considerar muchas variables continuas como variables discretas por una o varias de las siguientes razones:

- (a) las observaciones o mediciones de la variable se hacen en puntos específicos del espacio o del tiempo;
- (b) los valores son redondeados, por ejemplo, los valores 240.3367 y 12.9524 son aproximados como 240.34 y 12.95;
- (c) el principio de la incertidumbre que limita la precisión de cualquier medición. Aún cuando se tiene la banda de un limnógrafo dando un registro continuo del nivel de agua en un punto de un río, en la determinación del nivel en un instante dado no se adoptará un número como 3.7820156 m sino 3.78 m debido a la falta de precisión en la medición.

Sin embargo se debe tener siempre en mente que estos argumentos no destruyen la naturaleza continua de la variable y del espacio muestral de un experimento en el que se observa la variable.

Ejemplo 17. En el fenómeno de la esorrentía la variable básica es correntía instantánea en un punto de un río es continua puesto que puede tomar cualquier valor entre 0 y ∞ . La variable esorrentía diaria derivada de la variable básica también es continua. Sin embargo en un registro de datos de esorrentía diaria encontramos sólo valores discretos como 20.16 y 20.17, desechando todos los valores del intervalo comprendidos entre estos valores. En otras palabras aún que la esorrentía diaria sea una variable inherente continua, el espacio muestral involucrando los valores de esta variable se trata como discreto.

F. RELACIONES ENTRE EVENTOS

Eventos Mutuamente Exclusivos o Disjuntos

Si dos eventos no tienen ningún punto muestral en común, se dice que son mutuamente exclusivos. En otros términos, dos eventos aleatorios que no pueden ocurrir simultáneamente son incompatibles ó mu-

tuamente exclusivos. La noción de eventos mutuamente exclusivos se extiende obviamente a más de dos eventos. Por definición los eventos elementales son mutuamente exclusivos.

Ejemplo 18. En la figura 5 se han identificado dos eventos mutuamente exclusivos M y N del espacio muestral del experimento del ejemplo 2. Evento M: "Se observaron menos de 2 tormentas". Evento N: "Se observaron más de dos tormentas". Si además consideramos el evento 0: "Se observaron 2 tormentas". Los eventos M, N y 0 son mutuamente exclusivos: no pueden ocurrir simultáneamente los tres, ni tomándolos de a dos.

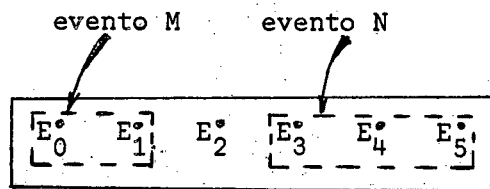


Figura 5

Ejemplo 19. El evento P: "Se observaron un número de tormentas igual o superior a 2", y el evento M son mutuamente exclusivos. Pero los eventos P y N son compatibles puesto que tienen en común los puntos muestrales E_3, E_4, E_5 , o sea, si ocurren E_3, E_4, E_5 los dos eventos P y N ocurren simultáneamente. Los eventos P y 0 no son mutuamente exclusivos porque tiene el punto muestral E_2 en común.

Intersección de Dos Eventos

Si dos eventos aleatorios no son mutuamente exclusivos, el conjunto de puntos muestrales que tienen en común se llama su intersección denotada por $A \cap B$. Si la intersección de 2 eventos P y 0 es equivalente a uno de los eventos, por ejemplo a 0, se dice que este evento está contenido en el otro. La intersección de dos eventos A y B, denotada por $A \cap B$, significa que "ocurren A y B simultáneamente".

Ejemplo 20. La intersección de los eventos $N = [\text{Se observaron más de dos eventos de interés}]$ y $P = [\text{Se observaron 2 o más tormentas}]$ es el evento

$$P \cap N = [\text{Se observaron más de 2 tormentas}]$$

conteniendo los puntos muestrales E_3 , E_4 y E_5 . Como la intersección $P \cap N$ es equivalente al evento N entonces N está contenido en P . Esta intersección se ilustra en la figura 6.

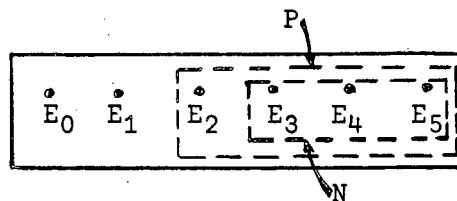


Figura 6. Intersección $P \cap N$.

Unión de Dos Eventos

La unión de dos eventos aleatorios A y B es el evento constituido por la colección de todos los puntos muestrales que ocurren por lo menos una vez en A y B . La unión de A y B que se denota por $A \cup B$, expresa el evento de que "ocurra A o B o ambos".

Ejemplo 21. En la figura 5 la unión de dos eventos

$$M = [E_0, E_1] \quad \text{y} \quad N = [E_3, E_4, E_5] \quad \text{es}$$

$$M \cup N = [E_0, E_1, E_3, E_4, E_5]$$

Ejemplo 22. En la figura 6 la unión de los eventos

$$P = [E_2, E_3, E_4, E_5]$$

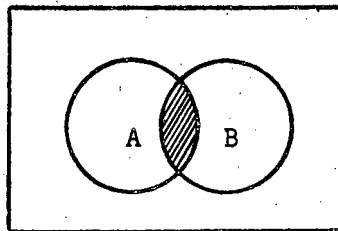
$$N = [E_3, E_4, E_5] \text{ es}$$

$$P \cup N = [E_2, E_3, E_4, E_5]$$

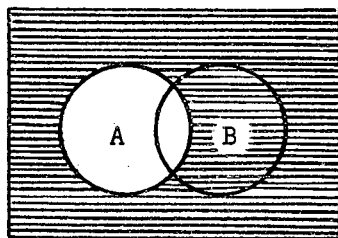
La unión $P \cup N$ es el evento P mismo.

Diagramas de Venn

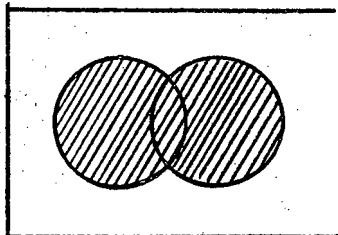
Los diagramas siguientes, que explotan la analogía entre la álgebra de eventos y las áreas en un plano, se llaman diagramas de Venn. Ayudan a visualizar las relaciones entre eventos.



$A \cap B$ sombreado



A^c sombreado



$A \cup B$ sombreado

Figura 7. Diagramas de Venn ilustrando relaciones entre eventos.

G. ESPACIO MUESTRAL MULTIDIMENSIONAL

Si una variable asociada a un fenómeno o experimento tiene varias dimensiones, o sea, si cada realización de cada punto muestral involucra la observación simultánea de varios números o componentes, entonces el espacio muestral del experimento se dice multidimensional. Un espacio muestral multidimensional puede ser discreto, continuo ó discreto-continuo, dependiendo de la naturaleza de los componentes de la variable.

Espacio Muestral Discreto, Continuo y Discreto-Continuo

Un espacio muestral multidimensional es discreto si todos los componentes de la variable asociada al fenómeno son constituidos exclusivamente por valores discretos. El espacio muestral multidimensional es continuo si todos los componentes de la variable son continuos. El espacio muestral multidimensional es discreto-continuo si algunos de los componentes son discretos y otros continuos. Se ilustrarán estos tipos de espacio muestral utilizando espacios muestrales bidimensionales.

Espacio Muestral Bidimensional

Es un espacio muestral multidimensional cuyos puntos muestrales son compuestos cada uno por un par de números. Los componentes del par ordenado pueden ser constituidos por dos variables continuas, dos variables discretas o una variable discreta y una continua dando así lugar a un espacio muestral bidimensional continuo, discreto o discreto-continuo.

Ejemplo 23. El espacio muestral de la figura B.2. es bidimensional discreto puesto que cada uno de sus puntos muestrales $E_{i,j}$ está formado por un par ordenado (i,j) donde i el número de componentes y j el número de ~~componentes~~ ~~variables~~ son variables discretas. Este espacio muestral puede plotearse en un sistema de coordenadas bidimensionales como se i -

lustra en la figura 8 donde se puede apreciar su naturaleza discreta.

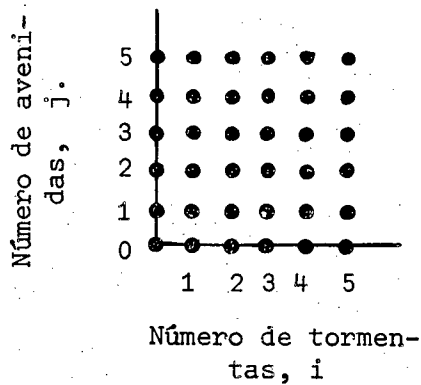


Figura 8.

Espacio muestral bidimensional discreto.

Ejemplo 24. Consideramos el fenómeno de viento y observamos a la vez su dirección y velocidad V . Siendo estos dos componentes continuos, el espacio muestral es bidimensional y continuo. En la figura 9 se ilustra este espacio muestral que es el área limitada por los ejes horizontal y vertical de coordenadas y la horizontal pasando por el punto $(0, 360)$. La velocidad del viento es continua pudiendo tomar cualquier valor en el intervalo 0 a ∞ , y la dirección del viento es también continua y toma cualquier valor del intervalo 0 a 360.

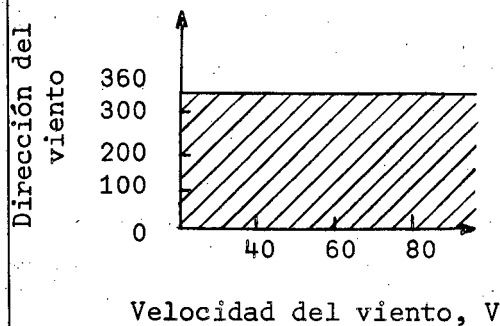
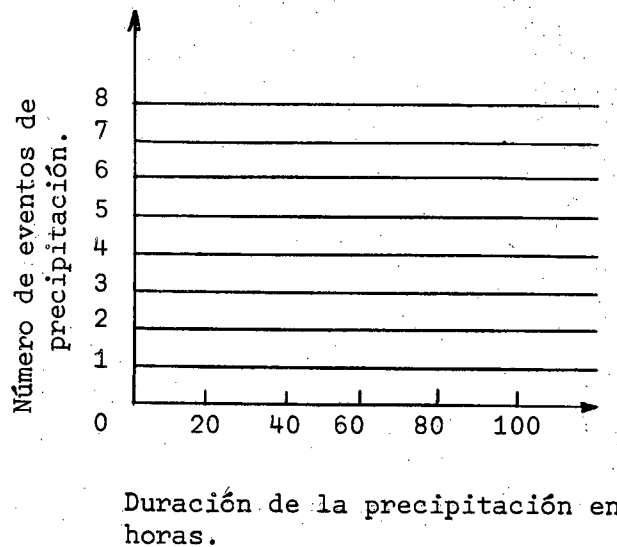


Figura 9.

Espacio muestral bidimensional continuo.

Ejemplo 25. Consideramos el experimento que consiste en la observación, durante intervalos de 30 días, del número y de la duración de eventos de precipitación con lámina superior a un nivel dado. El espacio muestral del experimento es bidimensional y discreto continuo

siendo que uno de los componentes, el número de eventos de precipitación, es discreto y el otro, la duración de la precipitación, es continuo. Este espacio muestral se grafica como las líneas horizontales de la figura 10. suponiendo un número máximo de 8 eventos de precipitación en 30 días.



H. ESPACIO MUESTRAL CONDICIONAL

Un evento aleatorio condicional se define como un evento aleatorio A a ocurrir dado que un otro evento B ha ocurrido y se denota por A/B . La colección de los resultados de un experimento dado que un evento ha ocurrido, constituye un espacio muestral condicional. El espacio muestral condicional contiene sólo los puntos muestrales en que ha ocurrido el evento B. Por eso es una parte reducida del espacio muestral del experimento primario, o del experimento sin la condición.

Ejemplo 26. Consideramos el experimento del ejemplo 23 dado que se observó exactamente una avenida. El espacio muestral condicional es el conjunto de puntos $E_{0,1}$, $E_{1,1}$, $E_{2,1}$, $E_{3,1}$, $E_{4,1}$ y se ilus -

tra en la figura 11.

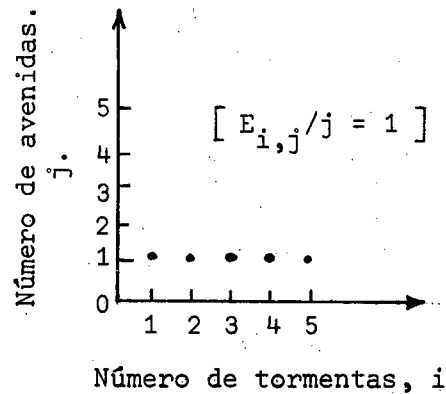


Figura 11. Espacio muestral discreto condicional del experimento de la observación de tormentas y avenidas dado que se observó exactamente una avenida.

Ejemplo 27. Consideramos el experimento del ejemplo 23 dado que se observaron 3 o más avenidas. Este espacio muestral condicional se ilustra en la figura 12 y tiene seis puntos muestrales.

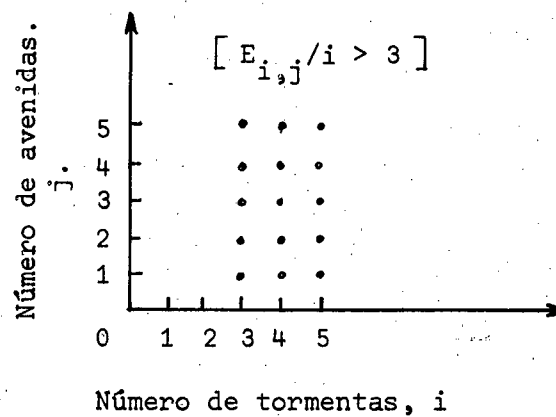
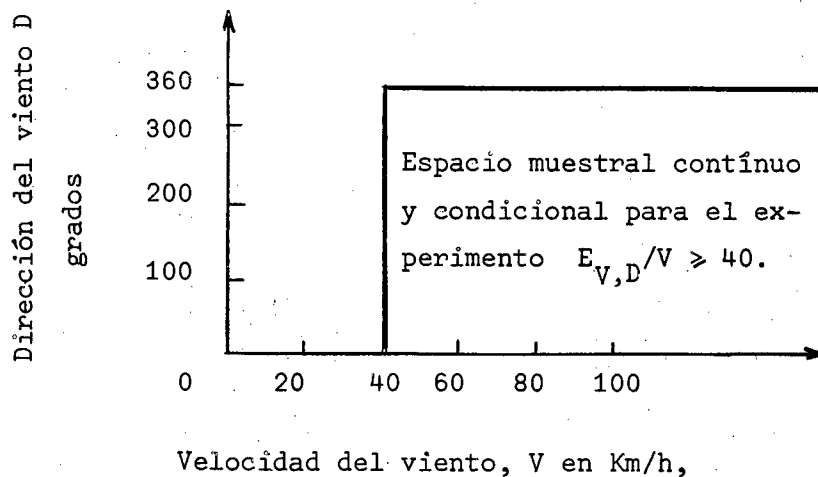


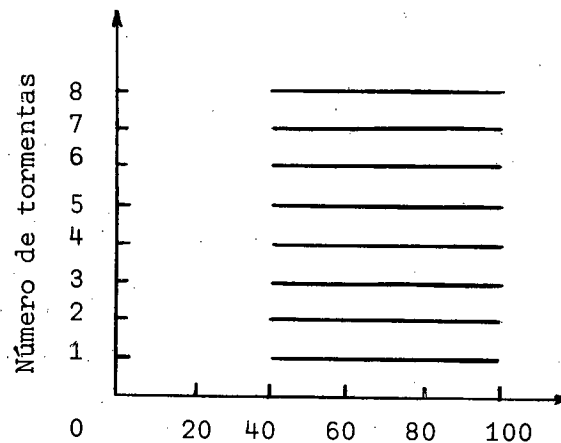
Figura 12. Espacio muestral discreto condicional a la observación de 3 o más tormentas.

Ejemplo 28. En el experimento del viento del ejemplo 24 consideramos el experimento dado que la velocidad del viento es igual o superior a 40 km/h. El espacio muestral correspondiente es continuo condicional y se ilustra en la figura 13. Es el área limitada por el eje V, la horizontal $D = 360$ y la vertical $V = 40$.



Ejemplo 29. Consideramos el experimento del ejemplo 25, dado que tenemos interés exclusivamente en las tormentas cuya duración está comprendida entre 40 y 100 horas. El espacio muestral condicional es bidimensional discreto-continuo y se grafica como los segmentos de líneas horizontales de la figura 14.

Figura 14.
Espacio bidimensional,
condicional y discreto
continuo.



N.B. El ingeniero puede elegir de considerar como primario un espacio muestral condicional, dependiendo del criterio que ha elegido y de su conveniencia,

III. MEDIDA DE LA PROBABILIDAD

Si a cada punto muestral o evento elemental de un espacio muestral asignamos un número de acuerdo a ciertos axiomas de probabilidad, llamaremos este número una medida de probabilidad. Las probabilidades de eventos compuestos y más complejos se calculan a partir de las probabilidades de los eventos elementales.

La actual teoría matemática de la probabilidad se basa en el axioma de que las probabilidades o medidas de probabilidad de los eventos elementales son conocidas. A la teoría de la probabilidad no le importa cómo las medidas de probabilidad se obtienen ni lo que significan. Simplemente nos dice cómo usarlas de una manera consecuente en la derivación de la probabilidad de eventos compuestos. Sin embargo, conviene que el ingeniero que tiene que asignar probabilidades sepa lo que significan puesto que sirvan de datos de entrada a cualquier modelo o análisis probabilístico.

Las medidas de probabilidad se asignan o se derivan, bien sea por derivaciones lógicas o por métodos experimentales o por métodos subjetivos. Según se utiliza un método o el otro se habla del enfoque clásico de interpretación de las probabilidades, del enfoque de la frecuencia relativa observada o del enfoque subjetivo de pesos relativos.

A. ENFOQUE CLASICO DE LA PROBABILIDAD

En este método la probabilidad de los eventos elementales se obtiene por deducción lógica. La probabilidad p se define como la ra -

zón de los eventos favorables m al número total de eventos n , o sea, $p = \frac{m}{n}$. El enfoque clásico se basa en el concepto de eventos elementales equiprobables o de igual chance de ocurrencia. En particular si el espacio muestral es equiprobable y tiene n puntos muestrales o eventos elementales entonces la probabilidad de cada punto es $1/n$.

La expresión "al azar" se usa solamente respecto a un espacio muestral equiprobable. La expresión "escoger un punto al azar de un espacio muestral S " significa que S es espacio muestral equiprobable, o sea, que cada punto muestral de S tiene la misma probabilidad.

Ejemplo 30. El espacio muestral S del experimento consistiendo en lanzar una moneda, contiene dos puntos muestrales, o sea:

$$S = \{E_1, E_2\}$$

donde

$$E_1 = [\text{aparece cara}]$$

$$E_2 = [\text{aparece sello}]$$

Si la moneda es normal y hecha de una sustancia homogénea, hay igual chance de que aparece cara y sello. En otros términos, se puede escribir:

$$P(E_1) = 1/2$$

$$P(E_2) = 1/2$$

Ejemplo 31. En el experimento consistiendo en sacar al azar una carta de una baraja corriente de 52 cartas, el espacio muestral se compone de 52 puntos muestrales.

$$S = \{E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_{52}\}$$

donde

$$E_i = \left[\begin{array}{l} \text{se saca una carta particular, el as de diamante, por} \\ \text{ejemplo} \end{array} \right]$$

Puesto que hay 52 cartas con igual chance, cada una de ser sacada, la probabilidad de sacar una carta particular es $1/52$, o sea:

$$P(E_i) = 1/52$$

B. ENFOQUE DE LA FRECUENCIA RELATIVA OBSERVADA

El enfoque de la frecuencia relativa observada permite determinar la probabilidad por experimentación u observación. Si se puede repetir un experimento un número n de veces, y si se cuenta el número de veces, m , en que ocurre un evento elemental, entonces a la razón m/n se le llama "la frecuencia relativa observada F del evento elemental," o sea:

$$F = \frac{m}{n}$$

El valor de F es cerca de la probabilidad exacta p del evento elemental. Si se repite el experimento un número grande de veces, o sea, si $n \rightarrow \infty$ entonces $F \rightarrow p$. Sin embargo en las ciencias físicas la probabilidad exacta nunca se conoce y se suele aproximarla por la frecuencia relativa observada.

Ejemplo 32. Se repite 100 veces el experimento de lanzar una moneda normal, cuyo espacio muestral S es

$$S = \{E_1, E_2\}$$

donde

$$E_1 = \left[\text{aparece cara} \right]$$

$$E_2 = [\text{aparece sello}]$$

Al contar el número de ocurrencias de cada evento, se obtiene $m_1 = 49$ y $m_2 = 51$ para E_1 y E_2 respectivamente. Las frecuencias relativas observadas de E_1 y E_2 son:

$$F_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{49}{100} = .49$$

$$F_2 = \frac{m_2}{n} = \frac{51}{100} = .51$$

Estos valores son muy cerca del valor de la probabilidad exacta de 0.50 y se aproximarán más de 0.50 a medida que n se hace más grande. Aproximando la probabilidad por la frecuencia relativa observada se obtendría:

$$P(E_1) = 0.49$$

$$P(E_2) = 0.51$$

C. ENFOQUE SUBJETIVO DEL CONJUNTO DE PESOS RELATIVOS

El enfoque clásico y el de la frecuencia relativa no son de uso general. El primero se limita al caso de los espacios muestrales equiprobables, mientras que el segundo requiere situaciones en que se puede realizar y repetir un experimento. Existen situaciones en las que los eventos elementales no son equiprobables y la realización de un experimento es imposible o carece de sentido. En tales situaciones el ingeniero puede asignar a los resultados posibles de un experimento, probabilidades que constituyen un conjunto de pesos relativos expresando su apreciación individual de la verosimilitud relativa de los resultados. En este sentido, la probabilidad de un evento puede concebirse como una medida subjetiva del grado de credibilidad

que un ingeniero tiene en un juicio o un pronóstico. Esta interpretación de la probabilidad, como un concepto intelectual más que una propiedad física, al igual que los dos enfoques, puede también servir como una base a la teoría moderna de probabilidad, siempre que satisfagan los axiomas de probabilidad. Situaciones en que se aplica este enfoque son en general en las que hay incertidumbre en el estado de la naturaleza o que existen condiciones desconocidas de ella.

Familiarmente, la probabilidad subjetiva de un evento se expresa como "tendencia a favor o contra su ocurrencia". Si p es esta probabilidad de un evento, la tendencia a favor de su ocurrencia es m_1 a m_2 y la tendencia contra su ocurrencia es m_2 a m_1 donde $p = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

Ejemplo 33. Para un proyecto de puente, un ingeniero de fundaciones necesita decidir si el suelo a 10 metros debajo de la fundación proyectada del puente, es arcilla. El espacio muestral S del experimento tiene dos puntos muestrales, o sea:

$$S = \{E_1, E_2\}$$

donde:

$E_1 =$ [el suelo a 10 m. debajo de la fundación es arcilla]

$E_2 =$ [el suelo a 10 m. debajo de la fundación no es arcilla]

Basándose en su experiencia en situaciones similares, su conocimiento de la geología local y el sabor de un puñado de material a la superficie, el ingeniero puede expresar la tendencia a favor de cada uno de los eventos. Al expresar la tendencia a favor de E_1 es 1 a 3 significa que la probabilidad del evento es

$$P(E_1) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} = 0.25$$

De la proposición del ingeniero se desprende la tendencia contra E_1 es 3 a 1, y también que la probabilidad de E_2 es:

$$P(E_2) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Ejemplo 34. Supongamos que en el experimento del ejemplo 4, no existe todavía la esquina ni tampoco la cuadra. Basándose en la tendencia del desarrollo urbano el ingeniero puede estimar como cinco el número máximo de vehículos que pueden parar en el semáforo proyectado. De modo que el espacio muestral de su experimento es:

$$S = \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$$

donde

$$E_i = [\text{se observó } i \text{ vehículos parados}]$$

Al hacer ciertas suposiciones acerca del comportamiento de los vehículos y conociendo algo acerca del flujo promedio del tráfico, es decir, simulando el mecanismo básico de los eventos, el ingeniero puede asignar o calcular probabilidad para cada punto muestral del experimento sin nunca hacer observación en la esquina. Sin embargo para que estas medidas asignadas sirvan de base a la teoría de probabili-
dad es imprescindible que satisfagan ciertas condiciones o axiomas de probabilidad. Un posible conjunto de pesos relativos que podría asignar el ingeniero es:

$$P(E_0) = 0.10$$

$$P(E_1) = 0.20$$

$$P(E_2) = 0.30$$

$$P(E_3) = 0.25$$

$$P(E_4) = 0.10$$

$$P(E_5) = 0.05$$

D. AXIOMAS DE PROBABILIDAD

No importa cuál se utiliza de los tres enfoques de interpretación y asignación de las medidas de probabilidad, estas últimas deben satisfacen tres axiomas de probabilidad para asegurar la validez matemática de cualquier resultado derivado de la aplicación correcta de la teoría axiomática de probabilidad.

Las siguientes condiciones deben cumplirse por las probabilidades asignadas a los eventos de un espacio muestral.

AXIOMA I. Para todo evento A se tiene

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

donde $P(A)$ denota la probabilidad del evento A.

AXIOMA II. Si S es el espacio muestral, o sea, si S es el evento asociado a todos los puntos muestrales entonces:

$$P(S) = 1$$

AXIOMA III. Si A y B son dos eventos mutuamente exclusivos entonces la probabilidad de la unión $A \cup B$ es la suma de las probabilidades de estos eventos, o sea:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Puesto que el espacio muestral S es la unión de todos los eventos elementales, E_i los cuales son mutuamente exclusivos, a axioma III puede escribirse como :

$$\sum_{\text{todos } i} P(E_i) = 1$$

LOS AXIOMAS Y LOS ENFOQUES DE PROBABILIDAD

Axiomas I y II

Los axiomas I y II son simplemente convenciones convenientes. Requieren que las probabilidades sean números positivos y que la suma de las probabilidades de todos los eventos elementales (o de una serie de eventos mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos del espacio muestral) será normalizado a 1. Estos dos axiomas son restricciones naturales sobre las probabilidades y que surgen del enfoque clásico y de la frecuencia relativa.

En el enfoque clásico se asigna a cada uno de los k eventos elementales equiprobables la probabilidad $\frac{1}{k}$ que está siempre entre cero y uno. Además la probabilidad del espacio muestral o suma de las probabilidades de los k eventos es necesariamente igual a uno, o sea

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} = 1$$

En el enfoque de la frecuencia relativa observada si existen k posibles resultados o eventos E_i de un experimento y si el experimento se repite n veces las frecuencias relativas $F_1, F_2, \dots, F_k$, asociada con los eventos $E_1, E_2, \dots, E_k$ respectivamente, son

$$F_1 = \frac{m_1}{n}$$

$$F_2 = \frac{m_2}{n}$$

$$\vdots$$

$$F_k = \frac{m_k}{n}$$

donde $m_1, m_2, \dots, m_k$ son los números de veces que se observó en los

eventos $E_1, E_2, \dots, E_k$ respectivamente. Puesto que

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

cada frecuencia F_i satisface axioma I y su suma satisface axioma II, siendo

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \dots + \frac{m_k}{n} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{n} = 1$$

Respecto al enfoque subjetivo de pesos relativos, los axiomas I y II requieren que, después de asignar un conjunto de pesos relativos a los eventos elementales, se normalice estos pesos relativos dividiendo cada uno por el total.

Axioma III

Este axioma requiere que las probabilidades sean asignadas a los eventos de tal modo que la probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente exclusivos sea igual a la suma de las probabilidades de los eventos individuales. No se puede violar este axioma si la asignación original de probabilidades se ha hecho a una serie de eventos mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos del espacio muestral.

El método de asignación de probabilidades del enfoque clásico y del de la frecuencia relativa observada, asegura que la serie de eventos involucrados es colectivamente exhaustiva del espacio muestral. Sin embargo el ingeniero debe asegurarse de que los eventos bajo consideración sean mutuamente exclusivos. Esta condición se cumple cuando se definen los resultados posibles de un experimento de modo que no haya entrometimiento de uno en el otro y sean completamente distintos el uno del otro.

En el enfoque subjetivo de asignación de probabilidad el ingeniero

debe asegurarse de que los resultados posibles del experimento no se superpongan el uno al otro. También debe asegurarse de que los eventos a que asigna probabilidad sean colectivamente exhaustivos del espacio muestral. El ingeniero actuaría de una manera inconsecuente si se piensa que la verosimilitud de la unión de un par de resultados ó eventos disjuntos puede ser diferente de la suma de las verosimilitudes individuales.

Ejemplo 35. Si en el ejemplo 33 el ingeniero de fundaciones decide que "la tendencia a favor de la ocurrencia de arcilla a 10 m. debajo de la fundación es 1 a 3", "la tendencia a favor de la ocurrencia de arena es 1 a 3" y que si el suelo no es arcilla ni arena, debe ser una roca consolidada. Estas suposiciones implican que atribuye a la ocurrencia de arcilla un peso relativo de 1 y a los otros resultados posibles un peso relativo de 3. Los posibles resultados remanentes son arena y roca consolidada. Puesto que a la arena le asignó un peso relativo de 1, el peso restante, o sea $3-1 = 2$ debe atribuirse a la roca consolidada. Sean los eventos:

$$E_1 = [\text{el suelo a 10 m. debajo de la fundación es arcilla}]$$

$$E_2 = [\text{el suelo a 10 m. debajo de la fundación es arena}]$$

$$E_3 = [\text{el suelo a 10 m. debajo de la fundación es roca consolidada}]$$

Entonces el espacio muestral es

$$S = \{E_1, E_2, E_3\} \quad y$$

$$P(E_1) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$P(E_2) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$P(E_3) = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Hacemos hincapié en que esta asignación de probabilidades es aceptable puesto que cumple con los tres axiomas de probabilidad. En primer lugar la probabilidad de cada evento elemental E_i es un número positivo entre 0 y 1, o sea

$$0 \leq P(E_i) \leq 1$$

Puesto que los tres eventos E_1, E_2, E_3 por sus definiciones son disjuntas y que se considerarán todos en las asignaciones de probabilidades, tenemos:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = 0.25 + 0.25 = 0.50$$

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) = 0.25 + 0.50 = 0.75$$

$$P(E_2 \cup E_3) = P(E_2) + P(E_3) = 0.25 + 0.50 = 0.75$$

También

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(S) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 0.25 + 0.25 + 0.50 = 1$$

Validez de los Análisis Probabilísticos

~~Insistimos~~ en el hecho de que la asignación de probabilidades a eventos aleatorios puede hacerse mediante cualquiera de los tres enfoques de probabilidad expuestos arriba. Cuando las probabilidades cumplen con los tres axiomas de probabilidad, el ingeniero puede estar seguro de que los resultados que obtiene de la aplicación de la teoría de probabilidad son matemáticamente válidos.

Sin embargo debemos enfatizar que el significado físico y práctico de los resultados de cualquier análisis probabilístico no pueden ser mejores que los datos de entrada, o sea, el conjunto original de medidas de probabilidad asignadas y sobre el cual se fundamenta el análisis.

IV. PROBABILIDADES ELEMENTALES DE EVENTOS COMPUESTOS

De las relaciones entre eventos y de los axiomas se desprenden ciertas relaciones entre probabilidades de eventos. Por otra parte es posible definir relaciones adicionales entre eventos en términos de relaciones entre sus probabilidades.

A. PROBABILIDAD DE UN EVENTO

Puesto que un evento está compuesto de uno o varios eventos elementales o puntos muestrales y que estos eventos elementales son mutuamente exclusivos por la construcción del espacio muestral, la probabilidad de cualquier evento es la suma de las probabilidades asignadas a los eventos elementales que contiene.

Si un evento contiene todos los puntos muestrales con probabilidades diferentes de cero, su probabilidad es 1 y existe la certeza de que ocurra tal evento. Familiarmente se dice que es un evento cierto.

Si un evento no puede ocurrir como resultado posible de un experimento, se dice que es un evento imposible, entonces las probabilidades de todos los puntos muestrales asociados con él, son cero.

Si A^c es el complemento de un evento, entonces:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$$

B. PROBABILIDAD DE LA UNION DE EVENTOS

Se puede demostrar que la probabilidad de un evento constituido por la unión de dos eventos A y B, disjuntos o no, es igual a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En otras palabras, la probabilidad de ocurrencia de A o B o ambos es la suma de las probabilidades individuales de A y B, menos la probabilidad de su intersección u ocurrencia simultánea.

Si A y B son disjuntos o mutuamente exclusivos entonces:

$$P(A \cap B) = 0$$

Entonces la fórmula de la unión de eventos se reduce a la del axioma III.

En el caso de tres eventos, A, B y C se obtiene:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo 36. Consideramos el diseño de un sistema de utilidades subterráneo para un parque industrial contando con seis sitios similares para edificios.

Los sitios no han sido todavía arrendados de modo que se ignora aun la naturaleza de las instalaciones o industria para cada uno. Si el ingeniero provee capacidades de agua y energía en exceso de la demanda realmente encontrada, habrá malgastado el capital de su cliente. Si, por otra parte, las facilidades son inadecuadas, se harán necesarios cambios costosos.

Para simplicidad, consideramos cualquier sitio particular y supongamos que la energía eléctrica requerida por la industria será 5 o 10 unidades, mientras que la capacidad requerida de agua será 1 o 2 unidades.

Entonces el espacio muestral describiendo el experimento asociado

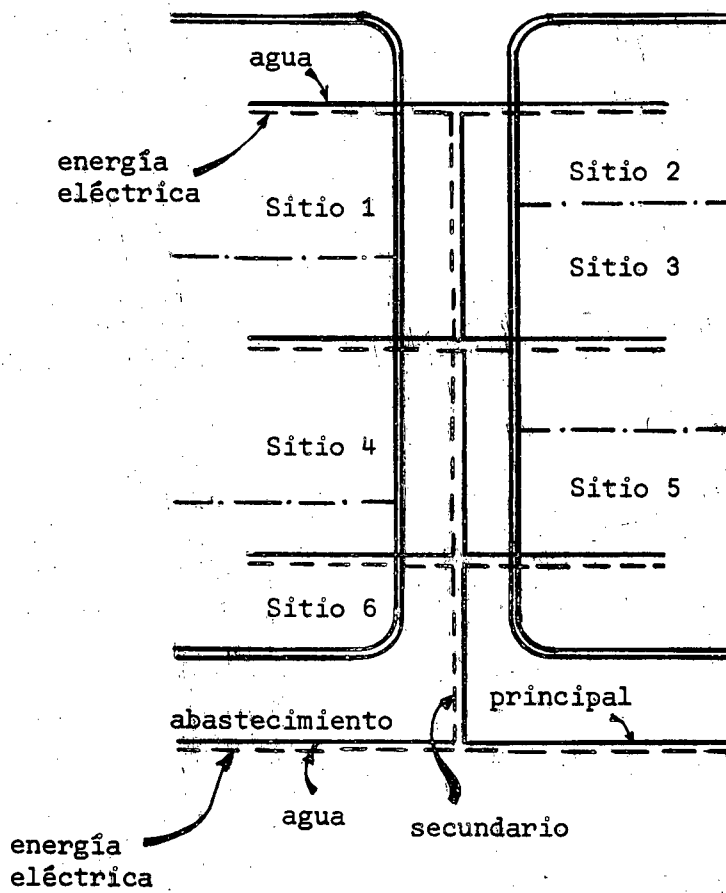


Fig.15. Ilustración de las utilidades de un parque industrial.

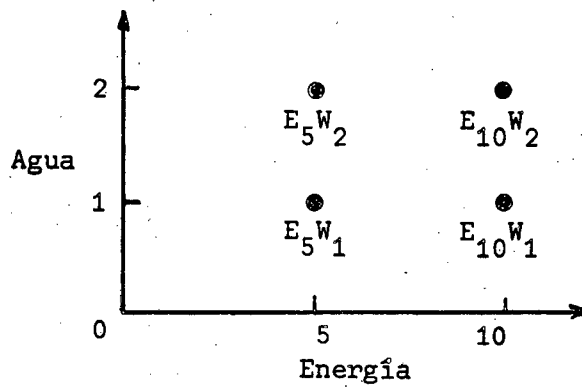


Fig.16. Espacio muestral de la demanda de utilidades

con un solo sitio consiste en 4 puntos muestrales (5,1), (5,2), (10,1) ó (10,2). A cada uno de estos puntos muestrales está asociado un evento elemental $E_i W_j$

$$E_i W_j = \begin{array}{|l} \text{la demanda de energía es de } i \text{ unidades y la de agua} \\ \text{de } j \text{ unidades.} \end{array}$$

El espacio muestral es:

$$S = \{E_5 W_1, E_5 W_2, E_{10}, W_1, E_{10}, W_2\}$$

En una entrevista con el ingeniero el cliente hizo una serie de proposiciones acerca de tendencia a favor y pesos relativos de los cuales el ingeniero pudo asignar el conjunto de probabilidades de la tabla 1.

Utilizando lo expuesto arriba y la tabla 1 podemos calcular la probabilidad de otros eventos.

Tabla 1.

Punto muestral	Evento elemento	Probabilidad <u>a</u> signada por el dueño
(5,1)	$E_5 W_1$	0,1
(5,2)	$E_5 W_2$	0,2
(10,1)	$E_{10} W_1$	0,1
(10,2)	$E_{10} W_2$	0,6

Calcularemos la probabilidad de los eventos W_j y E_i donde

$$E_i = \begin{array}{|l} \text{la demanda de energía es de } i \text{ unidades} \end{array}$$

$$W_j = \begin{array}{|l} \text{la demanda de agua es de } j \text{ unidades} \end{array}$$

La probabilidad de W_2 es la suma de las probabilidades de los eventos elementales, mutuamente exclusivos, con los que el evento W_2 está asociado. En otros términos:

$$P(W_2) = P(E_5 W_2) + P(E_{10} W_2) = 0.2 + 0.6 = 0.8$$

$$P(W_1) = P(E_5 W_1) + P(E_{10} W_1) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

De una manera similar calculamos:

$$P(E_{10}) = P(E_{10} W_1) + P(E_{10} W_2) = 0.1 + 0.6 = 0.7$$

$$P(E_5) = P(E_5 W_1) + P(E_5 W_2) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

Podemos también calcular la probabilidad de la unión de los eventos. Por ejemplo:

$$P(W_2 \cup E_{10}) = P(W_2) + P(E_{10}) - P(W_2 \cap E_{10})$$

Puesto que la intersección $W_2 \cap E_{10}$ es el evento $E_{10} W_2$ tenemos:

$$P(W_2 \cup E_{10}) = 0.8 + 0.7 - 0.6 = 0.9$$

Hubiéramos obtenido el mismo resultado si partiendo de los eventos elementales o espacio original, habíamos sumado las probabilidades de aquellos eventos elementales asociados a $W_2 \cup E_{10}$. En otros términos podemos también calcular $P(W_2 \cup E_{10})$ sumando las probabilidades de los eventos elementales en que se observarán 2 unidades de agua o 10 unidades de energía, o ambos, o sea:

$$P(W_2 \cup E_{10}) = P(E_5 W_2) + P(E_{10} W_2) + P(E_{10} W_1) + P(E_5 W_1) =$$

$$P(W_2 \cup E_{10}) = 0.2 + 0.6 + 0.1 + 0.0 = 0.9$$

C. PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad condicional del evento A dado que el evento B ha ocurrido se denota por $P(A/B)$ y se define como la razón de la probabilidad de la intersección de A y B a la probabilidad del evento B.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilidad condicional $P(A/B)$ no es definida para $P(B) = 0$.

La probabilidad condicional $P(A/B)$ puede ser interpretada como la probabilidad de que A ocurra dado que B ha ocurrido. La condición de que B ha ocurrido reduce los resultados al conjunto o serie de puntos muestrales en B, o sea, el espacio muestral condicional, pero no podrá cambiar las verosimilitudes relativas de los eventos elementales en B. Si la probabilidad de aquellos puntos en B que son también en A, o sea, si $P(A \cap B)$ es renormalizada por el factor $P(B)$ para operar dentro de este espacio muestral reducido, el resultado es la razón $P(A \cap B)/P(B)$ o la probabilidad de A dado B.

En aplicaciones, a menudo se desea calcular $P(A \cap B)$ a partir de $P(B)$ y $P(A/B)$. Entonces se da la formula de la siguiente forma:

$$P(A \cap B) = P(A/B) P(B) = P(B/A) P(A)$$

Cuando son involucrados tres eventos, se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A/B \cap C) P(B/C) P(C)$$

para n eventos

$$P(A \cap B \cap C \dots N) = P(A/B \cap C \dots N) P(B/A \dots N)$$

$$P(C/D \dots N) \dots P(M/N) P(N)$$

Ejemplo 37. Supongamos que en el ejemplo 36, el ingeniero quiere de terminar la probabilidad de que un sitio con una demanda de energía de 10 unidades (E_{10}) requeriría también una demanda de agua de 2 unidades (W_2).

Tenemos

$$P(W_2/E_{10}) = \frac{P(W_2 \cap E_{10})}{P(E_{10})} = \frac{0.6}{0.7} = 0.87$$

D. INDEPENDENCIA DE EVENTOS

Dos eventos A y B son independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

o sea que la independencia probabilística o estocástica de dos eventos A y B implica que

$$P(A/B) = P(A)$$

En otros términos la probabilidad de A es independiente de la ocurrencia de B y viceversa.

En la teoría de probabilidad se demuestra que dos eventos A y B son independientes calculando $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$ y mostrando que:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

En la práctica ingenieril, se basa generalmente en el conocimiento de la situación física para declarar que se supondrá que dos eventos

serán (o no serán) asumidos independientes. Mediante la asunción de la independencia se calcula uno de los tres términos de la ecuación.

E. REGLA DE MULTIPLICACION

De una manera general, los eventos A, B, C..., N son mutuamente independientes si y solo si

$$P(A \cap B \cap C \dots N) = P(A) P(B) P(C) \dots P(N)$$

Se conoce este teorema como la regla de multiplicación. ~~Supongamos que~~ ^{Supongamos que} los eventos son independientes, entonces la probabilidad de su ocurrencia simultánea es igual al producto de las probabilidades individuales de ocurrencia.

Ejemplo 38. En el ejemplo 36 supongamos que el ingeniero no satisfecho con la manera arbitraria de su cliente de asignar probabilidades, ha muestreado un número de firmas en parques industriales similares. Concluyó que no existe ninguna relación aparente entre demandas de energía y de agua. Por ejemplo que una demanda alta de energía no coincide con una demanda alta de agua.

En base a esta información, el ingeniero asigna las siguientes probabilidades.

Evento	Estimación de probabilidad del ingeniero
Demanda de energía	
E_5	0.2
E_{10}	<u>0.8</u>
	1.0
Demanda de agua	
W_1	0.3
W_2	<u>0.7</u>
	1.0

Adoptando la asunción de la independencia estocástica de las demandas de agua y energía, el ingeniero puede calcular las siguientes probabilidades.

$$P(E_5 \cap W_1) = P(E_5 W_1) = P(E_5) P(W_1) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$$

$$P(E_5 \cap W_2) = P(E_5 W_2) = P(E_5) P(W_2) = 0.2 \times 0.7 = 0.14$$

$$P(E_{10} \cap W_1) = P(E_{10} W_1) = P(E_{10}) P(W_1) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$$

$$P(E_{10} \cap W_2) = P(E_{10} W_2) = P(E_{10}) P(W_2) = 0.8 \times 0.7 = 0.56$$

F. DECISIONES BAJO RIESGO

Demostraremos la utilidad del análisis probabilístico cuando el ingeniero debe tomar decisiones frente al riesgo. A ~~este nivel~~ presentaremos sólo rudimentos del análisis de decisión.

Ejemplo 39. En el ejemplo 38 de las utilidades consideramos para simplicidad, únicamente la demanda de agua e investigamos la capacidad de diseño de una tubería secundaria abasteciendo un par de sitios similares en el parque industrial. Las instalaciones en los dos sitios representan dos ensayos repetidos del experimento descrito más arriba. Denotaremos por

$$W_1 W_2 = \text{[la demanda de la industria del primer sitio es una unidad y la del segundo sitio 2 unidades]}$$

Entonces si asumimos independencia estocástica de las demandas en los dos sitios, podemos calcular las siguientes probabilidades a partir de la asignación de probabilidades hecha por el ingeniero, o sea:

$$P(W_1 W_1) = P(W_1) P(W_1) = (0.30)(0.30) = 0.09$$

$$P(W_1 W_2) = P(W_1) P(W_2) = (0.3)(0.7) = 0.21$$

$$P(W_2 W_1) = P(W_2) P(W_1) = (0.7)(0.3) = 0.21$$

$$P(W_2 W_2) = P(W_2) P(W_2) = (0.7)(0.7) = \underline{0.49}$$

1.00

Haciendo notar que los eventos $W_1 W_2$ y $W_2 W_1$ conducen a la misma demanda total de 3 unidades de agua, podemos definir los nuevos eventos siguientes sobre el espacio muestral definido. Sean los eventos:

D_2 = [la demanda total de agua de los 2 sitios es de 2 unidades]

D_3 = [la demanda total de agua de los 2 sitios es de 3 unidades]

D_4 = [la demanda total de agua de los 2 sitios es de 4 unidades]

Entonces:

$$P(D_2) = P(W_1 W_1) = 0.09$$

$$P(D_3) = P(W_1 W_2) + P(W_2 W_1) = 0.21 + 0.21 = 0.42$$

$$P(D_4) = P(W_2 W_2) = 0.49$$

La asunción de la independencia estocástica implica que el ingeniero piensa que no hay razón de alterar la probabilidad de la demanda de la industria del segundo sitio si sabía la del primer sitio. En otros términos el conocimiento de la demanda del primer sitio da al ingeniero ninguna información nueva acerca de la demanda del segundo sitio. Este caso podría presentarse si el directivo de la segunda industria escoge su sitio sin que le importe la naturaleza de su vecino. Si las demandas de los seis sitios son mutuamente independientes, la probabilidad de que todos los sitios tengan una demanda de una unidad de agua es:

$$P(W_1 W_1 W_1 W_1 W_1 W_1) = (0.3)^6 = 0.0007$$

A continuación ilustraremos como esta información puede utilizarse para determinar la mejor selección de la capacidad de la tubería secundaria.

Para tal ilustración necesitamos los costos relativos y las pérdidas asociadas con posibles inadecuaciones. Supongamos que el ingeniero recopila las siguientes tablas de costos:

Costos Iniciales:

Capacidad 3 unidades de agua: \$ 500 + costo de dos unidades

Capacidad 4 unidades de agua: \$ 1500 + costo de dos unidades

Costos Asociados con Posible Expansión Tardiva

Dos unidades a tres unidades: \$ 1200

Tres unidades a cuatro unidades: \$ 1500

Dos unidades a cuatro unidades: \$ 2000

Un método común para tomar en cuenta los daños probables es de asignarles un costo esperado obtenido al multiplicar el costo de estos daños por la probabilidad de su ocurrencia. Por ejemplo el ingeniero adopta 2 unidades como capacidad inicial de diseño, las posibles inadecuaciones vendrían de que la demanda real sea de 3 o 4 unidades. Los daños o pérdidas asociadas con una capacidad de 2 unidades son los costos de expansión de dos a tres y cuatro unidades, o sea \$ 1200 y \$ 2000. Como las probabilidades de 3 y 4 unidades son 0.42 y 0.49, el costo o daño esperado asociado con la selección de una capacidad de 2 unidades, es:

Daños esperados para una capacidad de 2 unidades

$$= P(D_3) \times \$ 1200 + P(D_4) \times \$ 2000$$

$$= 0.42 \times 1200 + 0.49 \times 2000 = \$ 1484$$

Si el ingeniero selecciona 3 unidades como capacidad inicial de la tubería secundaria, y que la demanda real es de dos unidades, no habrá costo adicional, o sea, no habrá daño. Pero si la demanda real es de cuatro unidades los daños debido a la expansión de 3 o 4 unidades son de \$ 1500 y los daños esperados son:

$$\$ 1500 \times P(D_4) = \$ 1500 \times 0.49 = \$ 735$$

Si el ingeniero selecciona 4 unidades como capacidad inicial no habrá ningún daños por remodelación y expansión.

El costo total esperado a cada capacidad de diseño es igual al costo inicial más el costo esperado de los daños. En el caso de la selección de 2 unidades como capacidad inicial, el costo total esperado es de:

$$\begin{aligned} \text{Costo total esperado} &= \text{costo inicial} + \text{daños esperados} = \\ &= \text{costo 2 unidades} + 1484 \end{aligned}$$

El cálculo de los costos totales esperados se resumen en la tabla siguiente, donde C_2 = costo inicial de la selección de una capacidad inicial de 2 unidades.

Capacidad inicial seleccionada. (1)	Costo inicial (2)	Daño esperado a una demanda real posible de 3 unidades (3)	Daño esperado debido a una demanda real posible de 4 unidades (4)	Costo Total esperado (5)
2 unidades	C_2	$0.42(1200)=504$	$0.49(2000)=980$	C_2+1484
3 unidades	$C_2 + 500$	0	$0.49(1500)=735$	C_2+1235
4 unidades	C_2+1500	0	0	C_2+1500

De esta tabla se concluye que la alternativa de una capacidad de tres unidades es el mejor compromiso entre costo inicial y posibles

costos de expansión.

Ejemplo 40. Programación de Construcción

Un contratista debe seleccionar una estrategia para un trabajo de construcción. Deben realizarse dos operaciones I y II sucesivamente. Cada operación puede requerir 4, 5 ó 6 días para ser cumplida. Definimos los siguientes eventos:

M_4 = [Operación I requiere 4 días]

N_4 = [Operación II requiere 4 días]

M_5 = [Operación I requiere 5 días]

N_5 = [Operación II requiere 5 días]

M_6 = [Operación I requiere 6 días]

N_6 = [Operación II requiere 6 días]

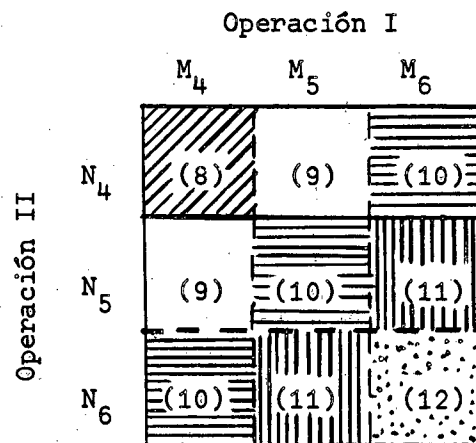


Figura 17. Espacio muestral para
 $(M_i \wedge N_j)$

El espacio muestral que admite $(M_4 \cap N_4)$; $(M_4 \cap N_5)$, ..., $(M_6 \cap N_6)$ como eventos elementales se muestra en la figura 4.2 donde los índices representan la velocidad y el tiempo de la operación. Cada operación puede ser realizada a tres diferentes velocidades, cada una a un costo diferente y cada una conduciendo a diferentes verosimilitudes para el requerimiento de tiempo. Además si el trabajo no está terminado en 10 días, el contratista debe pagar una multa de \$ 2000 por día.

El contratista juzga, en base a su experiencia, que al trabajar a la velocidad A su probabilidad de terminar la fase I en 4 días, evento M_4 es sólo 0.2, en 5 días (M_5) es 0.5 y en 6 días M_6 es 0.3, o sea

$$P(M_4/A) = 0.2$$

$$P(M_5/A) = 0.5$$

$$P(M_6/A) = 0.3$$

De una manera análoga asignó probabilidades a todas las posibilidades como se muestra en la tabla 2. Las probabilidades asignadas reflejan la posibilidad de terminar el trabajo más rápidamente a una velocidad de costo más alto.

El contratista asume que los eventos M_4 , M_5 y M_6 son independientes de los eventos N_4 , N_5 y N_6 .

Los costos esperados $E(C_i/j)$ de la construcción de la fase i, dado la velocidad j, pueden ser calculados. Para la operación I con la velocidad A, o sea, para $i = I$ y $j = A$, obtenemos:

$$E(C_1/A) = (\text{costo de 4 días}) P(M_4/A) + (\text{costo de 5 días})$$

$$P(M_5/A) + (\text{costo de 6 días}) P(M_6/A)$$

Operación i	Velocidad j	Costo/ día C_{ij}	Probabilidad de tiempo requerido $P(M_{t/j})$ y $P(N_{t/j})$			
			t=4 días	t=5 días	t=6 días	Suma
I	A	\$ 200	0.2	0.5	0.3	1.0
I	B	240	0.3	0.6	0.1	1.0
I	C	280	0.6	0.4	0	1.0
II	D	200	0.1	0.4	0.5	1.0
II	E	300	0.3	0.4	0.3	1.0
II	F	400	0.6	0.3	0.1	1.0

Tabla 2. Costo/día, C_{ij} , de la operación i a la velocidad j y probabilidades asignadas a tiempo requerido.

o sea:

$$E(C_I/A) = (200 \times 4)(0.2) + (200 \times 5)(0.5) + (200 \times 6)(0.3) = 1020 \$$$

De una manera similar el costo esperado para la operación II con la velocidad F, o sea, con i = II y j = F, puede calcularse como sigue:

$$E(C_{II}/F) = (\text{costo de 4 días})P(N_4/F) + (\text{costo de 5 días})P(N_5/F) + (\text{costo de 6 días})P(N_6/F)$$

ó sea:

$$E(C_{II}/F) = (400 \times 4)(0.6) + (400 \times 5)(0.3) + (400 \times 6)(0.1) = 1800 \$$$

De igual modo se puede calcular los costos esperados para cada operación i a la velocidad j. Estos costos se presentan en la tabla 3.

Operación i	Velocidad j	E (C _i /j)
I	A	\$ 1020
I	B	1152
I	C	1232
II	D	1080
II	E	1500
II	F	1800

Tabla 3. Costo esperado $E(C_{ij})$ de la construcción de la fase i a la velocidad j

Los costos de la tabla 3 no involucran las multas en caso de que el trabajo no esté terminado a tiempo, o sea, en 10 días. Incluiremos estas multas de la siguiente manera:

Con la asunción de la independencia de las M y las N podemos calcular las probabilidades de que las diferentes combinaciones de operaciones o estrategias requieren un número dado de días. Una estrategia puede consistir en la operación IA y IID lo que denotaremos por AD. Utilizando los datos de la tabla 1, obtenemos para la estrategia AD,

$$\begin{aligned}
 P(T=8 \text{ días/AD}) &= P[(M_4/A) \cap (N_4/D)] = P(M_4/A) P(N_4/D) = \\
 &= 0.2 \times 0.1 = 0.02
 \end{aligned}$$

donde T es el tiempo total requerido por la realización de la operación I y II. Un tiempo total $T = 9$ días se obtiene con $M_4 \cap N_5$ ó con $M_5 \cap N_4$ de modo que:

$$\begin{aligned}
 P(T=9 \text{ días/AD}) &= P[(M_4 \cap N_5) \cup (M_5 \cap N_4)] = P(M_4 \cap N_5) + P(M_5 \cap N_4) - \\
 &- P[(M_4 \cap N_5) \cap (M_5 \cap N_4)]
 \end{aligned}$$

Como los eventos $(M_4 \cap N_5)$ y $(M_5 \cap N_4)$ son mutuamente excluyentes la probabilidad de su intersección es nula, de modo que

$$\begin{aligned} P(T=9 \text{ días/AD}) &= P[(M_5/A) \cap (N_4/D)] + P[(M_4/A) \cap (N_5/D)] \\ &= P(M_5/A) \cdot P(N_4/D) + P(M_4/A) \cdot P(N_5/D) = (0.5)(0.1) + (0.2)(0.4) = 0.13 \end{aligned}$$

Las multas son asociadas a tiempos de construcción de 11 y 12 días o sea $T = 11$ días y $T = 12$ días. Para la estrategia AD:

$$\begin{aligned} P(T=11 \text{ días/AD}) &= P[(M_5/A) \cap (N_6/D)] + P[(M_6/A) \cap (N_5/D)] \\ &= P(M_5/A) \cdot P(N_6/D) + P(M_6/A) \cdot P(N_5/D) = (0.5)(0.5) + (0.3)(0.4) = 0.37 \\ P(T=12 \text{ días/AD}) &= P[(M_6/A) \cap (N_6/D)] = P(M_6/A) \cdot P(N_6/D) = (0.3)(0.5) = 0.15 \end{aligned}$$

Con una multa de \$ 2000 para cada día en exceso de 10 días, se puede calcular el valor esperado de la multa para la estrategia AD, o sea:

$$\begin{aligned} E[\text{multa/AD}] &= (2000 \text{ \$/día} \times 1 \text{ día}) \cdot P(T=11 \text{ días/AD}) + \\ &+ (2000 \text{ \$/día} \times 2 \text{ días}) \cdot P(T=12 \text{ días/AD}). \\ E[\text{multa/AD}] &= (200)(0.37) + (2000 \times 2)(0.15) = 740 + 600 = \$ 1340 \end{aligned}$$

Para la estrategia CF tenemos:

$$\begin{aligned} P(T=11 \text{ días/CF}) &= P[(M_5/C) \cap (N_6/F)] + P[(M_6/C) \cap (N_5/F)] \\ &= P(M_5/C) \cdot P(N_6/F) + P(M_6/C) \cdot P(N_5/F) = (0.4)(0.1) + (0)(0.3) = 0.04 \\ P(T=12 \text{ días/CF}) &= P[(M_6/C) \cap (N_6/F)] = P(M_6/C) \cdot P(N_6/F) = (0)(0.1) = 0 \\ E[\text{multa/CF}] &= (2000 \text{ \$/día} \times 1 \text{ día}) \cdot P(T=11 \text{ días/CF}) + (2000 \text{ \$/día} \times \\ &\times 2 \text{ días}) \cdot P(T=12 \text{ días/CF}) = (2000)(0.04) + (2000 \times 2)(0) = 80 + 0 = \$ 80. \end{aligned}$$

De una manera similar se obtiene la multa esperada para cada estrategia. Los resultados de tales cálculos se muestran en la tabla 4.

Estrategia mn	(T=11 d/mn)	(T=12 d/mn)	Multa esperada para		Multa esperada total para mm
			11 días	12 días	
AD	0.37	0.15	740	600	\$ 1340
AE	0.27	0.09	540	360	900
AF	0.14	0.03	280	120	400
BD	0.34	0.05	680	200	880
BE	0.22	0.03	440	120	560
BF	0.09	0.01	180	40	220
CD	0.20	0	400	0	400
CE	0.12	0	240	0	240
CF	0.04	0	80	0	80

Tabla 4

El costo total esperado de la estrategia AD es igual a :

$$E[AD \text{ total}] = E[C_I/A] + E[C_{II}/D] + E[\text{multa}/AD]$$

$$E[AD \text{ total}] = 1020 + 1080 + 1340 = \$ 3440$$

Para la estrategia CF tenemos :

$$E[CF \text{ total}] = E[C_I/C] + E[C_{II}/F] + E[\text{multa}/CF] =$$

$$= 1232 + 1800 + 80 = \$ 3112$$

Los costos esperados totales de las estrategias se presentan en la tabla 5.

La estrategia óptima es la que tiene el costo esperado total mínimo.

Estrategia mm	$E[C_{I,II}/mm] = E[C_I/m] + E[C_{II}/n]$	$E[multa/mm]$	$E[mm \text{ total}]$
AD	$1020 + 1080 = 2100$	1340	\$ 3440
AE	$1020 + 1500 = 2510$	900	3420
AF	$1020 + 1800 = 2810$	400	3220
BD	$1152 + 1080 = 2232$	880	3112
BE	$1152 + 1500 = 2652$	560	3212
BF	$1152 + 1800 = 2952$	220	3172
CD	$1232 + 1080 = 2312$	400	2712*
CE	$1232 + 1500 = 2732$	240	2972
CF	$1232 + 1800 = 3032$	80	3112

Tabla 5.

En la tabla 5 se puede apreciar que la estrategia óptima es CD.

Los costos esperados son costos ficticios que se utilizan para comparar varias alternativas. De adoptar la estrategia CD los costos reales que tendrá que pagar el contratista no sería \$ 2712, sino el costo de las operaciones I y II ejecutadas en 4, 5 ó 6 días más \$ 2000 por cada día real en exceso de 10 días.

G. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Dado un conjunto de eventos mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos, $B_1, B_2, \dots, B_n$, se puede siempre realizar la expansión de la probabilidad $P(A)$ de un evento A de la siguiente manera:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + \dots + P(A \cap B_n)$$

En la figura 18 se presenta un diagrama de Venn, ilustrando la intersección de A con los eventos B. La ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \dots + P(A/B_n)P(B_n)$$

ó sea:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i)P(B_i)$$

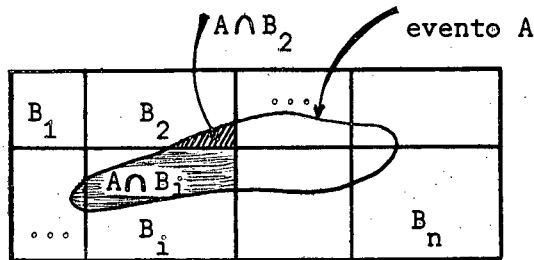


Figura 18. Diagrama de Venn ilustrando la intersección del evento con un conjunto de eventos mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos.

Este resultado se conoce como el "teorema de las probabilidades totales". Representa la probabilidad de un evento en términos de sus probabilidades condicionales, condicionadas por un conjunto de evento mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos.

Este teorema es a menudo útil en problemas donde puede ser más fácil obtener las probabilidades condicionales de un evento, dado un conjunto de eventos que la probabilidad del evento mismo.

Ejemplo 41. Demandas Aleatorias Aditivas de Sistemas Ingenieriles.

1. Concepto de Demanda y Capacidad en Ingeniería

Consideramos el problema generalizado del diseño en ingeniería civil en la que se debe proveer "capacidad" para una "demanda" probabilística. La naturaleza de la demanda y de la capacidad varía dependiendo de la situación. A continuación se presentan varios ejemplos de "capacidad" y su correspondiente "demanda", comúnmente encontradas en ingeniería.

"Demanda"

Una carga.

Una avenida en 1 punto de un río.

Un número de usuarios durante una hora de punta del tráfico.

Una cantidad de agua de riego requerida de un embalse por un patrón de cultivos.

Una cantidad de agua requerida por varios usos en una región dada.

"Capacidad"

Un edificio o un elemento estructural.

Dimensión del aliviadero de una presa.

Número de canales de una autopista.

El volumen máximo de agua almacenable en un embalse o dimensión del embalse.

Dimensiones de varios embalses, pozos, plantas de desalinización, canales de derivación del agua.

La demanda es generalmente incierta, en particular, la demanda máxima posible nunca se conoce con certeza. El ingeniero se enfrenta al problema de proveer, para una demanda rodeada de incertidumbre, una capacidad a la cual está asociado un costo inicial. Además, en ~~casos de~~ ~~que la demanda excede~~ la capacidad se registran daños imputables a la inadecuación de la capacidad provista y cuyo nivel y costo dependen de esta última. A mayor capacidad, o sea, a mayor costo inicial corresponde un costo menor de daños potenciales.

Un diseño para cero daño bajo todas las posibles condiciones de demanda, o sea, para la demanda máxima posible, es imposible o prohibitivo en vista del alto costo asociado con él y de las limitaciones de los recursos económicos. Además no es siempre posible definir ó identificar todas las posibles demandas debido a nuestra incapacidad de pronosticar sus estados futuros. Bajo estas condiciones el diseño más adecuado consiste en un compromiso entre el costo inicial y el costo de los daños futuros potenciales asociados a esta capacidad.

En muchos casos es factible que el ingeniero tenga la posibilidad de utilizar en su diseño varios tipos de capacidad como capacidad primaria, secundaria, con diferentes costos unitarios y con capacidad total igual a la suma de los tipos de capacidad utilizados. En tales

casos se registran daños, usualmente moderados, si es necesario usar la capacidad secundaria, mientras que incurren daños más severos si la demanda sobrepasa la capacidad total provista. A continuación se presentan algunos ejemplos ilustrando posibles tipos de capacidad y los costos de daños asociados.

La armazón de un edificio debe poder sostener una carga sísmica moderada sin daños visibles a la estructura. Sin embargo durante un terremoto mayor y de rara ocurrencia, una estructura bien diseñada desarrollará resistencia secundaria involucrando grandes deformaciones plásticas y algún nivel aceptable de daños a las ventanas y particiones.

A menudo un sistema de abastecimiento municipal de agua utilizando las aguas derivadas de un río, incluye una capacidad secundaria en términos de una batería de pozos de los cuales se bombea agua subterránea. En caso de que sea necesario usar la capacidad secundaria los costos de daños podrían incluir los costos de operación de una o más bombas.

Las presas pequeñas son comúnmente diseñadas para dos o más niveles de frecuencia para proveer un aliviadero y asegurar un borde libre adecuado. Las demandas para ambos tipos de capacidad son avenidas de correspondiente a diferentes niveles de frecuencia. A veces se utiliza una avenida mayor para la determinación de la capacidad total del embalse o borde libre. En caso de usar la capacidad secundaria, o sea que la capacidad primaria correspondiente a la avenida de diseño del aliviadero está sobrepasada, sólo pueden ocurrirse daños abrasión y erosión del material del aliviadero y del cauce del río, e inundaciones de tierras aguas abajo del aliviadero. Si la capacidad total (incluyendo el borde libre) está sobrepasada por una avenida se registran los daños mencionados arriba a un nivel más severo, más inundaciones aguas arriba de la presa; además la presa puede dañarse a tal punto que puede ocurrir su destrucción parcial o total.

2. Problema

Supongamos que la demanda surge de dos fuentes A y B y que el ingeniero asigne las probabilidades que se muestran en la tabla 6.

	$P(A_i/B_j)$					$P(B_j)$
	A_{100}	A_{200}	A_{300}	A_{400}	Suma	
B_{100}	0	0.6	0.4	0	1.0	0.7
B_{200}	0	0.3	0.5	0.2	1.0	0.2
B_{300}	0	0	0.2	0.8	1.0	0.1
B_{400}	...	...	...	...	...	$\frac{0}{1.0}$

Tabla 6. Probabilidades condicionales de (A_i/B_j) y probabilidades de B_j .

Como se puede apreciar en la tabla 6, las dos fuentes no son independientes.

- Calcular las probabilidades de los eventos A_i .
- Desarrollar el espacio muestral cuyo evento elemental es la intersección $A_i \cap B_j$.
- Calcular las probabilidades de los eventos $D_k =$ [el nivel de la demanda total es k].
- Desarrollar el espacio muestral condicional del evento = [el nivel de la demanda A es i y el de B es j dado que el nivel de la demanda total es k].
- Calcular e interpretar las probabilidades de los eventos elementales del espacio muestral desarrollado en (a).
- Suponiendo que la capacidad primaria puede ser provista a \$ 1000 por unidad y que la capacidad secundaria tiene un costo de \$ 100.00 por unidad. Si la demanda es tal que la capacidad secundaria

ria debe ser utilizada, el costo de los daños asociados es \$ 1000 por unidad utilizada. Si la demanda excede la capacidad total (capacidad primaria más secundaria), o sea en caso de falla, el costo de los daños (falla) es \$ 2000 por unidad de exceso sobre la capacidad total. Las alternativas de diseño incluyen cualquier combinación de 0 a 700 para capacidad primaria y de 0 a 700 para capacidad secundaria.

N.B. En la tabla 6 se puede ver que el ingeniero asigna cero como probabilidad. Existen dos interpretaciones de una probabilidad igual a cero. Primero, el evento puede ser simplemente imposible. Segundo, puede ser posible, pero su verosimilitud insignificante, y el ingeniero está dispuesto a excluir este nivel del estudio actual, mientras manteniendo la opción de asignar luego una probabilidad diferente a cero.

3. Solución

- a. Las probabilidades de los eventos A_i pueden calcularse utilizando el teorema de la probabilidad total, o sea que,

$$P(A_{200}) = P(A_{200}/B_{100})P(B_{100}) + P(A_{200}/B_{200})P(B_{200}) + P(A_{200}/B_{300})P(B_{300}) \\ + P(A_{200}/B_{400})P(B_{400})$$

$$P(A_{200}) = (0.6)(0.7) + (0.3)(0.2) + (0)(0.1) + 0 = 0.48$$

De igual manera calculamos

$$P(A_{300}) = (0.4)(0.7) + (0.5)(0.2) + (0.2)(0.1) + 0 = 0.40$$

$$P(A_{400}) = (0)(0.7) + (0.2)(0.2) + (0.8)(0.1) + 0 = 0.12$$

$$P(A_{100}) = (0)(0.7) + (0)(0.2) + (0)(0.1) + 0 = 0$$

- b. Consideramos como evento elemental la intersección $A_i \cap B_j$. Un espacio muestral bidimensional y discreto se muestra en la figura 19.

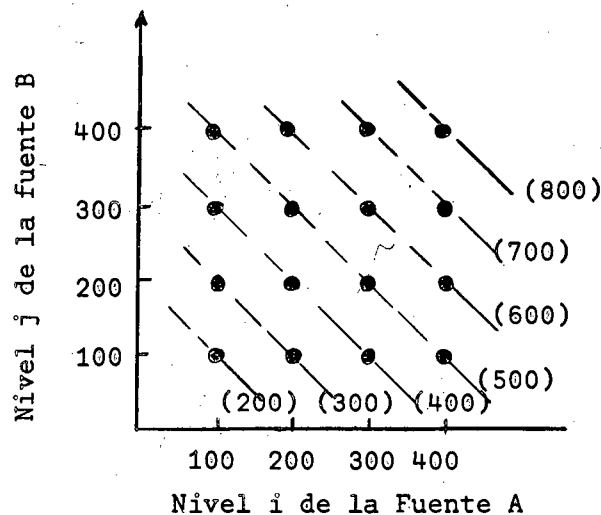


Figura 19. Espacio muestral del evento elemental (A_i, B_j) = (el nivel de demanda de la fuente A es i y el de la fuente B, j).

- c. El evento $D_k = [\text{la demanda total es } k]$, está constituido por una colección de eventos elementales $(A_i \cap B_j)$. En la figura 19 se han agrupado aquellos puntos de igual valor de k , juntándolos por una línea identificada por el valor de k entre paréntesis. Puesto que los eventos elementales $(A_i \cap B_j)$ son mutuamente exclusivos, D_k es la unión de los $(A_i \cap B_j)$ tales que $i+j = k$, y la probabilidad de D_k es la suma de los eventos elementales. Para $k = 600$, tenemos:

$$D_{600} = (A_{200} \cap B_{400}) \cup (A_{300} \cap B_{300}) \cup (A_{400} \cap B_{200})$$

$$P(D_{600}) = P(A_{200} \cap B_{400}) + P(A_{300} \cap B_{300}) + P(A_{400} \cap B_{200})$$

$$P(A_{200} \cap B_{400}) = P(A_{200}/B_{400})P(B_{400}) = 0$$

$$P(A_{300} \cap B_{300}) = P(A_{300}/B_{300})P(B_{300}) = (0.2)(0.1) = 0.02$$

$$P(A_{400} \cap B_{200}) = P(A_{400}/B_{200})P(B_{200}) = (0.2)(0.2) = 0.04$$

$$P(D_{600}) = 0 + 0.02 + 0.04 = 0.06$$

De una manera similar calculamos las probabilidades $P(D_k)$. Los resultados se presentan en la tabla 7.

Nivel k de la demanda total D_k	Probabilidad $P(D_k)$
200	0
300	0.42
400	0.34
500	0.10
600	0.06
700	0.08
800	0
	<u>1.00</u>

Tabla 7.

- d. El espacio muestral del evento condicional $[(A_i \cap B_j)/D_{600}]$ es el conjunto de aquellos eventos que producen una demanda total de 600; o sea, los tres puntos $(A_{200} \cap B_{400})$, $(A_{300} \cap B_{300})$ y $(A_{400} \cap B_{200})$. Este espacio muestral condicional se ilustra en la figura 20.
- e. La probabilidad del evento condicional $[(A_i \cap B_j)/D_{600}]$ se calcula como:

$$P[(A_i \cap B_j)/D_{600}] = \frac{P(A_i \cap B_j \cap D_{600})}{P(D_{600})}$$

Para los tres puntos del espacio muestral tenemos:

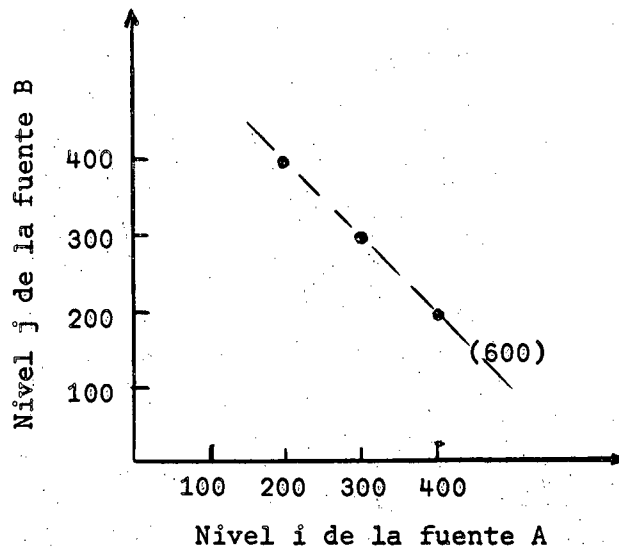


Figura 20. Espacio muestral condicional de los eventos
 $= [(A_i \cap B_j) / D_{600}]$.

$$P[(A_{200} \cap B_{400}) / D_{600}] = \frac{P(A_{200} \cap B_{400})}{P(D_{600})} = \frac{P(A_{200} / B_{400}) P(B_{400})}{P(600)}$$

$$P[(A_{200} \cap B_{400}) / D_{600}] = \frac{0}{0.06} = 0$$

$$P[(A_{300} \cap B_{300}) / D_{600}] = \frac{P(A_{300} \cap B_{300} \cap D_{600})}{P(D_{600})}$$

Puesto que el evento D_{600} incluye el evento $(A_{300} \cap B_{300})$ tenemos:

$$P[(A_{300} \cap B_{300}) / D_{600}] = \frac{P(A_{300} \cap B_{300})}{P(D_{600})} = \frac{P(A_{300} / B_{300}) P(B_{300})}{P(D_{600})}$$

$$P[(A_{300} \cap B_{200}) / D_{600}] = \frac{(0.2)(0.1)}{0.06} = 0.33$$

De una manera similar obtenemos:

$$P[(A_{400} \cap B_{200})/D_{600}] = \frac{P(A_{400}/B_{200})P(B_{200})}{P(D_{600})} = \frac{(0.2)(0.2)}{0.06} = 0.67$$

Interpretación de las probabilidades $P[(A_i \cap B_j)/D_{600}]$:

Puesto que los tres eventos condicionales $[(A_{200} \cap B_{400})/D_{600}]$, $[(A_{300} \cap B_{300})/D_{600}]$ son mutuamente exclusivos, y colectivamente exhaustivos, la suma de sus probabilidades debe ser igual a 1.

$$\text{Suma} = 0 + 0.33 + 0.67 = 1.00$$

Por otra parte, las probabilidades incondicionales de los eventos $(A_{200} \cap B_{400})$, $(A_{300} \cap B_{300})$ y $(A_{400} \cap B_{200})$ son 0.02 y 0.04 respectivamente. Las probabilidades condicionales $[(A_i \cap B_j)/D_{600}]$ son simplemente estos valores normalizados dividiéndolos por 0.06 para sumar 1.0.

- f. Designamos por NUP y NUS el número de unidades de capacidad provistas para la capacidad primaria y secundaria respectivamente. La capacidad total es:

$$NUT = NUP + NUS$$

Los costos iniciales C_p , C_s y C_t de las capacidades primaria, secundaria y total respectivamente son:

$$CP = 1000 \text{ NUP}$$

$$CS = 100 \text{ NUS}$$

$$CT = C_p + C_s = 1000 \text{ NUP} + 100 \text{ NUS}$$

Si la demanda D_k es inferior o igual a la capacidad primaria, el costo de los daños es nulo. Si la demanda D_k excede la capacidad

primaria de modo que se utiliza la demanda secundaria, sin exceder la capacidad total, los costos de los daños CD resultantes serán de:

$$CD = \sum_{D_k > NUP}^{NUT} 1000(D_k - NUP) \quad \text{cuando} \quad NUP < D_k < NUT$$

Su valor esperado es

$$CED = \sum_{D_k > NUP}^{NUT} 1000 (D_k - NUP) P(D_k) \quad \text{cuando} \quad NUP < D_k < NUT$$

Si la demanda excede la capacidad total, se registra una falla y el costo CF asociado con una falla es:

$$CF = \sum_{D_k > NUT} 2000 (D_k - NUT) \quad \text{cuando} \quad D_k > NUT$$

Su valor esperado es:

$$CEF = \sum_{D_k > NUT} 2000 (D_k - NUT) P(D_k) \quad \text{cuando} \quad D_k > NUT$$

Entonces el costo esperado total es igual a la suma del costo inicial de la capacidad total, del costo esperado de los daños asociados con la utilización de la capacidad secundaria y del costo esperado de una falla, o sea:

$$CET = C_t + CED + CEF$$

Para una capacidad primaria $NUP = 400$ unidades, una capacidad secundaria $NUS = 200$ unidades, tenemos:

$$NUT = NUP + NUS = 400 + 200 = 600$$

$$CP = 1000 NUP = 1000 (400) = 400000$$

$$CS = 100 NUS = 100 (200) = 20000$$

$$CT = CP + CS = 400000 + 200000 = 600000$$

$$CED = \sum_{D_k=400}^{600} 1000(D_k-400) P(D_k) = 1000(D_{500}-400)P(D_{500}) + 1000(D_{600}-400)P(D_{600})$$

$$CED = 1000(500-400)(0.1) + 1000(600-400)(0.06) = 22000$$

$$CEF = \sum_{D_k=600}^{800} 2000(D_k-600)P(D_k) = 2000(D_{700}-600)P(D_{700}) + 2000(D_{800}-600)P(D_{800})$$

$$CEF = 200(700-600)(0.08) + 2000(800-600)(0) = 16000$$

$$CED = CT + CED + CEF$$

$$CET = 420000 + 22000 + 16000 = 458000 \$$$

Se repetirán los cálculos para todas las combinaciones de 0 a 700 para capacidad primaria y de 0 a 700 para capacidad secundaria. La combinación que tenga el costo esperado total, CET, mínimo es el diseño óptimo. A continuación se presenta un programa escrito en FORTRAN IV para la determinación del costo mínimo y de las capacidades primaria y secundaria óptimas. La solución óptima se obtuvo para una capacidad primaria de 0 y una capacidad secundaria 300 unidades, correspondiente a un costo de 363.999.7. La solución se presenta en la tabla 8.

CENTRO INTERAMERICANO
DE DESARROLLO INTEGRAL
DE AGUAS Y TIERRAS
CIDIAT

BANCO DE PROGRAMAS
ESPECIFICACIONES DE ENTRADA

NOMBRE DEL PROGRAMA Capacida CODIGO _____

N°	Columnas de la tarjeta		Nombre del Campo	Formato	Factor	Tipo de Dato	Observaciones Valor en el ejemplo
	Desde	Hasta					
1	1	2	IMP	A2	1	A	SI
2	1	5	DIV	F10.2	1	N	100.0
3	1	5	M	I5	1	N	3
3	6	15	B (1)	F10.2	7	N	100.0
3	16	25	B (2)				200.0
3	26	35	B (3)				300.0
3	36	45	PB (1)				0.7
3	46	55	PB (2)				0.2
3	56	65	PB (3)				0.1
4	1	5	N	I5	1	N	4
4	6	15	A (1)	F10.2	7	N	100.0
4	16	25	A (2)				200.0
4	26	35	A (3)				300.0
4	36	45	A (4)				400.0
4	46	55	PADB (1,1)				0.0
4	56	65	PADB (2,1)				0.6
4	66	75	PADB (3,1)				0.4
5	1	10	PADB (4,1)	F10.2	7	N	0.0
5	11	20	PADB (1,2)				0.0
			Preparado por: Orlando Puleo		PROGRAMA:		Código

CENTRO INTERAMERICANO
DE DESARROLLO INTEGRAL
DE AGUAS Y TIERRAS
CIDIAT

BANCO DE PROGRAMAS
ESPECIFICACIONES DE ENTRADA

NOMBRE DEL PROGRAMA: Capacida CODIGO: _____

N°	Columnas de la tarjeta		Nombre del Campo	Formato	Factor	Tipo de Dato	Observaciones Valor en el ejemplo
	Desde	Hasta					
5	21	30	PADB(2,2)				0.3
5	31	40	PADB(3,2)				0.5
5	41	50	PADB(4,2)				0.2
5	51	60	PADB(1,3)				0.0
5	61	70	PADB(2,3)				0.0
6	1	10	PADB(3,3)	F10.2	7	N	0.2
6	11	20	PADB(4,3)				0.8
7	1	10	CUP	F10.2	4	N	1000.0
7	11	20	CUS				100.0
7	21	30	CUD				1000.0
7	31	40	CUF				2000.0
8	1	5	NP	I5	2	N	8
8	6	10	NS				8
8	11	20	DELTUP	F10.2	2	N	100
8	21	30	DELTUS				100
Preparado por: Orlando Puleo				Programa:		Código	

H. TEOREMA DE BAYES

Consideramos un evento A y un conjunto de eventos mutuamente exclusivos y colectivamente exhaustivos $B_1, B_2, \dots, B_j, \dots, B_n$ y estimamos la probabilidad condicional de un evento B_j ~~dados el evento A~~ . Pues to que la intersección de dos eventos A y B_j es la misma que la escribimos como $(A \cap B_j)$ o como $B_j \cap A$ tenemos:

$$P(A \cap B_j) = P(B_j \cap A)$$

Además

$$P(A \cap B_j) = P(A/B_j) P(B_j)$$

y

$$P(B_j \cap A) = P(B_j/A) P(A)$$

Entonces

$$P(B_j/A)P(A) = P(A/B_j) P(B_j)$$

De allí sacamos:

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{P(A)}$$

Según el teorema de la probabilidad total

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^n P(A/B_j)P(B_j)$$

Entonces

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j)P(B_j)}{\sum_{j=1}^n P(A/B_j)P(B_j)}$$

Alternativamente

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j) P(B_j)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \dots + P(A/B_j)P(B_j) + \dots + P(A/B_n)P(B_n)}$$

Este resultado es conocido como regla o fórmula de Bayes y tiene muchas aplicaciones en la ingeniería donde las decisiones se toman frente a la incertidumbre. En particular, la fórmula de Bayes provee el método para incorporar nueva información a asignaciones previas de probabilidades, llamadas "probabilidades priores" para obtener nuevos valores para las verosimilitudes relativas de los eventos de interés para el ingeniero. Estas nuevas probabilidades condicionales calculadas mediante la fórmula de Bayes son llamadas "probabilidades posteriores". En la fórmula de Bayes $P(B_j/A)$ es la probabilidad posterior que es un ajuste de la probabilidad priores $P(A_j)$ por las probabilidades condicionales $P(A/B_j)$, o sea, las verosimilitudes de adquirir la información A dado los valores posibles de la variable B_j .

La regla de Bayes ayuda a restarle importancia al método que se utiliza para la asignación de probabilidades, o sea, el origen de las medidas de probabilidad, puesto que cualquier probabilidad prior puede ser revisada para incorporar a ella nueva evidencia o experiencia. Cuando el ingeniero asigna una probabilidad que no es idéntica a la probabilidad empírica, la diferencia indica el grado en que elementos de evaluación subjetiva o personal sean involucrados. Puesto que en la práctica nunca es posible obtener probabilidad objetiva o empírica para todos los eventos que integran un proceso de decisión, se considera muy valioso el enfoque Bayesiano porque permite incorporar la evaluación subjetiva o personal del ingeniero en el análisis.

I. GENERALIZACION DEL TEOREMA DE BAYES

La regla de Bayes puede ser generalizada en aplicaciones prácticas, al llamar la clasificación de n estados de θ_j de la naturaleza y al considerar que alguna muestra generalizada ha sido observada, con

resultados Z_i . La regla de Bayes se escribe:

$$P(\text{estado/muestra}) = \frac{P(\text{muestra/estado}) P(\text{estado})}{\sum_{\text{todos los estados}} P(\text{muestra/estado}) P(\text{estado})}$$

ó sea:

$$P(\theta_j/Z_i) = \frac{P(Z_i/\theta_j) P(\theta_j)}{\sum_{j=1}^n P(Z_i/\theta_j) P(\theta_j)}$$

Ejemplo 42. Se investiga un edificio construido de concreto armado para determinar su adecuación para uso futuro. El ingeniero ha estudiado la apariencia y el comportamiento anterior del concreto y, basándose en su experiencia y su juicio profesional, decide que la calidad del concreto puede ser clasificada como 2000, 3000 ó 4000 psi (con referencia a la prueba canon de resistencia de un cilindro de 6 pulgadas por 12 pulgadas después de 28 días). Asignó las siguientes verosimilitudes relativas o probabilidades a estos tres estados de la naturaleza del concreto. (tabla 9).

Estado θ_i posible psi	Probabilidad prior $P(\theta_i)$
$\theta_1 = 2000$	0.3
$\theta_2 = 3000$	0.6
$\theta = 4000$	<u>0.1</u> 1.0

Tabla 9.

Muestras cilíndricas de concreto deben ser cortadas del edificio y probadas para ayudar en la determinación del estado verdadero. El in

geniero cree que tales muestras dan una predicción razonablemente con fiable, pero no terminante. Consecuentemente asigna probabilidades condicionales a los valores posibles de la resistencia de las muestras Z_1 , Z_2 ó Z_3 como pronosticador del estado desconocido, como si - gue:

Resistencia de muestra	$P(Z_j/\theta_i)$		
	$\theta_1=2000$ psi	$\theta_2=3000$ psi	$\theta_3=4000$ psi
Z_1 (favorece 2000 psi)	0.7	0.2	0
Z_2 (favorece 3000 psi)	0.3	0.6	0.3
Z_3 (favorece 4000 psi)	$\frac{0}{1.0}$	$\frac{0.2}{1.0}$	$\frac{0.7}{1.0}$

Tabla 10. $P(\text{resistencia muestra/estado})$

Puesto que la resistencia del concreto aumenta con el tiempo, una resistencia de las muestras de, por ejemplo, 3500 psi sugiere que la resistencia de 28 días, que se utiliza para el diseño era probablen~~te~~ te de 3000 psi.

Se puede interpretar las probabilidades $P(\text{resistencia muestra/esta}$ do) de la siguiente manera. Si el valor verdadero de la resistencia de 28 días del concreto es 3000 psi; la técnica de tomar una muestra indica esto solo 60 por ciento de las veces. La probabilidad de cometer un error es de 40 por ciento dividido entre Z_1 y Z_3 . En o - tros términos, la probabilidad de que la resistencia de la muestra sea $Z_2 = 3000$ psi dado que el estado verdadero de la resistencia es 3000 psi, es 0.6 , o sea:

$$P(Z_2/\theta_2=3000) = P(\text{resistencia muestra}=3500, \text{favoreciendo } 3000 \text{ para } 28 \text{ días/estado real } \theta = 3000) = 0.6$$

$$P(Z_1/\theta_2=3000) = P(\text{resistencia muestra}=2500, \text{favoreciendo } 2000 \text{ para } 28 \text{ días/estado real } \theta = 3000) = 0.2$$

$$P(Z_3/\theta_2=3000) = P(\text{resistencia muestra}=4500, \text{favoreciendo } 4000 \text{ para } 28 \text{ días/estado real } \theta = 3000) = 0.2$$

Una muestra es tomada y su resistencia determinada como 2500 psi, favoreciendo una resistencia de 28 días de 2000 psi, o sea, se observó Z_1 . Las probabilidades posteriores condicionales de la resistencia verdadera ó estado real θ , dado que la muestra favorece a 2000 psi son:

$$P(\theta_1 = 2000/Z_1) = \frac{P(Z_1/\theta_1=2000) P(\theta_1=2000)}{P(Z_1/\theta_1=2000)P(\theta_1=2000)+P(Z_1/\theta_2=3000)P(\theta_2=3000)+P(Z_1/\theta_3=4000)P(\theta_3=4000)}$$

$$P(\theta_1 = 2000/Z_1) = \frac{(0.7)(0.3)}{(0.7)(0.3)+(0.2)(0.6) + (0)(0.1)} = \frac{0.21}{0.33} = 0.635$$

$$P(\theta_2 = 3000/Z_1) = \frac{P(Z_1/\theta_2=3000)P(\theta_2=3000)}{\sum_{i=1}^3 P(Z_1/\theta_i) P(\theta_i)} = \frac{(0.2)(0.6)}{0.33} = 0.365$$

$$P(\theta_3 = 4000/Z_1) = \frac{P(Z_1/\theta_3=4000) P(\theta_3=4000)}{\sum_{i=1}^3 P(Z_1/\theta_i) P(\theta_i)} = \frac{0(0.1)}{0.33} = 0$$

El resultado de la muestra ocasionó la exclusión de $\theta_3 = 4000$ psi y un cambio de los pesos relativos hacia el estado observado, θ .

El ingeniero toma una segunda muestra que resultó en Z_2 favoreciendo una resistencia de 28 días de 3000 psi. A este punto sus probabilidades priores a la segunda muestra, son 0.635, 0.365 y 0. Las probabilidades posteriores, dado que la segunda muestra favorece a 3000 psi son:

$$P(\theta_1 = 2000/Z_2) = \frac{P(Z_2/\theta_1 = 2000)P(\theta_1 = 2000/Z_1)}{\sum_{i=1}^3 P(Z_2/\theta_i) P(\theta_i/Z_1)} = \frac{(0.3)(0.635)}{(0.3)(0.635) + (0.6)(0.365) + (0.3)(0)}$$

$$P(\theta_1 = 2000/Z_2) = \frac{0.19}{0.41} = 0.465$$

$$P(\theta_2 = 3000/Z_2) = \frac{P(Z_2/\theta_2 = 3000)P(\theta_2 = 3000/Z_1)}{\sum_{i=1}^3 P(Z_2/\theta_i) P(\theta_i/Z_1)} = \frac{(0.6)(0.365)}{0.41}$$

$$P(\theta_2 = 3000/Z_2) = 0.535$$

$$P(\theta_3 = 4000/Z_2) = \frac{(0.3)(0)}{0.41} = 0$$

Si el ingeniero toma una tercera muestra, estas últimas probabilidades vendrían a ser las probabilidades priores a la tercera muestra.

Las probabilidades posteriores calculadas arriba también pueden ser obtenidas considerando que las dos muestras constituyen una sola muestra, o sea, suponiendo que ambas muestras se obtuvieron simultáneamente.

Ejemplo 43. En base a los registros de una estación pluviométrica, un ingeniero responsable de un distrito de riego estima que la probabilidad de que llueva mañana es 0.7 y la probabilidad de que no llueva 0.3. Escuchó por radio los pronósticos del tiempo para obtener información adicional sobre el tiempo de mañana. En base a su experiencia previa con los pronósticos, encontró de que no siempre se cumplen y que las siguientes probabilidades condicionales describen la precisión de los pronósticos.

Estado θ_i	Pronóstico lluvia	Pronóstico no lluvia
θ_1 = lluvia mañana	0.6	0.4
θ_2 = no lluvia mañana	0.3	0.7

Calcular la probabilidad de que llueva mañana dado que el ingeniero oyó pronosticar lluvia a la radio.

Solución

Las probabilidades priores son:

$$P(\theta_1) = 0.7$$

$$P(\theta_2) = 0.3$$

sea

$$Z_1 = (\text{pronóstico lluvia})$$

Entonces

$$P(Z_1/\theta_1) = 0.6$$

$$P(Z_1/\theta_2) = 0.3$$

La fórmula de Bayes da:

$$P(\theta_1/Z_1) = \frac{P(Z_1/\theta_1) P(\theta_1)}{P(Z_1/\theta_1)P(\theta_1)+P(Z_1/\theta_2)P(\theta_2)} = \frac{(0.6)(0.7)}{(0.6)(0.7)+(0.3)(0.3)} = 0.83$$

La probabilidad pedida es de 0.82.

Ejemplo 44. Un ingeniero usa bombas desechables altamente especializadas y difíciles de construir en un proyecto de investigación. Debido a los requisitos especiales sólo 65% de las bombas que recibe del fabricante son útiles para el proyecto. Por lo tanto, idea un

proyecto de inspección que espera le ayude a seleccionar un alto porcentaje de bombas útiles entre las recibidas. Con el objeto de ver si el proceso de inspección es válido, lo pone en práctica y continúa probando todas las bombas que recibe después de ser inspeccionadas. Obtiene la siguiente información:

- i) 0.75 de las bombas recibidas pasan la inspección;
- ii) de las bombas que son útiles para el proyecto, 0.9 han pasado la inspección.

¿Cuál es la probabilidad de que una bomba que ha pasado la inspección sea útil?

Solución

U = (la bomba es útil)

I = (la bomba pasa la inspección)

Entonces los datos del problema son:

$$P(U) = 0.65$$

$$P(I) = 0.75$$

$$P(I/U) = 0.9$$

Tenemos que calcular $P(U/I)$.

Aplicando la fórmula de Bayes obtenemos:

$$P(U/I) = \frac{P(I/U) P(U)}{P(I)} = \frac{0.9 \times 0.65}{0.75} = 0.78$$

V. VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES

Una variable aleatoria es una variable numérica asociada a un experimento o un fenómeno y cuyo valor no puede ser pronosticado con certidumbre antes de realizarse el experimento o fenómeno. El comportamiento de una variable aleatoria se describe por su ley de probabilidad que puede ser caracterizada mediante una distribución probabilística, una función generatriz de momentos o una función característica.

A. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA Y DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD (d.p)

Si el número de valores que puede tomar una variable aleatoria es contable, entonces se habla de una variable aleatoria discreta (v.a.d) y su distribución de probabilidad es representada por una función de masa. Sea X la v.a.d. y x un valor que puede tomar, entonces la d.p. se define como $p_x(x)$ o sea:

$$p_x(x) = P(X = x)$$

La función de distribución acumulativa, $F_x(x)$ es dada por:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_x(x_i)$$

Ejemplo 45. En el ejemplo del número de vehículos parados frente al semáforo de la esquina se puede haber asignado las siguientes probabilidades:

$$p_x(x) = \begin{cases} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.0 \end{cases} \quad \text{para } \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \\ x = 5 \\ x = 6, 7, 8, \dots \end{cases}$$

En la figura 22 se plotea esta d.p. donde cada barra u ordenada es proporcional en longitud a la probabilidad de que la variable toma ese valor.

La distribución de probabilidad debe satisfacer los axiomas de probabilidad, saber $0 \leq p_x(x) \leq 1$ para toda x .

$$\sum_{\text{todas } x} p_x(x) = 1$$

$$P(a < X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} p_x(x)$$

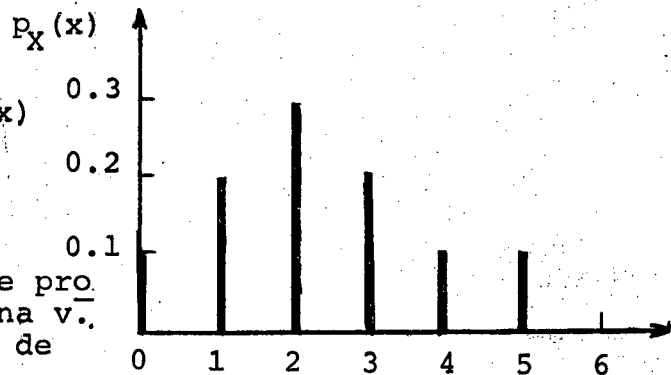


Fig. 22 Distribución de probabilidad de una v. a.d. ó función de masa.

La distribución acumulada $F_x(x)$ se presenta a continuación en forma matemática y gráfica (figura 23).

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \end{cases} \quad \text{para } \begin{cases} x < 0 \\ 1 \leq x < 1 \\ 1 \leq x < 2 \\ 2 \leq x < 3 \\ 3 \leq x < 4 \\ 4 \leq x < 5 \\ 5 \leq x \end{cases}$$

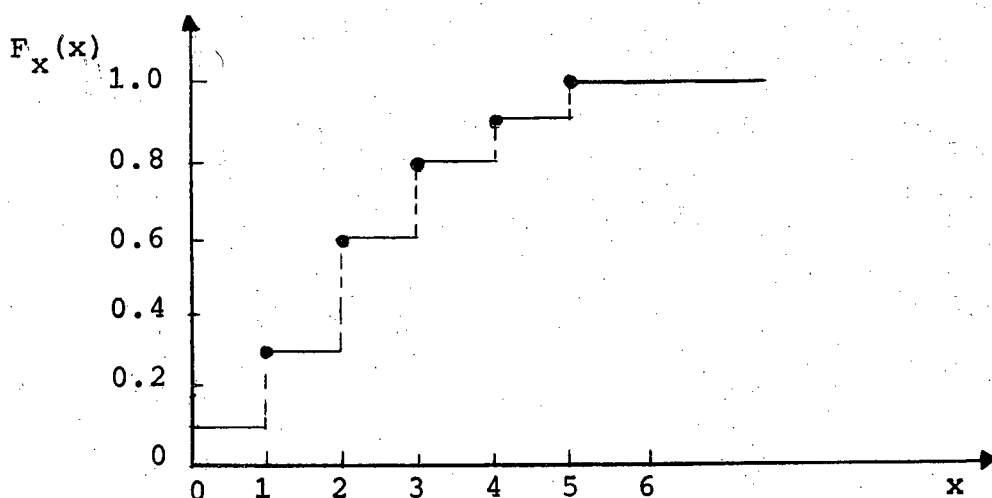


Fig. 23. Función de distribución acumulativa de una v.a.d.

El cálculo se ilustra con la siguiente determinación de $F_X(4)$.

$$\begin{aligned}
 F_X(4) = P(X \leq 4) &= \sum_{x_i \leq 4}^4 p_X(x_i) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) + p_X(4) \\
 &= 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.9
 \end{aligned}$$

B. VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

La variable aleatoria continua (v.a.c) puede tomar cualquier valor del eje real. Se utiliza mucho en problemas de la ingeniería civil aunque la v.a.d. parecería más apropiada debido a la limitación e inadecuación de los equipos de medición que requieren operaciones de redondeo y así no dan valores continuos.

Partimos el eje x en segmentos infinitésimos de igual longitud dx y definimos una función $f_x(x)$ tal que la probabilidad de que X tome un valor entre x y $(x+dx)$ sea igual a $f(x)dx$. A la función $f(x)$ así definida la llamamos función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua. La probabilidad de que $x_1 \leq X \leq x_2$ es:

$$- \quad P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x) dx$$

$$- \quad P(X = x) = 0 \text{ puesto que } dx \text{ ha desaparecido.}$$

$$- \quad f_x(x) \text{ no es una probabilidad sino una medida de la densidad o intensidad de probabilidad en un punto.}$$

$$- \quad \text{por ende, } f_x(x) \text{ no tiene que ser restringido a valores menores que 1.}$$

$$- \quad \text{sin embargo se debe cumplir las dos condiciones siguientes:}$$

$$f_x(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

$$- \quad \text{la función de distribución de probabilidad acumulada se define como:}$$

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad \text{Entonces:}$$

$$f(x) = \frac{d F_x(x)}{dx}$$

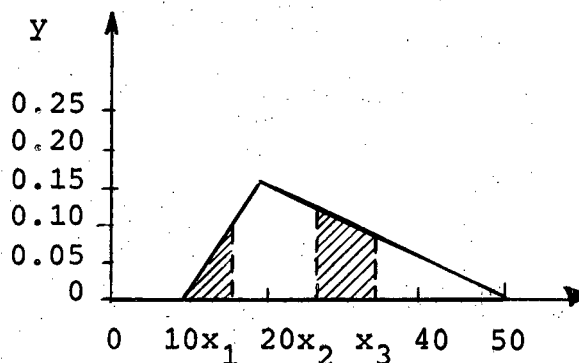


Fig. 24. Densidad de probabilidad para el ejemplo 46.

Ejemplo 46. Supongamos que se quiere adoptar como función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua la curva que se muestra en la figura 24. Se puede desarrollar la expresión matemática de tal curva, como:

$$y = \begin{cases} 0.15 \frac{x-10}{10} & 10 \leq x \leq 20 \\ 0.15 \frac{50-x}{30} & 20 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

Para que esta función constituya una función de densidad, se debe tener:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \, dx = 1$$

Calculamos $\int_{-\infty}^{\infty} y \, dx$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y \, dx &= \int_{10}^{20} 0.15 \frac{x-10}{10} \, dx + \int_{20}^{50} 0.15 \frac{50-x}{30} \, dx \\ &= 0.015 \left[\frac{x^2}{2} - 10x \right]_{10}^{20} + 0.005 \left[50x - \frac{x^2}{2} \right]_{20}^{50} \\ &= 0.015 \left[\left(\frac{(20)^2}{2} - 10 \times 20 \right) - \left(\frac{(10)^2}{2} - 10 \times 10 \right) \right] + 0.005 \\ &\quad \left[\left(50 \times 50 - \frac{(50)^2}{2} \right) - \left(50 \times 20 - \frac{(20)^2}{2} \right) \right] \\ &= 0.015 [(200-200) - (50-100)] + 0.005 [(2500-1250) - \\ &\quad -(100-200)] \end{aligned}$$

$$= 0.015 \times 50 + 0.005 \times 450 = 0.75 + 2.25 = 3$$

Entonces se debe dividir los valores de Y por 3 para ob
tener una función de densidad de probabilidad, o sea:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{0.05x - 10}{10} & \text{para } 10 \leq x \leq 20 \\ \frac{0.05(50 - x)}{30} & 20 \leq x \leq 50 \\ 0 & x < 10 \text{ y } x > 50 \end{cases}$$

Se puede verificar que se tiene

$$f_x(x) \geq 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

a) Calcular

$$P(X \leq x_1) \text{ donde } 10 \leq x_1 \leq 20$$

b) Calcular

$$P(x_2 \leq X \leq x_3) \text{ donde } 20 \leq x_2 \leq x_3 \leq 50$$

c) Estimar (a) y (b) cuando $x_1 = 15$, $x_2 = 27.5$ y $x_3 = 35$

d) Graficar la función de distribución acumulada

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \leq x_1) &= \int_{-\infty}^{x_1} f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{x_1} 0.05 \frac{x - 10}{10} dx = \int_{-\infty}^{x_1} 0.05 \frac{x - 10}{10} dx \\ &= 0.005 \left| \frac{x^2}{2} - 10x \right|_{-\infty}^{x_1} = 0.005 \left| \left(\frac{x_1^2}{2} - 10x_1 \right) - \left(\frac{100}{2} - 100 \right) \right| \\ &= 0.005 \left| \frac{x_1^2}{2} - 10x_1 + 50 \right| = 0.005 \left| \frac{x_1^2}{2} - 20x_1 + 100 \right| \\ &= 0.0025 (x_1 - 10)^2 \end{aligned}$$

$$b) \quad P(x_2 \leq X \leq x_3) = \int_{x_2}^{x_3} f_x(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} 0.05 \frac{50-x}{30} dx = \frac{0.05}{30} \left[50x - \frac{x^2}{2} \right]_{x_2}^{x_3}$$

$$P(x_2 \leq X \leq x_3) = \frac{0.05}{60} [100(x_3 - x_2) - x_3^2 + x_2^2]$$

$$c) \quad \text{Para } x_1 = 15$$

$$P(X \leq 15) = 0.0025 (15-10)^2 = 0.0625 \text{ ó } 6.25\%$$

$$\text{Para } x_2 = 27.5 \text{ y } x_3 = 35$$

$$P(27.5 \leq X \leq 35) = \frac{0.05}{60} [100(35-27.5) - (35)^2 + (27.5)^2] \\ = 0.2344 \text{ ó } 23.44\%$$

d) La función de distribución acumulada se define como:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(u) du$$

Primero para $10 \leq x < 20$

$$F_x(x) = \int_{10}^x 0.05 \frac{u-10}{10} du = 0.005 \left[\frac{u^2}{2} - 10u \right]_{10}^x = 0.005$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - 10x \frac{100}{2} + 100 \right]$$

$$F_x(x) = 0.0025(x-10)^2 \text{ para } 10 \leq x < 20$$

Segundo para $20 \leq x < 50$

$$F_x(x) = \int_{10}^{20} 0.05 \frac{u-10}{10} du + \int_{20}^x 0.05 \frac{50-u}{30} du$$

$$= 0.25 + \int_{20}^x 0.05 \frac{50-u}{30} du$$

$$= 0.25 + \frac{0.05}{30} \left[50u - \frac{u^2}{2} \right]_{20}^x = 0.25 + \frac{0.05}{30}$$

$$\left[\left(50x - \frac{x^2}{2} \right) - \left(50 \times 20 - \frac{400}{2} \right) \right]$$

$$= 0.25 + \frac{0.05}{60} (100x - x^2 - 1600)$$

$$= \frac{-1}{1200} x^2 + \frac{1}{12} x - 1.0833 \text{ para } 20 \leq x \leq 50$$

Para $x > 50$ se tiene

$$F_X(x) = 1$$

Calculamos unos cuantos puntos para graficar $F_X(x)$. Esta gráfica se muestra en la figura 25.

x	$F_X(x)$
10	0
15	0.0625
20	0.25
25	0.479
30	0.667
35	0.8125
40	0.9127
45	0.979
50	1.00

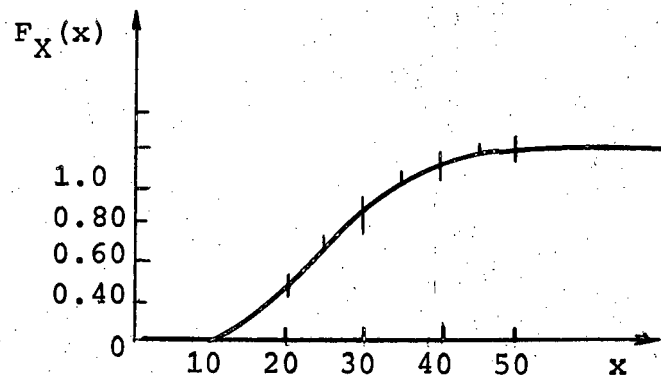


Fig. 25. Función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua.

FUNCION DE DISTRIBUCION COMPLEMENTARIA, $G_X(x)$

A menudo estamos interesados en la probabilidad de que la variable X sea superior a un valor x dado. Esta probabilidad se calcula como uno menos el valor de la función de distribución acumulada y constituye una función llamada función de distribución complementaria.

$$G_X(x) = 1 - F_X(x)$$

Ejemplo 47. Velocidad máxima anual del viento. Un ingeniero diseñando una presa de embalse requiere la velocidad máxima anual del viento para la determinación del borde libre a proveer para contrarrestar el efecto de las ondas generadas por el viento en la superficie libre del agua. Se enteró de que los histogramas de los datos de viento máximo anual en la zona tienden a la forma exponencial negativa. Además supo de que los vientos de intensidad menor que 100 Km/h tienen en general una probabilidad de 0.95.

Determinar:

- la función de distribución complementaria
- la probabilidad de que la velocidad del viento sea superior a 200 Km/h.

Solución:

La función de densidad es de la forma:

$$f_x(x) = ke^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

Para que sea correcta se debe tener:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = \int_0^{\infty} ke^{-\lambda x} dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} ke^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{k}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = +\frac{k}{\lambda} e^0 - \frac{k}{\lambda} \frac{1}{e^{\lambda \infty}} = 1$$

Entonces,

$$\frac{k}{\lambda} = 1 \quad \text{o} \quad k = \lambda$$

La función de densidad es: $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Además se sabe que:

$$P(X \leq 100 \text{ km/h}) = 0.95$$

$$P(X \leq 100) = \int_0^{100} f(x) dx = \int_0^{100} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{100} = 0.95$$

$$-e^{-100\lambda} + 1 = 0.95$$

Se despeja λ como sigue:

$$e^{-100\lambda} = 0.05$$

$$-100\lambda = \ln 0.05$$

$$-100\lambda = -3$$

$$\lambda = 0.03$$

Entonces la función de densidad es:

$$f_x(x) = 0.03 e^{-0.03x}$$

La función de distribución acumulada es: $F_x(x) = P(X \leq x)$

$$F_x(x) = \int_0^x 0.03 e^{-0.03u} du = \int_0^x 0.03 e^{-0.03u} du = [-e^{-0.03u}]_0^x$$

$$F_x(x) = 1 - e^{-0.03x}$$

La función de distribución complementaria es $G_x(x) = P(X > x)$

$$G_x(x) = 1 - F_x(x) = e^{-0.03x}$$

b) Para $x = 200 \text{ Km/h}$.

$$G_x(200) = e^{-0.03(200)} = 0.00248 = 0.25\%$$

C. SISTEMAS DE DOS VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCION CONJUNTA.

Un espacio muestral bidimensional involucra la consideración simultánea de dos variables aleatorias cuyo comportamiento puede ser determinado por una ley de probabilidad conjunta. Esta ley puede representarse por una distribución conjunta, en este caso una distribución bivariada.

1. DOS VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Distribución conjunta de probabilidad o función conjunta de masa de probabilidad $P_{X,Y}(x,y)$ de 2 v.a.d. X y Y .

$$P_{X,Y}(x,y) = P[(X=x) \cap (Y=y)]$$

Función de distribución conjunta acumulada $F_{X,Y}(x,y)$

$$F_{X,Y}(x,y) \equiv P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

a. Distribución Marginal

El comportamiento de una variable considerada aisladamente se describe por su distribución marginal. Se obtiene al sumar los valores de $P_{X,Y}(x,y)$ sobre todos los valores de la variable despreciada de una manera formal:

$$P_X(x) \equiv P(X = x) = \sum_{\text{todas } y_i} p_{X,Y}(x, y_i)$$

$$F_X(x) \equiv P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i)$$

b. Distribución Condicional

Si la variable Y toma el valor y_0 , las verosimilitudes de los varios valores de la otra variable son dadas por $p_{X,Y}(x, y_0)$

Si se renormalizan estos valores de modo que su suma es igual a la unidad, formarían una función de distribución propia que se llama función de distribución condicional de X dado Y, $p_{X/Y}(x,y)$.

$$\begin{aligned}
 P_{X,Y}(x,y) &= P(X=x/Y=y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)} \\
 &= \frac{p_{X,Y}(x,y)}{\sum_{\text{todos } x_i} p_{X,Y}(x_i,y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}
 \end{aligned}$$

Se debe llamar la atención en que el denominador es la distribución marginal de Y evaluada al valor dado de Y. De una manera similar:

$$P_{X/(Y>y)}(x,y) = P(X=x/Y>y) = \frac{\sum_{y_j > y} p_{X,Y}(x,y_j)}{\sum_{y_j > y} p_Y(y_j)}$$

De una manera general escribimos:

$$p_{X/Y}(x,y) = p_{X/(Y=y)}(x,y)$$

C. DISTRIBUCION CONJUNTA

La distribución conjunta se obtiene de la condicional como sigue:

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{X/Y}(x,y) p_Y(y)$$

Ejemplo 48. La distribución conjunta discreta de los flujos medios anuales X y Y de dos ríos se presenta en la tabla 11:

Tabla 11. Distribución conjunta $P_{X,Y}(x,y)$ de los caudales medios anuales de los dos ríos X e Y

		Caudal medio anual del río X en m^3/s .				
		20	25	30	35	40
Caudal medio anual del río Y en m^3/s .	60	0.04	0.10	0.03	0.02	0
	70	0	0.05	0.25	0.07	0
	80	0	0	0.10	0.21	0.06
	90	0	0	0	0.02	0.05

1. Graficar la función de distribución conjunta $p_{X,Y}(x,y)$
2. Hallar las distribuciones marginales de X y Y
3. Hallar la distribución condicional de X para $y = 80 m^3/s$.
4. Hallar la distribución condicional de Y para $x < 30 m^3/s$.
5. ¿Son los caudales medios anuales de los ríos X y Y independientes?.

Solución

1.

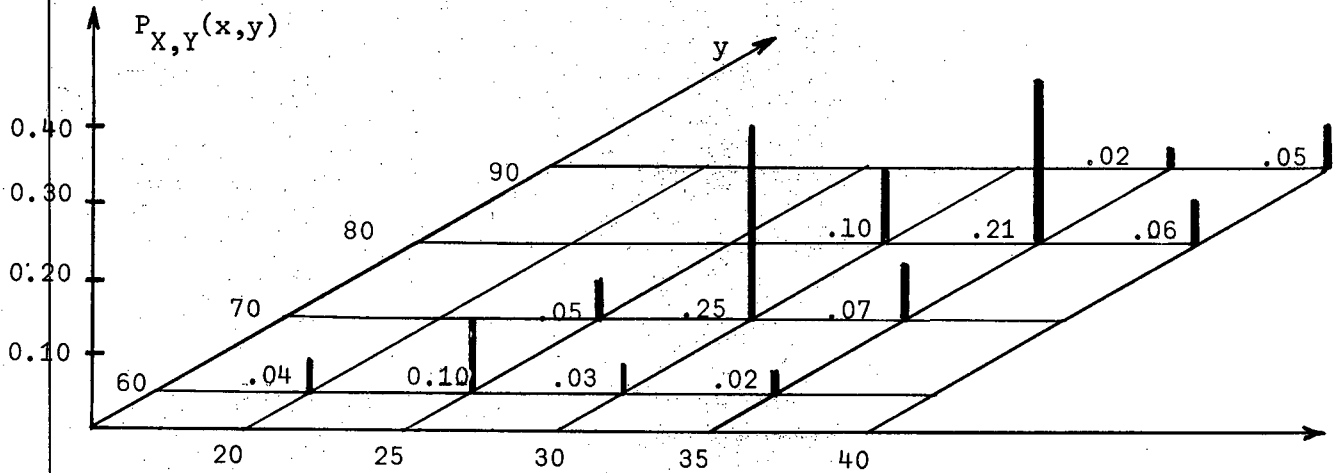


Figura 26. Distribución conjunta discreta de los caudales medios anuales de dos ríos X y Y.

2.a. Distribución marginal de X

$$p_X(x) = \sum_{y_i=60}^{90} p_{X,Y}(x, y_i) \text{ para } x = x$$

$$x = 20 \quad p_X(20) = \sum_{y_i=60}^{90} p_{X,Y}(20, y_i) =$$

$$= p_{X,Y}(20, 60) + p_{X,Y}(20, 70) + p_{X,Y}(20, 80) + p_{X,Y}(20, 90) =$$

$$= 0.04 + 0 + 0 + 0 = 0.04$$

De una manera similar obtenemos

$$x = 25 \quad p_X(25) = \sum_{y_i=60}^{90} p_{X,Y}(25, y_i) = 0.10 + 0.05 + 0 + 0 = 0.15$$

$$x = 30 \quad p_X(30) = \sum_{y_i=60}^{90} p_{X,Y}(30, y_i) = 0.03 + 0.25 + 0.10 + 0 = 0.38$$

$$x = 35 \quad p_X(35) = \sum_{y_i=60}^{90} p_{X,Y}(35, y_i) = 0.02 + 0.07 + 0.21 + 0.02 = 0.32$$

$$x = 40 \quad p_X(40) = \sum_{y_i=60}^{90} p_{X,Y}(40, y_i) = 0 + 0 + 0.06 + 0.05 = 0.11$$

La distribución marginal de $x, p_X(x)$ es:

x	$p_X(x)$
20	0.04
25	0.15
30	0.38
35	0.32
40	0.11

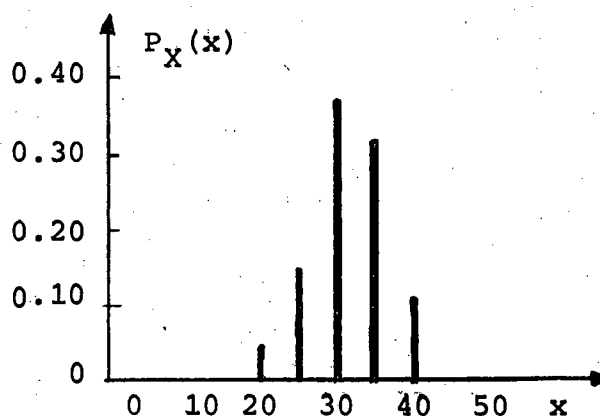


Fig. 27. Distribución marginal de X .

2.b. Distribución marginal de Y .

$$p_Y(y) = \sum_{x_i=20}^{40} p_{X,Y}(x_i, y) \text{ para } Y = y$$

$$y = 60 \quad p_Y(60) = \sum_{x_i=20}^{40} p_{X,Y}(x_i, 60) = 0.04 + 0.10 + 0.03 + 0.02 + 0$$

$$p_Y(60) = 0.19$$

$$y = 70 \quad p_Y(70) = \sum_{x_i=20}^{40} p_{X,Y}(x_i, 70) = 0 + 0.05 + 0.25 + 0.07 + 0 = 0.37$$

$$y = 80 \quad p_Y(80) = \sum_{x_i=20}^{40} p_{X,Y}(x_i, 80) = 0 + 0 + 0.10 + 0.21 + 0.06 = 0.37$$

$$y = 90 \quad p_Y(90) = \sum_{x_i=20}^{40} p_{X,Y}(x_i, 80) = 0+0+0+0.02 + 0.05 = 0.07$$

La distribución marginal de Y es:

y	$p_Y(y)$
60	0.19
70	0.37
80	0.37
90	0.07

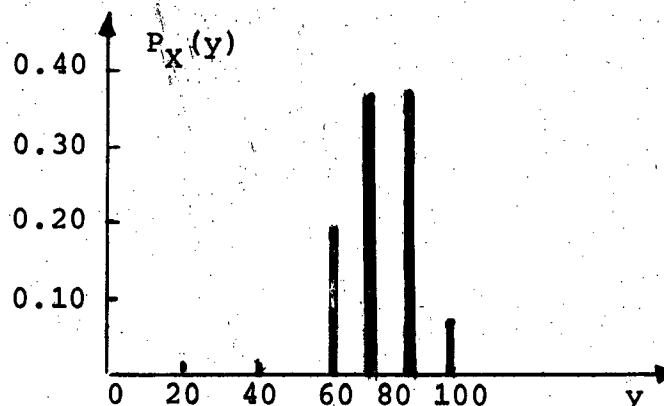


Fig. 28. Distribución marginal de Y.

3. La distribución condicional de X dado $Y = y_0$ es:

$$p_{X/(Y=y_0)}(x, y_0) = \frac{p_{X,Y}(x, y_0)}{\sum_{\text{todas } x_i} p_{X,Y}(x_i, y_0)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y_0)}$$

$$x = 20 \quad p_{X/(Y=80)}(20, 80) = \frac{p_{X,Y}(20, 80)}{p_Y(80)} = \frac{0}{0.37} = 0$$

$$x = 25 \quad p_{X/(Y=80)}(25, 80) = \frac{p_{X,Y}(25, 80)}{p_Y(80)} = \frac{0}{0.37} = 0$$

$$x = 30 \quad p_{X/(Y=80)}(30, 80) = \frac{p_{X,Y}(30, 80)}{p_Y(80)} = \frac{0}{0.37} = 0.27$$

$$x = 35 \quad p_{X/(Y=80)}(35, 80) = \frac{p_{X,Y}(35, 80)}{p_Y(80)} = \frac{0.21}{0.37} = 0.57$$

$$x = 40 \quad p_{X/(Y=80)}(40, 80) = \frac{p_{X,Y}(40, 80)}{p_Y(80)} = \frac{0.06}{0.37} = 0.16$$

La distribución condicional de X dado que $Y = 80$ es:

x	$p_{X/Y}(x, 80)$
20	0
25	0
30	0.27
35	0.57
40	0.16

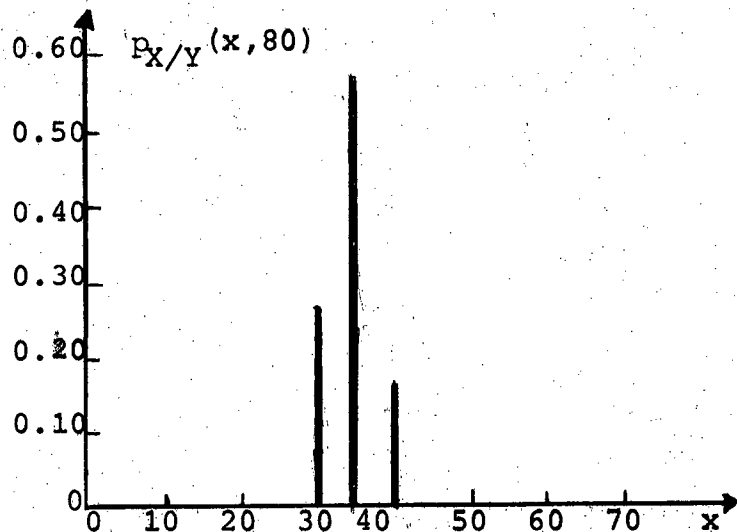


Fig. 29. Distribución condicional de X dado $Y=80$.

4. La probabilidad condicional de Y dado $X < x_0$ es:

$$p_{Y/(X < x_0)}(x_i, y) = \frac{\sum_{x_i < x_0} p_{X,Y}(x_i, y)}{\sum_{x_i < x_0} p_X(x_i)}$$

$$y = 60 \quad p_{Y/(X < 30)}(x_i, 60) = \frac{\sum_{x_i < 30} p_{X,Y}(x_i, 60)}{\sum_{x_i < 30} p_X(x_i)} =$$

$$= \frac{p_{X,Y}(20, 60) + p_{X,Y}(25, 60)}{p_X(20) + p_X(25)} = \frac{0.04 + 0.10}{0.04 + 0.15} = \frac{0.14}{0.19} = 0.74$$

$$y = 70 \quad p_{Y/(X < 30)}(x_i, 70) = \frac{\sum_{x_i < 30} p_{X,Y}(x_i, 70)}{\sum_{x_i < 30} p_X(x_i)} =$$

$$= \frac{0 + 0.05}{0.04 + 0.15} = 0.26$$

$$y = 80 \quad P_{Y/(X<30)}(x_i, 80) = \frac{0}{0.19} = 0$$

$$y = 90 \quad P_{Y/X<30}(x_i, 90) = \frac{0}{0.19} = 0$$

La distribución condicional de Y dado $X < 30$ es :

Y	$P_{Y/X < 30}$
60	0.74
70	0.26
80	0
90	0

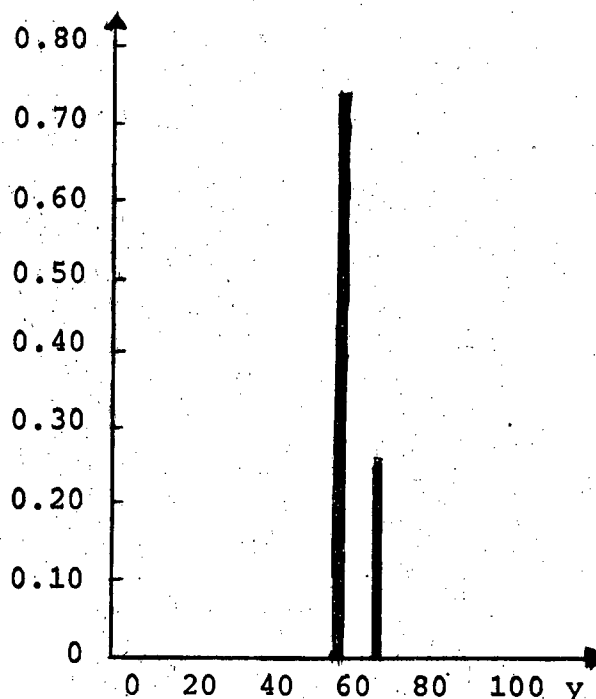


Fig. 30. Distribución condicional de Y dado que $X < 30$

5. Las variables X y Y no son independientes puesto que:

$$P_{X/Y} \neq P_X$$

También se puede mostrar que $p_{X,Y}(x,y) \neq p_X(x) p_Y(y)$

Los caudales anuales de los ríos X y Y son relacionados.

2. VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

La densidad conjunta de dos variables continuas se define como la función $f_{X,Y}(x,y)$ tal que la probabilidad de que X esté en el intervalo $(x, x+dx)$ y Y en el intervalo $(y, y+dy)$ sea igual a $f_{X,Y}(x,y)dx dy$. Para que $f_{X,Y}(x,y)$ sea una densidad válida se debe tener:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

La probabilidad de que X y Y caigan dentro de la región rectangular o campo $a < x < b$ y $c < y < d$, es dada por:

$$p[(a < X < b) \cap (c < Y < d)] = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

La distribución conjunta acumulada se define como:

$$F_{X,Y}(x,y) = P [(-\infty < X < x) \cap (-\infty < Y < y)] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) du dv$$

En consecuencia:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$$

a. Distribución Marginal

La densidad marginal de X se obtiene integrando la densidad conjunta sobre todos los valores de Y , o sea:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

La distribución marginal acumulada es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

o también

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,y) du dy = F_{X,Y}(x, \infty)$$

b. Distribución Condicional

La densidad condicional de X dado $Y = y_0$ se escribe $f_{X/Y}(x, y_0)$ y es dada por:

$$f_{X/Y}(x, y_0) = \frac{f_{X,Y}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

donde $f_{X,Y}(x, y_0)$ es la densidad conjunta evaluada para $Y = y_0$.

$f_Y(y_0)$ es la distribución marginal de Y evaluada para $Y = y_0$.

La distribución condicional acumulada de X dado $Y = y_0$ es:

$$F_{X/Y}(x, y_0) = P(X \leq x / Y = y_0) = \int_{-\infty}^x f_{X/Y}(u, y) du$$

La densidad condicional puede ser generalizada como sigue:

$$f_{X/(Y > y_0)}(x, y) = \frac{\int_{y_0}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy}{\int_{y_0}^{\infty} f_Y(y) dy}$$

Ejemplo 49. Los caudales mensuales de dos ríos tienen la distribución conjunta siguiente:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(180 - x - y) & 0 \leq x \leq 30 ; 50 \leq y \leq 150 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Determinar:

1. El valor de k para que la densidad $f_{X,Y}(x, y)$ sea válida.
2. La probabilidad de que $10 < X < 15$ y $100 < Y < 150$
3. La probabilidad de que $20 \leq X \leq 30$
4. La probabilidad de que $X + Y > 120$
5. La densidad y distribución acumulada marginales de X
6. La densidad y distribución acumulada condicional de Y dado $X = 10$.
7. La probabilidad de que Y sea superior a 120 dado que X está comprendido entre 20 y 30.

8. La distribución acumulativa conjunta de Y y Y.

1. Para que $f_{X,Y}(x,y)$ sea una densidad de probabilidad se debe tener

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

o sea

$$\int_0^{30} \int_{50}^{150} k (180-x-y) dx dy = 1$$

Integrando con respecto a y se obtiene

$$\int_0^{30} k \left[180y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{50}^{150} dy = 1$$

o sea

$$k \int_0^{30} (8000 - 100x) dx = 1$$

Integrando con respecto a X se obtiene:

$$k(195000) = 1$$

$$k = \frac{1}{195000}$$

Entonces:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{195000} (180-x-y) \quad 0 < x < 30 \quad 50 < y < 150$$

$$2. P(10 < X < 15 \cap 100 < Y < 150) = \int_{10}^{15} \int_{100}^{150} \frac{1}{195000} (180-x-y) dx dy = 0.055$$

$$3. P(20 \leq X \leq 30) = \int_{20}^{30} \int_{50}^{150} \frac{1}{195000} (180-x-y) dx dy = 0.282$$

$$4. P(X + Y > 120)$$

$X + Y > 120$ es equivalente a $Y > 120 - X$, o sea

$$P(X + Y > 120) = P(Y > 120 - X) = \int_0^{30} \int_{120-x}^{150} \frac{1}{195000} (180-x-y) dx dy =$$

$$0.25$$

5. Densidad marginal de x :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{50}^{150} \frac{1}{195000} (180-x-y) dy = \frac{8000 - 100x}{195000}$$

Distribución acumulada marginal de x :

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(x) dx = \frac{8000x - 50x^2}{195000} =$$

6. Densidad condicional de x dado $x = x_0$.

$$f_{Y/X}(x_0, y) = \frac{f_{X,Y}(x_0, y)}{f_X(x_0)} = \frac{\frac{1}{195000} (180 - x_0 - y)}{\frac{1}{195000} (8000 - 100x_0)} = \frac{180 - x_0 - y}{8000 - 100x_0}$$

Por ejemplo para $x_0 = 10$

$$f_{Y/X}(10, y) = \frac{170 - y}{7000}$$

La distribución acumulativa condicional de Y dado X es:

$$F_{Y/X}(10, y) = \frac{y}{50} \frac{170-y}{7000} = \frac{1}{7000} (170y - \frac{1}{2} y^2 - 7250)$$

$$7. P(Y > 120 / 20 \leq X \leq 30) = \frac{P(Y > 120, 20 \leq X \leq 30)}{P(20 \leq X \leq 30)}$$

$$P(Y > 120 \cap 20 \leq X \leq 30) = \int_{120}^{150} \int_{20}^{30} \frac{1}{195000} (180 - x - y) dy dx = 0.031$$

$$P(Y > 120 / 20 \leq X \leq 30) = \frac{0.031}{0.282} = 0.109$$

8. La distribución acumulativa conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ está dada por:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) du dv$$

Para definir esta integral conviene definir bien mediante una gráfica las regiones en que $f_{X,Y}(x,y)$ está definida. En la figura 31 se han identificado nueve regiones resultantes del campo de definición de $f_{X,Y}(x,y)$.

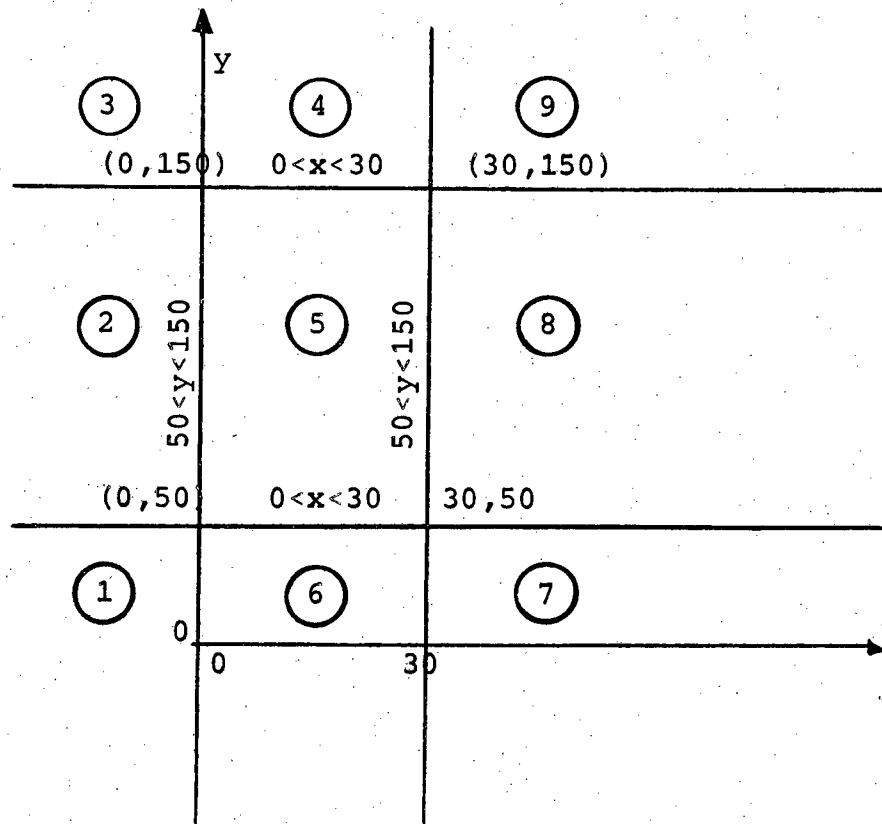


Figura 31

En la región 1 $f_{X,Y}(x,y) = 0$ y en consecuencia

$$F_{X,Y}(x,y) = 0 \quad x < 0, \quad y < 50$$

En la región 2 $f_{X,Y}(x,y) = 0$ puesto que $x < 0$ aunque $50 < y < 150$.

Una situación similar se presenta en las regiones 3, 6 y 7. De una manera general la distribución conjunta acumulada es igual a cero siempre que $x < 0$ ó $y < 50$.

En la región 5 tenemos:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_{50}^y \frac{1}{195000} (180-u-v) du dv$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{195000} (180xy - 7750x - \frac{1}{2}x^2y + 25x^2 - \frac{1}{2}xy^2)$$

$$0 < x < 30, 50 < y < 150$$

En la región 4 tenemos:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_{50}^{150} \frac{180-u-v}{195000} du dv$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{8000x - 50x^2}{195000} \quad 0 < x < 30, y > 150$$

El mismo resultado ha sido obtenido como distribución marginal acumulada de x.

En la región 8 tenemos:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{50}^y \int_0^{30} \frac{180-u-v}{195000} du dv$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{4950y - 210000 - 15y^2}{195000} \quad x \geq 30, 50 < y < 150$$

Esta expresión es idéntica a la distribución marginal de y.

En la región 9 tenemos:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^{30} \int_{50}^{150} \frac{180-u-v}{195000} du dv$$

$$F_{X,Y}(x,y) = 1 \quad x \geq 30, y \geq 150$$

Combinando estos resultados parciales podemos definir la distribución acumulada conjunta de la siguiente manera:

$$F_{X,Y}(x,y) = 0 \quad x \leq 0 \text{ ó } y \leq 50$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{195000} (180xy - 7750x - 1/2x^2y + 25x^2 - 1/2xy^2)$$

$$0 < x < 30, 50 < y < 150$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{8000x - 50x^2}{195000} \quad 0 < x < 30, y > 150$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{4950y - 210000 - 15y^2}{195000} \quad x \geq 30, 50 < y < 150$$

$$F_{X,Y}(x,y) = 1 \quad x > 30, y > 150$$

VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES

Si la distribución condicional de X dado Y es igual a la distribución marginal de X, se dice que las dos variables X y Y son estocásticamente independientes.

Si dos variables X y Y son independientes se debe tener, según las variables son discretas o continuas:

$$P_{X/Y}(x,y) = P_X(x) \quad \text{ó} \quad f_{X/Y}(x,y) = f_X(x)$$

$$P_{Y/X}(x,y) = P_Y(y) \quad \text{ó} \quad f_{Y/X}(x,y) = f_Y(y)$$

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) P_Y(y) \quad \text{ó} \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$F_{X/Y}(x,y) = F_X(x)$$

$$F_{Y/X}(x,y) = F_Y(y)$$

En la práctica el ingeniero asume que dos o más variables son independientes porque piensa que no son relacionadas. Muchos de los problemas que confronta el ingeniero resultan demasiado complejos de no adoptarse la asunción de la independencia entre las variables.

MUESTRA ALEATORIA

Consideramos el experimento que consiste en lanzar una vez una moneda y observar si aparece cara o sello. Sea el evento:

$X_1 = [\text{el número de caras que aparecen en el primer lanzamiento es } x_1]$

Obviamente x_1 puede tener el valor 0 ó el valor 1. La probabilidad de ocurrencia de cualquiera de estos dos valores es $1/2$. La función de probabilidad de masa de X_1 es:

$$p_{X_1}(x_1) = p^{x_1} q \quad x_1 = 0, 1$$

$$\text{donde } q = 1-p = 1-1/2 = 1/2$$

$$p_{X_1}(x_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_1} \quad x_1 = 0, 1$$

Lanzamos la moneda una segunda vez y definimos X_2 como sigue:

$X_2 = [\text{el número de caras que aparecen en el segundo lanzamiento es } x_2]$

La variable x_2 toma como valor 0 ó 1. La función de masa de X_2 es:

$$p_{X_2}(x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_2}$$

Los eventos X_1 y X_2 son independientes, o sea, el valor x_1 , no está influido por el valor x_1 . La distribución conjunta de las variables X_1 y X_2 se obtiene como:

$$p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x_2}$$

Se dice que una muestra de tamaño 2 sacada de una tal población es una muestra aleatoria. En otros términos, cuando cada miembro de la población tiene la misma distribución y si un miembro es independiente del otro, se dice que una muestra de tamaño dos es sacada de la función de masa $p_X(x)$. Este concepto puede ser extendido a variables continuas y también a más de dos variables como sigue:

Sean n variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ conjuntamente independientes, cada una con densidad $f_X(x)$. Entonces se dice que $X_1, X_2, \dots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño n sacada de $f(x)$. Consecuentemente para conseguir una muestra aleatoria, los miembros de una muestra son to dos obtenidos bajo las dos condiciones siguientes:

- (a) cada miembro de la población tiene el mismo chance de ser incluido en la muestra.
- (b) la presencia de un miembro en la muestra no afecta el chance de otro miembro de estar en la muestra.

Bajo estas condiciones las variables aleatorias correspondientes a cada miembro de la muestra, tendrán una distribución común y serán independientes cumpliendo así con las condiciones de una muestra aleatoria.

En el experimento consistiendo en sacar una bola de una urna conteniendo bolas de diferentes colores con reemplazamiento de la bola, se cumple con las dos condiciones de una muestra aleatoria. En caso de que no haya reemplazamiento, sólo se puede hablar de muestra aleatoria si la población es muy grande o sea infinita.

Otra situación en que el ingeniero obtiene una muestra aleatoria, es la en que hace un experimento con repeticiones. El caso más común es el de repetir varias veces la medición de una cantidad desconocida. Las repeticiones deben efectuarse bajo condiciones similares y una medición no debe influir cualquier otra.

VI. DISTRIBUCIONES DERIVADAS

En ingeniería encontramos a menudo variables aleatorias que son relacionadas a otras mediante una formulación matemática o lógica. De conocer la distribución de la o las variables independientes se puede determinar la distribución de la variable dependiente. A continuación se presentan algunas técnicas que permiten tal determinación.

A. DISTRIBUCION DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Sea $\underline{X}$ la variable aleatoria y $\underline{Y}$ la variable relacionada con $\underline{X}$ mediante $Y=g(X)$. Se presentarán aquí los métodos más utilizados para la determinación de $f_Y(y)$ ó $F_Y(y)$ a partir de la distribución conocida $f_X(x)$ ó $F_X(x)$.

1. FUNCIONES UNIVOCAS Y MONOTONICAS

El caso más simple es aquel en que la función $Y=g(X)$ es unívoca y monótona. En otros términos, existe un sólo valor de $\underline{x}$ para cada valor de $\underline{y}$, vice versa, también $\underline{y}$ siempre aumenta cuando $\underline{x}$ aumenta. Bajo estas condiciones existe la función inversa $x=g^{-1}(y)$ y $\underline{Y}$ es inferior o igual a un valor y_0 si y sólo si $\underline{X}$ es inferior a algún valor x_0 , este valor particular de la función siendo $y_0=g(x_0)$.

Si se tiene la función de densidad $f_X(x)$ se calcula $f_Y(y)$ como:

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Alternativamente, se puede determinar $F_Y(y)$ de la siguiente manera:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[g(X) \leq y] = P[X \leq g^{-1}(y)] = F_X[g^{-1}(y)]$$

Ejemplo 50

Supongamos que la variable aleatoria admite la siguiente densidad:

$$f_X(x) = k e^{-\lambda(x-c)^2}$$

Sea la función $\underline{y}$ tal que

$$y = g(x) = e^x$$

Entonces

$$x = g^{-1}(y) = \ln y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(\ln y)}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$f_X[g^{-1}(y)] = f(\ln y) = k e^{-\lambda(\ln y - c)^2}$$

$$f_Y(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| f[g^{-1}(y)] = \frac{k}{y} e^{-\lambda(\ln y - c)^2}$$

Ejemplo 51

Sea $\underline{X}$ una variable aleatoria admitiendo la siguiente densidad:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 1 & 0 < x < 1 \\ &= 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

Sea la función $Y = 3X + 6$

- Hallar la función de densidad de $\underline{y}$
- Hallar la distribución acumulada de $\underline{X}$
- Utilizando la distribución acumulada de $\underline{X}$ derivar la de $\underline{y}$.

Solución

a) Calculamos

$$x = g^{-1}(y) = \frac{y-6}{3}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d[g^{-1}(y)]}{dy} = \frac{1}{3}$$

$$f_X[g^{-1}(y)] = f_X\left(\frac{y-6}{3}\right) = 1$$

$$0 < \frac{y-6}{3} < 1$$

$$= 0$$

en cualquier otro caso

Entonces

$$f_Y(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| f_X[g^{-1}(y)] = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$6 < y < 9$$

$$= 0$$

en cualquier otro caso

b) La distribución acumulativa de $\underline{x}$ se define como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

Para $x \leq 0$, $f_X(x) = 0$, por lo tanto $F_X(x) = 0$

Para $0 < x < 1$, $f_X(x) = 1$ y

$$F_X(x) = \int_0^x 1 dx = x$$

Para $x \geq 1$, $f_X(x) = 0$ y

$$F_X(x) = \int_0^1 1 dx + \int_1^{\infty} 0 dx = 1$$

En resumen:

$$F_X(x) = 0 \quad x \leq 0$$

$$F_X(x) = x \quad 0 < x < 1$$

$$F_X(x) = 1 \quad x \geq 1$$

c) La función dada es

$$Y = 3X + 6$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3X + 6 \leq y) = P(X \leq \frac{y-6}{3}) = F_X(\frac{y-6}{3})$$

$$\text{Para } x \leq 0 \quad y \leq 6 \quad F_Y(y) = F_X(\frac{y-6}{3}) = 0$$

$$\text{Para } 0 < x < 1 \quad 6 < y < 9 \quad F_Y(y) = F_X(\frac{y-6}{3}) = \frac{y-6}{3}$$

$$\text{Para } x \geq 1 \quad y \geq 9 \quad F_Y(y) = F_X(\frac{y-6}{3}) = 1$$

En resumen

$$F_Y(y) = 0 \quad y \leq 6$$

$$F_Y(y) = \frac{y-6}{3} \quad 6 < y < 9$$

$$F_Y(y) = 1 \quad y \geq 9$$

2. TRANSFORMACION GENERAL

En muchos casos, las funciones de variables aleatorias no son monotónicas ni unívocas. En tales casos, se puede determinar la distribución acumulada de la función como se explica a continuación.

Sea la función

$$Y = g(x)$$

Por definición

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

Pero se tiene

$$P(Y < y) = P[\underline{X} \text{ toma los valores } \underline{x} \text{ para los cuales } g(x) \leq y]$$

$$= \int_{R_Y} f_X(x) dx$$

donde R_Y es aquella región donde $g(x)$ es inferior o igual a y .

En la Figura 32 se han graficado la función $y=g(x)$, la densidad $f_X(x)$ y la distribución acumulada $F_X(x)$. En la gráfica superior se ha identificado la región R_Y donde $g(x) \leq y_0$, o sea los intervalos

$$X \leq x_1$$

Y

$$x_2 \leq X \leq x_3$$

De modo que

$$P(Y \leq y_0) = P(X \leq x_1 \cup x_2 \leq X \leq x_3)$$

$$P(Y \leq y_0) = P(X \leq x_1) + P(x_2 \leq X \leq x_3)$$

En la gráfica (b) de la densidad de $\underline{X}$ se han identificado las áreas cuya suma es igual $P(Y \leq y_0)$, o sea

$$P(Y \leq y_0) = P(X \leq x_1) + P(x_2 \leq X \leq x_3)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f_X(x) dx.$$

En la gráfica (c) de la Figura 32, se ha presentado un procedimiento alternativo para calcular $P(Y \leq y_0)$. Se basa en el uso de la distribución acumulada $F_X(x)$, o sea

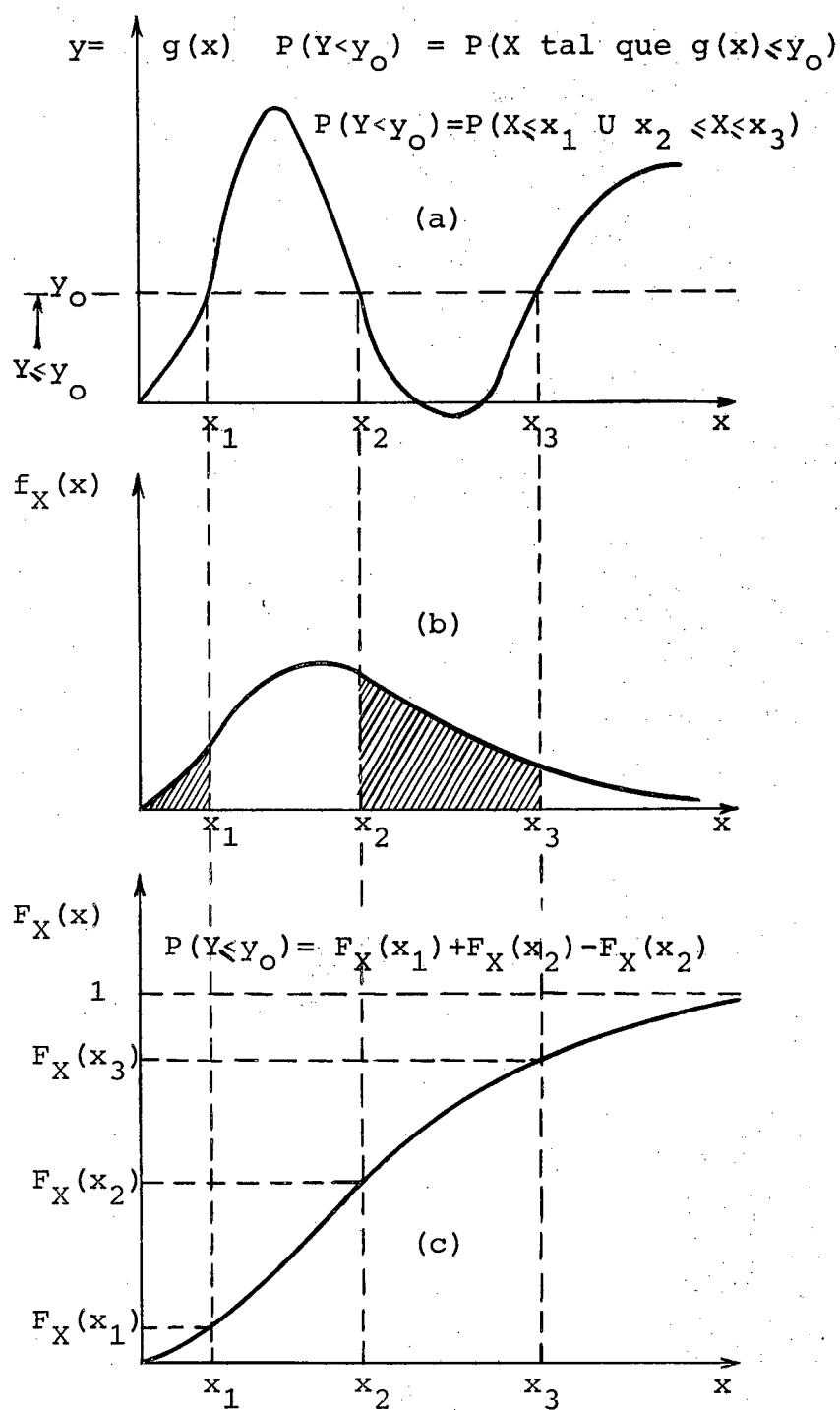


Figura 32. Distribución derivada, caso general

$$\begin{aligned}
 P(Y \leq y_0) &= P(X \leq x_1) + P(x_2 \leq X \leq x_3) \\
 &= F_X(x_1) + F_X(x_3) - F_X(x_2)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 52

Los caudales máximos anuales Q del río Paguey en El Paso se ajustan a la siguiente distribución acumulada:

$$F_Q(q) = e^{-0.003049(q - 950.528)}$$

En la Figura 33 se presenta el costo total C de reservorios y mejoramiento de cauce para control de avenidas como función de los caudales máximos del río Paguey en El Paso.

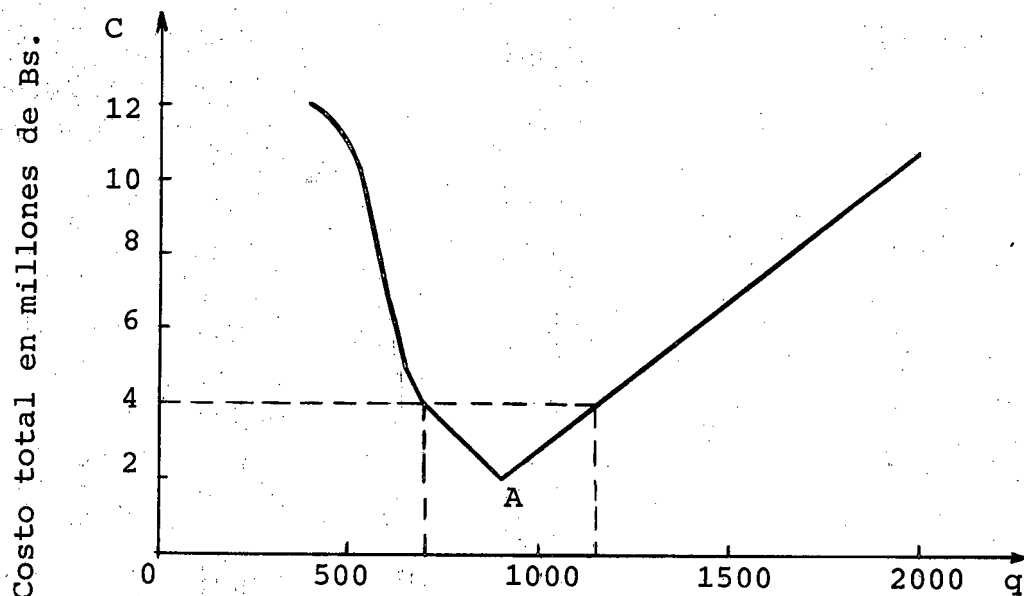


Figura 33. Función de costo total de control de avenidas.

Debajo de la gráfica de la función de costo dibujamos la distribución acumulativa de los caudales máximos anuales del río Paguey (Figura 34).

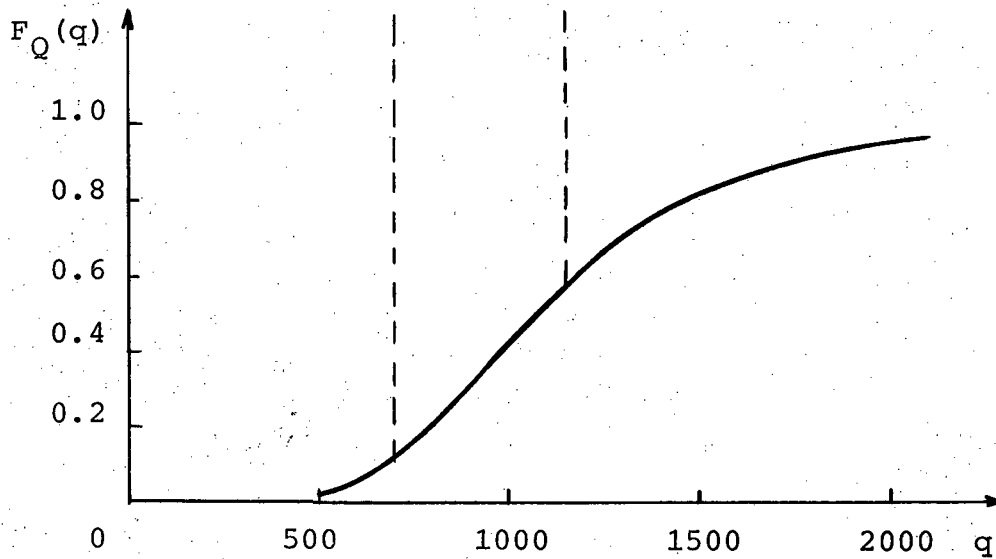


Figura 34. Distribución acumulada de los caudales máximos anuales del río Paguey en El Paso.

En la Figura 33, el punto A corresponde al costo mínimo, o sea, $c = 2 \times 10^6$ Bs. En consecuencia:

$$F_C(c) = 0, \quad c \leq 2 \times 10^6 \text{ Bs}$$

En las Figuras 33 y 34 se puede apreciar que a $c \leq 4 \times 10^6$ Bs corresponde el intervalo $700 \leq q \leq 1150$, o sea

$$\begin{aligned} F_C(4 \times 10^6) &= P(700 \leq q \leq 1150) = F_X(1150) - F_X(700) \\ &= 0.57 - 0.11 = 0.46 \end{aligned}$$

$$F_C(c) = 0.46, \quad c = 4 \times 10^6 \text{ Bs}$$

De una manera similar calculamos

$$\begin{aligned} F_C(6 \times 10^6) &= P(630 \leq q \leq 1400) = F_X(1400) - F_X(630) \\ &= 0.77 - 0.07 = 0.70 \end{aligned}$$

$$F_C(c) = 0.70, \quad c = 6 \times 10^6$$

$$F_C(8 \times 10^6) = P(580 \leq q \leq 1650)$$

$$= F_X(16500) - F_X(580) = 0.88 - 0.05 = 0.83$$

$$F_C(c) = 0.83, \quad c = 8 \times 10^6 \text{ Bs}$$

Siguiendo este procedimiento podemos calcular $F_C(c)$ para cualquier valor de C_X . En otros términos podemos desarrollar la distribución de $\underline{C}$ a partir de la de $\underline{Q}$.

Ejemplo 53

Una variable aleatoria discreta $\underline{X}$ admite la siguiente función de masa:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{cases} \quad \text{para } x = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{cases}$$

Derivar la distribución de la función

$$Y = (X - 3)^2$$

La probabilidad de que $\underline{Y}$ toma un valor y es igual a la suma de las probabilidades de aquellos valores de $\underline{X}$ para los cuales $Y=y$. Por ejemplo, $Y=1$ para $X=2$ y $X=4$, en consecuencia:

$$p_Y(1) = p_X(2) + p_X(4) = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

$$p_Y(0) = p_X(3) = 0.2$$

$$p_Y(4) = p_X(1) + p_X(5) = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$p_Y(9) = p_X(0) = 0.1$$

En resumen:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{cases} \quad \text{para } y = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{cases}$$

B. DISTRIBUCION DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Existen en la ingeniería casos en que una variable es una función de dos o más variables aleatorias. Por ejemplo, una avenida es función de la duración y de la lámina de precipitación caída durante una tormenta. La velocidad del flujo en una sección del cauce de un río es función del caudal y del área de la sección.

El problema se presenta entonces de la siguiente manera: Sean $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ dos variables cuya distribución conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ ó $F_{X,Y}(x,y)$ está dada. Se quiere determinar la distribución de la variable $\underline{Z}$ que es una función de $\underline{X}$ y $\underline{Y}$, o sea, $Z=z(x,y)$.

1. DISTRIBUCION DERIVADA POR ENUMERACION

En caso de que las variables aleatorias $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ sean discretas, la densidad $p_Z(z)$ o la distribución acumulada $F_Z(z)$ de la variable $\underline{Z}$ puede ser desarrollada por enumeración. La probabilidad de que $\underline{Z}$ sea igual a un valor particular z es la suma de las probabilidades de los pares de valores $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ tales que $z(x,y) = z$. De esta manera se determina $f_Z(z)$ para cada valor posible de z a partir de $f_{X,Y}(x,y)$.

Alternativamente, se puede determinar la probabilidad de que $\underline{Z}$ sea inferior o igual a z , o sea, $F_Z(z)$ es igual a la suma de las probabilidades de todos los pares (x,y) para los cuales $z(x,y) \leq z$.

Ejemplo 54

La distribución conjunta $p_{X,Y}(x,y)$ de los caudales medios anuales $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ de dos ríos se presenta en la Tabla 12.

- Derivar la función de masa $p_Z(z)$ a partir de $p_{X,Y}(x,y)$ si $\underline{Z}$ es la función $Z = \text{Max}\{X,Y\}$.
- Derivar la distribución acumulada $F_S(s)$ a partir de $p_{X,Y}(x,y)$ si $\underline{S}$ es la suma $S = X + Y$.

TABLA 12. Distribución bivariada de los caudales medios mensuales $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ supuestos discretos.

		X		
		5	20	50
Y	10	0.18	0.15	0.02
	25	0.15	0.22	0.05
	40	0.03	0.05	0.15

Solución

- Se derivará la función de masa $p_Z(z)$ enumerando para cada valor $\underline{z}$ de $\underline{Z}$ los pares (x,y) que corresponden a $Z=z$. Luego se obtendrá la probabilidad de que $Z=z$ sumando las probabilidades de los pares correspondientes (x,y) . El procedimiento se ilustra en la Tabla 13 y en la Tabla 14.
- En la Tabla 13 se puede identificar todos los pares (x,y) tales que $\underline{S}$ es inferior o igual a $\underline{s}$. La suma de las probabilidades de tales pares es igual a $P(X \leq s)$. En la Tabla 15 se ilustra el procedimiento.

TABLA 13. Enumeración de (x,y) y de los valores correspondientes de $\underline{z}$ y $\underline{s}$.

(x,y)	$p_{X,Y}(x,y)$	$z=\max[x,y]$	$s = x+y$
(5,10)	0.18	10	15
(5,25)	0.15	25	30
(5,40)	0.03	40	45
(20,10)	0.15	20	30
(20,25)	0.22	25	45
(20,40)	0.05	40	60
(50,10)	0.02	50	60
(50,25)	0.05	50	75
(50,40)	0.15	50	90

TABLA 14. Cálculo de $p_Z(z)$.

z	$P(Z=z) = \sum P(X \text{ y } Y \text{ tales que } Z = z)$	$p_Z(z) = P(Z = z)$
10	$p_{X,Y}(5,10) = 0.18$	0.18
20	$p_{X,Y}(20,10) = 0.15$	0.15
25	$p_{X,Y}(5,25) + p_{X,Y}(20,25) = 0.15 + 0.22$	0.37
40	$p_{X,Y}(5,40) + p_{X,Y}(20,40) = 0.03 + 0.05$	0.08
50	$p_{X,Y}(50,10) + p_{X,Y}(50,25) + p_{X,Y}(50,40) = 0.02 + 0.05 + 0.15$	0.22

TABLA 15. Cálculo de $F_S(s)$.

s	$P(S \leq s) = P(X, Y \text{ tales que } S \leq s)$	$F_S(s) = P(S \leq s)$
15	$P_{X,Y}(5,10) = 0.18$	0.18
30	$P_{X,Y}(5,10) + P_{X,Y}(5,25) + P_{X,Y}(20,10) =$ $0.18 + 0.15 + 0.15$	0.48
45	$P_{X,Y}(5,10) + P_{X,Y}(5,25) + P_{X,Y}(5,40) + P_{X,Y}(20,10)$ $+ P_{X,Y}(20,25) = 0.18 + 0.15 + 0.03 + 0.15 + 0.22$	0.73
60	$P_{X,Y}(5,10) + P_{X,Y}(5,25) + P_{X,Y}(5,40) + P_{X,Y}(20,10)$ $+ P_{X,Y}(20,25) + P_{X,Y}(20,40) + P_{X,Y}(50,10) =$ $0.18 + 0.15 + 0.03 + 0.15 + 0.22 + 0.05 + 0.02$	0.80
75	$P_{X,Y}(5,10) + P_{X,Y}(5,25) + P_{X,Y}(5,40) + P_{X,Y}(20,10)$ $+ P_{X,Y}(20,25) + P_{X,Y}(20,40) + P_{X,Y}(50,10) + P_{X,Y}(50,25)$ $0.18 + 0.15 + 0.03 + 0.15 + 0.22 + 0.05 + 0.02 + 0.05$	0.85
90	$P_{X,Y}(5,10) + P_{X,Y}(5,25) + P_{X,Y}(5,40) + P_{X,Y}(20,10)$ $+ P_{X,Y}(20,25) + P_{X,Y}(20,40) + P_{X,Y}(50,10) + P_{X,Y}(50,25)$ $+ P_{X,Y}(50,40) = 0.18 + 0.15 + 0.03 + 0.15 + 0.22$ $+ 0.05 + 0.02 + 0.05 + 0.15$	1.00

2. METODO DIRECTO

El concepto de la enumeración puede extenderse a funciones de dos variables continuas. Puesto que $\underline{Z}$ es una función de $\underline{X}$ y $\underline{Y}$, debemos obtener $F_Z(z_0)$ al calcular la probabilidad de que $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ estén en la región donde $z(x,y) \leq z_0$.

Ejemplo 55

Sean dos variables aleatorias $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ cuya distribución conjunta es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{384}(20 - x - y) & 0 < x < 12 \quad 4 < y < 8 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Hallar la distribución de $\underline{Z}$ donde $Z = \max[X,Y]$

Solución

- a) Puesto que $Z = \max[X,Y]$, las variables $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ deben ser inferior o igual a $\underline{Z}$.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P[\max[X,Y] \leq z] = P(X \leq z \cap Y \leq z) = F_{X,Y}(z,z)$$

Para determinar $F_Z(z)$ basta con reemplazar ambas variables $\underline{x}$ y $\underline{y}$ por $\underline{z}$ en la distribución acumulada $F_{X,Y}(x,y)$.

3. DISTRIBUCION DE LA SUMA DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Supongamos que se tiene $f_{X,Y}(x,y)$, la distribución bivariada de $\underline{X}$ y $\underline{Y}$. Sea la suma

$$S = X + Y$$

Se puede demostrar que

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s-y, y) dy$$

En caso de que X y Y fuesen independientes, se tendría:

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s-y) f_Y(y) dy$$

De una manera similar

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s-x) dx$$

Ejemplo 56

Se da la distribución bivariada

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{384}(20-x-y) & 0 < x < 12 \quad 4 < y < 18 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Hallar la densidad de S donde $S = X + Y$

$$f_S(s) = \int_0^{12} f_{X,Y}(x, s-x) dx = \int_0^{12} \frac{1}{384}(20-x-s+x) dx$$

$$f_S(s) = \frac{1}{384} [20x - sx]_0^{12} = \frac{1}{32}(20-s)$$

VII. MOMENTOS Y ESPERANZA MATEMATICA

A. CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Sea una variable aleatoria $\underline{X}$ con una distribución de tipo arbitrario. Se llama esperanza matemática al valor medio, o simplemente media, de $\underline{X}$, o sea,

$$m_X = E[X] = \sum_{\text{todos } x_i} x_i p_X(x_i) \quad \text{cuando la variable } \underline{X} \text{ es discreta}$$

y

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{cuando } \underline{X} \text{ es una variable continua}$$

Para una muestra de tamaño $\underline{n}$, la media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^r x_i f_i$$

1. ESPERANZA DE UNA FUNCION DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Sea $Y = g(x)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$$

donde $f_Y(y)$ es la distribución derivada de $\underline{Y}$ a partir de $f_X(x)$. Pero es más sencillo calcular la esperanza de $\underline{Y}$ como:

$$E(Y) = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad \text{si } \underline{Y} \text{ es una variable continua}$$

$$E(Y) = E[g(x)] = \sum_{\text{todos } x_i} g(x_i) p_X(x_i) \quad \text{si } \underline{Y} \text{ es una variable discreta}$$

2. MOMENTOS

Definimos como momento de orden n de la variable aleatoria X la esperanza de la función X^n , o sea,

$$m_X^{(n)} = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad \text{para } X \text{ continua}$$

y

$$m_X^{(n)} = E(X^n) = \sum_{\text{todos } x_i} x_i^n p_X(x_i) \quad \text{para } X \text{ discreta}$$

Para $n = 1$, el momento de orden 1 es la media $E(X)$.

3. MOMENTOS CENTRADOS

El momento centrado de la variable aleatoria X , o momento de X con respecto a su media, es, por definición:

$$\mu_X^{(n)} = E[(X - m_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n f_X(x) dx \quad \text{si } X \text{ es continua}$$

$$\mu_X^{(n)} = E[(X - m_X)^n] = \sum_{\text{todos } x_i} (x_i - m_X)^n p_X(x_i) \quad \text{si } X \text{ es discreta}$$

El momento centrado de orden 1 es cero.

a) Varianza

Es una medida de dispersión igual al segundo momento centrado:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E[(X - m_X)^2] = \sum_{\text{todos } x_i} (x_i - m_X)^2 p_X(x_i)$$

si X es discreta;

$$\sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx$$

si $\underline{X}$ es continua.

b) Desviación Típica

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

c) Coeficiente de variación

$$V_X = \frac{\sigma_X}{m_X}$$

d) Coeficiente de asimetría

$$\gamma_1 = \frac{u_X^{(3)}}{\sigma_X^3}$$

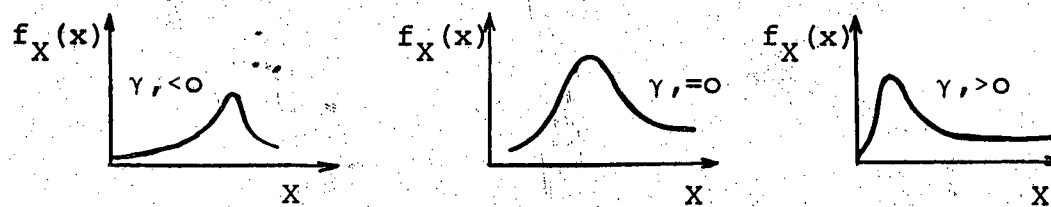


Figura 35. Efecto de γ , sobre la función de densidad $f_X(x)$

e) Coeficiente de curtosis (aplanamiento)

$$\gamma_2 = \frac{u_X^{(4)}}{\sigma_X^4}$$

f) Coeficiente de exceso

$$E = \gamma_2 - 3 \quad \text{donde } 3 \text{ es } \gamma_2 \text{ de la distribución normal.}$$

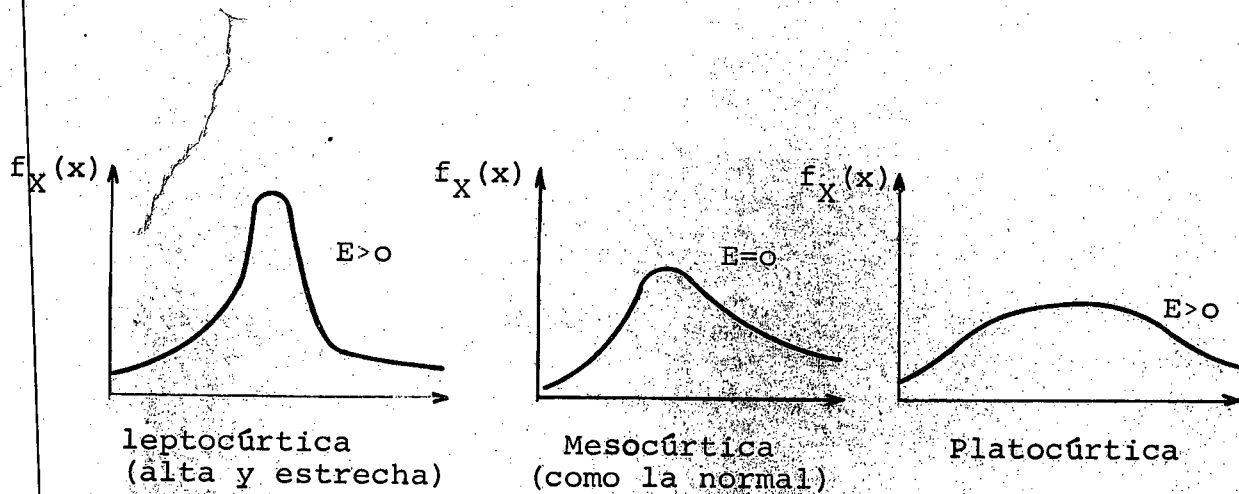


Fig. 36. Efecto de E sobre la función de densidad $f_X(x)$

4. PROPIEDADES DE LA ESPERANZA

$$E[c] = c$$

$$E(cX) = cE(X)$$

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

$$E[g_1(X) + g_2(X)] = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$$

$$E[X + Y] = E(X) + E(Y)$$

5. PROPIEDADES DE LA VARIANZA

Por definición:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - m_X)^2] = E(X^2 - 2m_X X + m_X^2) = E(X^2) - 2m_X E(X) + m_X^2 \\ &= E(X^2) - 2m_X^2 + m_X^2 = E(X^2) - m_X^2 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(c) = 0$$

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(a + bX) = b^2 \text{Var}(X)$$

Ejemplo 57

Sea la función $Y = bX + cX^2$

Calcular $E(Y) = m_Y$

$$m_Y = E(Y) = E(bX + cX^2) = bE(X) + cE(X^2) = bm_X + cE(X^2)$$

pero,

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - m_X^2 \quad \text{ó} \quad E(X^2) = \sigma_X^2 + m_X^2$$

∴

$$m_Y = bm_X + c(\sigma_X^2 + m_X^2)$$

6. ESPERANZA CONDICIONAL

Llamamos esperanza condicional al valor medio de la variable X calculado a partir de su densidad de probabilidad condicional, o sea,

$$E(X/X > x_0) = \int_{x_0}^{\infty} x f_{X/X > x_0}(x) dx$$

$$\text{Var}(X/X > x_0) = \int_{x_0}^{\infty} [x - E(X/X > x_0)]^2 f_{X/X > x_0}(x) dx$$

En general

$$E[g(x)/A] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X/A}(x) dx$$

$$E[g(x)/X = x_0] = g(x_0)$$

7. COSTOS Y BENEFICIOS ESPERADOS

Sean $\underline{C}$ y $\underline{B}$ el costo y beneficio correspondientes a una capacidad $\underline{X}$. En general

$$C = C(X)$$

$$Y \quad E(C) = E[C(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} C(x) f_X(x) dx$$

$$E(B) = E[B(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) f_X(x) dx$$

Ejemplo 58 - Capacidad de una Bomba

La demanda $\underline{X}$ durante la hora de verano de máxima demanda en una estación de bombeo de agua tiene una distribución triangular dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(100)^2} (x - 50) & 50 \leq x \leq 150 \text{ cfs} \\ \frac{2}{100} - \frac{1}{(100)^2} (x - 50) & 150 \leq x \leq 250 \text{ cfs} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La bomba existente es adecuada para una demanda de 0 a 150 cfs. Se debe instalar una bomba adicional que funcionará sólo si la demanda sobrepasa la capacidad de la bomba existente.

1. Desarrollar la distribución de la variable aleatoria $\underline{Y}$, la demanda sobre la nueva bomba.
2. Determinar la capacidad de la bomba adicional si se adopta el siguiente criterio de diseño:
 - a) la capacidad de la bomba adicional debe igualar el valor esperado de la demanda sobre la bomba.
 - b) la capacidad de la bomba adicional debe igualar el valor es

perado de la demanda sobre la bomba, dado que esta demanda será superior a cero.

- c) la capacidad de la bomba debe ser tal que el costo total esperado sea mínimo. Los costos incluyen (a) el costo de la bomba y de su instalación, que se supone igual a $100 + 10z$, donde z es la capacidad de la bomba; y (b) un costo asociado con la falta de suplir la demanda máxima, y dado como $10 + (Y - z)^2$. El costo total C es entonces igual a:

$$C = \begin{cases} 100 + 10z & Y \leq z \\ 100 + 10z + 10 + (Y - z)^2 & Y > z \end{cases}$$

En esta expresión, $(Y - z)$ es la cantidad por la cual la bomba de capacidad z falla en suplir la demanda Y .

Solución

1. Puesto que la bomba existente tiene una capacidad máxima de 150 cfs., la demanda Y sobre la bomba adicional es igual a cero hasta que la demanda alcanza 150 cfs. Como el valor máximo de la demanda X es 250 cfs., Y se obtiene como

$$Y = g_1(X) = \begin{cases} 0 & X \leq 150 \\ X - 150 & X > 150 \end{cases}$$

Esta función se graficó en la Figura 37(b).

Podemos desarrollar la distribución de Y considerando las figuras 37(a) y 37(b).

$$P(Y = 0) = P(X \leq 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{(100)} (x - 50) = 1/2 = p_Y(y)$$

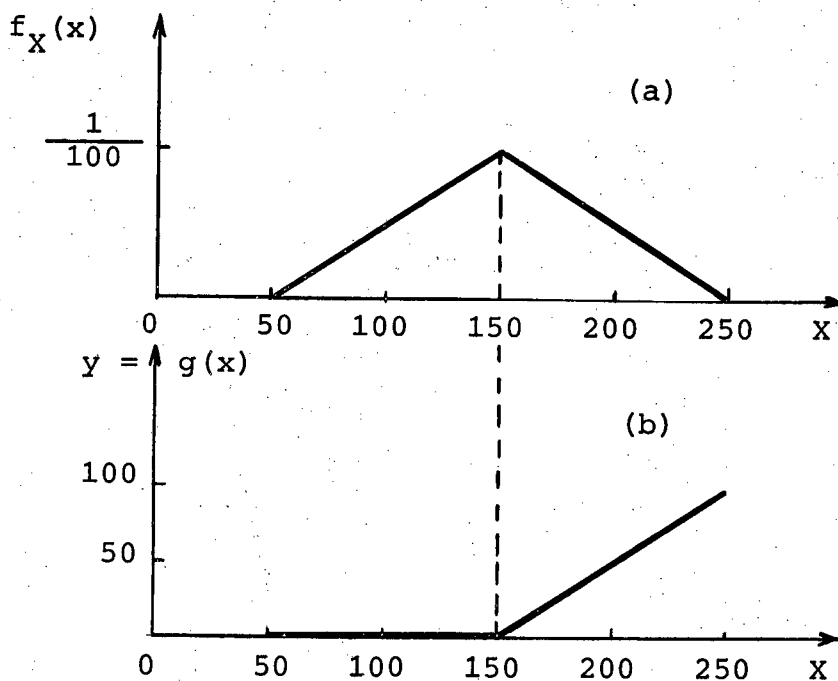


Figura 37. (a) Curva de la densidad de la demanda X y (b) función $Y=g(X)$ graficada.

Para $150 < X < 250$ la función $Y = X - 150$ es unívoca y monótonicamente creciente, y la densidad de $\underline{Y}$ se puede obtener mediante:

$$f_Y(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| f_X(x) = \left| \frac{d[g_1^{-1}(y)]}{dy} \right| f_X[g_1^{-1}(y)]$$

$$x = g_1^{-1}(y) = y + 150$$

$$\frac{d[g_1^{-1}(y)]}{dy} = \frac{d}{dy} (y + 150) = 1$$

$$f_X[g_1^{-1}(y)] = \frac{2}{100} - \frac{1}{(100)^2} (y + 150 - 50)$$

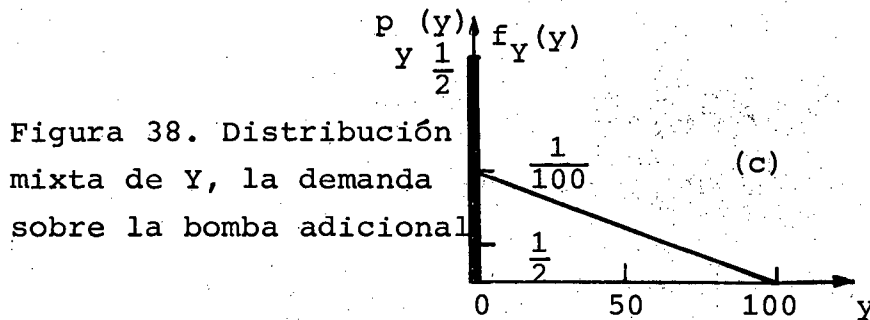
$$= \frac{2}{100} - \frac{1}{(100)^2} (y + 100)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \quad 0 < y \leq 100$$

De modo que Y es una variable mixta, discreta y continua, cuya función de distribución es:

$$p_Y(y) = 1/2 \quad y = 0$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \quad 0 < y \leq 100$$



2. Valor esperado de la demanda

$$E(Y) = 0 \cdot p_Y(y) + \int_0^{100} y \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy = 16.7 \text{ cfs}$$

b. Valor esperado dado $Y > 0$

$$E[Y/Y > 0] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y/Y > 0}(y) dy$$

$$f_{Y/Y > 0}(y) = \frac{f_Y(y)}{P(Y > 0)} = \frac{f_Y(y)}{1/2} = 2f_Y(y)$$

$$E[Y/Y > 0] = \int_0^{100} 2y \left(\frac{1}{100} - \frac{y}{(100)^2} \right) dy = 33.3 \text{ cfs}$$

3. Cuando $z=0$ el único costo es el asociado con la falla de suplir la demanda. El valor esperado de C para $0 < z < 100$ es

$$\begin{aligned}
 E(C) &= (100 + 10z)p_Y(0) + \int_0^z (100 + 10z) \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy \\
 &\quad + \int_z^{100} [100 + 10z + 10 + (y - z)^2] \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy \\
 &= 1/2 (100 + 10z) + \int_0^{100} (100 + 10z) \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy \\
 &\quad + \int_z^{100} 10 \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy \\
 &\quad + \int_z^{100} (y - z)^2 \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy \\
 &= 1/2 (100 + 10z) + (100 + 10z) \int_0^{100} \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy \\
 &\quad + 10 \int_z^{100} \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy \\
 &\quad + \int_z^{100} (y - z)^2 \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} y \right) dy \\
 &= 1/2 (100 + 10z) + 1/2 (100 + 10z) + \frac{10(100 - z)^2}{2(100)^2} \\
 &\quad + \frac{1}{300} (100 - z)^3 - \frac{1}{3(100)^2} (100^3 - z^3) + \frac{z}{2(100)^2} (100^2 - z^2)
 \end{aligned}$$

$$0 < z \leq 100$$

Para $z = 0$ $E(C) = 3305$

Para $z = 100$ $E(C) = 1100$

Intermedio:
$$\begin{aligned}
 \frac{dE(C)}{dz} &= 10 - \frac{10(100 - z_0)}{(100)^2} - \frac{1}{100} (100 - z_0)^2 + \frac{z_0^2}{(100)^2} \\
 &\quad + 1/2 - 3/2 \frac{z_0^2}{(100)^2} = 0
 \end{aligned}$$

$$z_0 = 67.5 \text{ cfs}$$

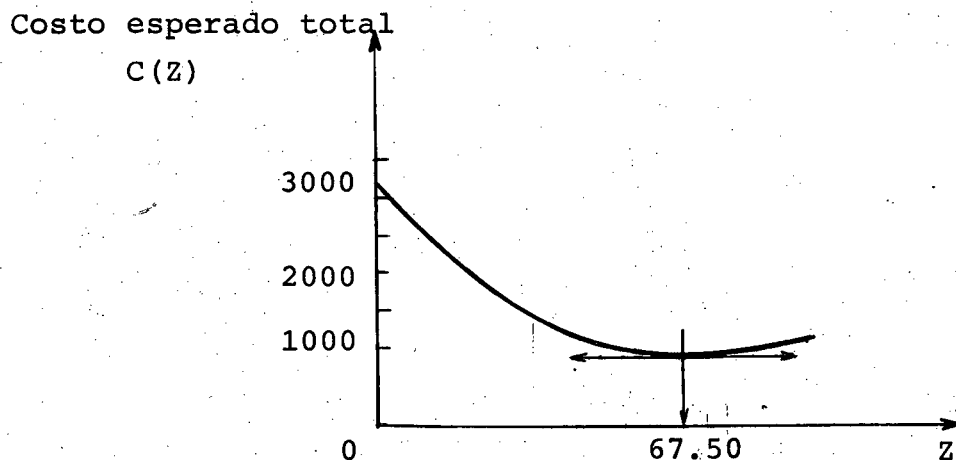


Figura 39. Gráfica del costo esperado total como función de la capacidad de la bomba.

B. ESPERANZA MATEMATICA DE VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAMENTE DISTRIBUIDAS

La noción de esperanza se extiende a variables conjuntamente distribuidas.

1. ESPERANZA DE UNA FUNCION

Sean X y Y con distribución $f_{X,Y}(x,y)$ si son continuas y $p_{X,Y}(x,y)$ si son discretas. Sea $Z = g(X,Y)$.

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$E(Z) = E[g(X,Y)] = \sum_{\text{todos } x_i} \sum_{\text{todos } y_i} g(x_i, y_i) p_{X,Y}(x_i, y_i)$$

2. MOMENTOS

Si dejamos $g(X,Y) = x^1 y^n$

$$E(X^1 Y^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^1 y^n f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

es llamado el momento de orden $1+n$ de las variables aleatorias $\underline{X}$ y $\underline{Y}$.

$$\text{Para } l = 1 \quad y \quad n = 0 \quad E(X^1 Y^0) = E(X) = m_X$$

$$\text{Para } l = 0 \quad y \quad n = 1 \quad E(X^0 Y^1) = E(Y) = m_Y$$

3. MOMENTOS CENTRADOS

Si ahora definimos: $g(X,Y) = (X - m_X)^1 (Y - m_Y)^n$

$$E[g(X,Y)] = E[(X - m_X)^1 (Y - m_Y)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^1 (y - m_Y)^n f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

es el momento centrado de orden $1+n$ de las variables aleatorias $\underline{X}$ y $\underline{Y}$.

$$\begin{aligned} \text{Para } l = 2 \quad y \quad n = 0 \quad \sigma_X^2 &= E[g(X,Y)] = E[(X - m_X)^2] \\ &= \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 \\ &\quad \cdot dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } l = 0 \quad y \quad n = 2 \quad \sigma_Y^2 &= E[g(X,Y)] = E[(Y - m_Y)^2] \\ &= \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

4. COVARIANZA

Cuando $l = 1$ $n = 1$ se obtiene el momento de orden 2 llamado covarianza de $\underline{X}$ y $\underline{Y}$, $\text{Cov}(X, Y)$ ó $\sigma_{X, Y}$

$$\sigma_{X, Y} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f_{X, Y}(x, y) dx dy$$

5. COEFICIENTE DE CORRELACION

Se obtiene al normalizar la covarianza, dividiéndola por el producto de las desviaciones típicas.

$$\rho_{X, Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Es obvio que $-1 < \rho_{X, Y} < 1$

Ejemplo 59

La distribución bivariada de $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ es

$$f_{X, Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{280}(15-x-y) & 0 < x < 10 \quad 1 < y < 5 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Hallar el coeficiente de correlación de $\underline{X}$ y $\underline{Y}$.

Solución

Por definición

$$\rho_{X, Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2]$$

$$m_X = E(X) = E(XY^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$= \int_1^5 \int_0^{10} x \frac{1}{280} (15 - x - y) dx dy$$

$$m_X = \frac{1}{280} \int_0^{10} x (48 - 4x) dx = \frac{1}{280} [24 \times 10^2 - \frac{4}{3} 10^3]$$

$$m_X = 3.809524$$

$$m_Y = E(Y) = \int_1^5 \int_0^{10} y \frac{1}{280} (15 - x - y) dx dy$$

$$m_Y = 2.809524$$

$$\sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2] = \int_0^{10} (x - 3.81)^2 dx \left[\int_1^5 \frac{1}{280} (15 - x - y) dy \right]$$

$$\sigma_Y^2 = \int_1^5 (y - 2.81) dy \left[\int_0^{10} \frac{1}{280} (15 - x - y) dx \right]$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \int_0^{10} \int_1^5 (x - 3.81)(y - 2.81) \frac{1}{280} (15 - x - y) dx dy$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

5. MOMENTOS DE FUNCIONES LINEALES

$$\text{Si } Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

la esperanza de $\underline{Y}$ es:

$$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

Este resultado es válido que los X_i sean independientes o no.

La varianza de $\underline{Y}$ es:

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

si las variables X_i no son independientes: $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

En caso de independencia de los X_i , la fórmula se reduce a:

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i)$$

En el caso de $n = 2$, se tiene $Z = aX + bY$, y

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}(Z) = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab \rho_{X,Y} \sigma_X \sigma_Y$$

Si $Z = cX - dY$

$$\text{Var}(Z) = c^2 \sigma_X^2 + d^2 \sigma_Y^2 - 2cd \rho_{X,Y} \sigma_X \sigma_Y$$

Para $Z = X + Y$ tenemos $m_Z = m_X + m_Y$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= E[(Z - m_Z)^2] = E[(X + Y - m_X - m_Y)^2] = E\{[(X - m_X) + (Y - m_Y)]^2\} \\ &= E[(X - m_X)^2 + (Y - m_Y)^2 + 2(X - m_X)(Y - m_Y)] \\ &= E(X - m_X)^2 + E(Y - m_Y)^2 + 2E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

5. MATRIZ DE COVARIANZA

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ las variables aleatorias conjuntamente distribuidas. La matriz de covarianza es la matriz de todos los momentos de segundo orden.

Caso de dos variables X_1 y X_2 :

Los momentos de segundo orden se obtienen cuando en la fórmula $g(X_1, X_2) = X_1^1 X_2^n$ se hace $1+n = 2$.

Se puede demostrar que $\sigma_{XY} = \sigma_{YX}$ puesto que

$$\sigma_{XY} = E[(X - m_X)(Y - m_Y)]$$

$$\sigma_{YX} = E[(Y - m_Y)(X - m_X)]$$

	X	Y
X	σ_X^2	σ_{XY}
Y	σ_{YX}	σ_Y^2

Matriz de covarianza
de $\underline{X}$ y $\underline{Y}$

	X_1	X_2
X_1	σ_{11}	σ_{12}
X_2	σ_{21}	σ_2^2

Matriz de covarianza
de X_1 y X_2

Este libro se terminó de re-
imprimir el 11-10-78 en el
Taller de Reproducción del
CIDIAT.
Se reprodujeron 200 ejemplares.

